Über Monotonisierbarkeit von Iterationsgruppen reeller Funktionen

Von HORST MICHEL (Halle/Saale)

Aus einem Satz von J. ACZÉL, L. KALMÁR und J. G. MIKUSIŃSKI [1] folgt für solche Iterationsgruppen G, deren Elemente stetige und streng monoton wachsende Funktionen sind, daß die Stetigkeit von G und die Monotonie von G (Definitionen siehe Abschnitt 1) äquivalente Begriffe sind.

Will man eine größere Klasse als die der stetigen Iterationsgruppen studieren, so muß man entweder die Stetigkeit der Elemente von G aufgeben, wie dies L. BERG in [2] getan hat, oder man muß die Nichtmonotonie von G in Kauf nehmen. Iterationsgruppen der letzteren Art kann man aus stetigen, monotonen Gruppen dadurch erhalten, daß man den Iterationsindex s bei allen Elementen der Gruppe durch eine beliebige Lösung $\varphi(s)$ der Cauchyschen Funktionalgleichung $\varphi(s+t) = \varphi(s)+\varphi(t)$ ersetzt, deren vollständige Lösungsmannigfaltigkeit G. HAMEL in [3] angegeben hat. Die Unstetigkeit der so entstehenden Gruppen läßt sich dadurch beheben, daß man sie „monotonisiert", indem man die angedeutete Substitution $s \to \varphi(s)$ rückgängig zu machen sucht.

Ein anderer Weg, um eine größere Klasse von Iterationsgruppen als die der stetigen zu erhalten, ist die Charakterisierung der Gruppen durch gewisse topologische Eigenschaften, z. B. durch die unten definierte „Dichtheit".

Im folgenden wird gezeigt, daß für solche Iterationsgruppen G, deren Elemente stetige und streng monoton wachsende Funktionen sind, die Monotonisierbarkeit von G und die Dichtheit von G äquivalente Begriffe sind. Dies kann als Analogon zum oben zitierten Satz von ACZÉL—KALMÁR—MIKUSIŃSKI angesehen werden.

1. Definitionen. Unter S verstehen wir im folgenden die Menge aller auf $(0, \infty)$ definierten, stetigen und streng monoton wachsenden Funktionen f, für welche $f(0)=0$ und $f(\infty)=\infty$ gilt (wie in [4]). S wird mit der durch

$$[fg](x)=f(g(x))$$

definierten Verknüpfung fg zweier Elemente $f, g \in S$ zu einer Gruppe. In S kann man eine t-Ordnungsstruktur einführen durch die Definition

$$f<g \leftrightarrow f(x)<g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in (0, \infty).$$

Für ihre Eigenschaften, insbesondere ihre Verträglichkeit mit der Gruppenmultiplikation sei auf [4] verwiesen.

Eine Teilmenge $G \subset S$ heiße genau dann eine *Iterationsgruppe*, wenn zu jeder reellen Zahl s genau ein $f^{[s]} \in G$ existiert und wenn

$$f^{[s]} f^{[t]} = f^{[s+t]} \tag{1}$$

gilt. Mit e bezeichnen wir diejenige Funktion aus S, für welche $e(x)=x$ $(x\in[0,\infty])$ gilt. Sie ist das Einselement in S.

Zwei Iterationsgruppen $G_1=\{f_1^{[s]}\}$ und $G_2=\{f_2^{[s]}\}$ heißen *gleich*, wenn

$$f_1^{[s]}=f_2^{[s]} \text{ für allen reellen } s$$

gilt. Für die Gleichheit von G_1 und G_2 genügt es also nicht, daß beide Gruppen dieselben Elemente enthalten.

G heiße *monoton* wachsend genau dann, wenn aus $s<t$ stets $f^{[s]}<f^{[t]}$ folgt. Wir werden im folgenden eine monoton wachsende Gruppe kurz monoton nennen.

G heiße *stetig* genau dann, wenn für jede konvergente Folge $\{s_n\}$ mit dem Grenzwert s und jedes feste $x_0\in[0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f^{[s_n]}(x_0)=f^{[s]}(x_0)$$

gilt. Nach dem oben zitierten Satz aus [1] sind Monotonie und Stetigkeit, wie sie soeben definiert wurden, äquivalente Begriffe.

G heiße *schlicht* genau dann, wenn zu jedem geordneten Paar (x, y) positiver reeller Zahlen genau eine reelle Zahl s existiert, so daß $f^{[s]}(x)=y$ gilt. Monotone Iterationsgruppen sind schlicht (vgl. [4], Satz 3. 5). Sie sind aber nicht die einzigen schlichten Iterationsgruppen, wie sich in Abschnitt 4 zeigen wird.

G heiße *dicht* genau dann, wenn zu jedem Tripel (x, y, ε) positiver reeller Zahlen wenigstens ein reelles s mit

$$y-\varepsilon<f^{[s]}(x)<y+\varepsilon \tag{2}$$

existiert und wenn

$$\text{aus } f^{[s]}(x_0)=f^{[t]}(x_0) \text{ für } x_0\in(0,\infty) \text{ folgt } f^{[s]}=f^{[t]} \tag{3}$$

gilt. Schlichte Iterationsgruppen sind dicht, aber nicht die einzigen dichten Iterationsgruppen. Ein Beispiel hierzu kann man im Anschluß an Satz 4. 1 nachlesen.

$G=\{f^{[s]}\}$ heiße *monotonisierbar* zu einer monotonen (und daher stetigen) Iterationsgruppe $\bar{G}=\{\bar{f}^{[s]}\}$ genau dann, wenn wenigstens ein reelles s_0 mit

$$f^{[s_0]}>e \tag{4}$$

existiert* und wenn eine für alle reellen Zahlen s definierte reelle Funktion $\varphi(s)$ existiert, so daß

$$\bar{f}^{[\varphi(s)]}=f^{[s]} \qquad \text{für alle reellen } s, \tag{5}$$

$$s<t\to\bar{f}^{[s]}<\bar{f}^{[t]} \tag{6}$$

gilt. $\bar{G}$ wird im folgenden auch *Monotonisierung* von G genannt. Aus (5) ersieht man, daß alle Elemente von G in $\bar{G}$ liegen. Da der Wertebereich der Funktion φ nicht alle reellen Zahlen zu umfassen braucht, kann die Monotonisierung $\bar{G}$ mehr Elemente enthalten als G. Wegen der Schlichtheit von $\bar{G}$ folgt daraus, daß G „Lük-

*) Bedingung (4) fordert die Existenz einer auf $(0,\infty)$ fixpunktfreien Iterierten $f^{[s_0]}$, die ja nicht notwendig vorhanden zu sein brauchte.

ken" lassen kann, d. h. Punkte im Innern des ersten Quadranten des E_2, durch welche keine Funktion aus G hindurchgeht. Monotone Iterationsgruppen sind trivialerweise auch monotonisierbar (man wähle z. B. $\varphi(s)=s$).

2. Monotonisierbare Iterationsgruppen. Nichttriviale monotonisierbare Iretationsgruppen kann man auf folgende Weise konstruieren: Es sei $\bar{G}=\{\bar{f}^{[s]}\}$ eine monotone Iterationsgruppe und $\psi(s)$ eine beliebige unstetige, mit einer Hamelbasis [3] herstellbare Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung $\psi(s+t)=\psi(s)+\psi(t)$. Dann kann man eine Iterationsgruppe $G=\{f^{[s]}\}$ durch $f^{[s]}=\bar{f}^{[\psi(s)]}$ definieren. G ist monotonisierbar, wenn man $\varphi=\psi$ wählt und zwar ist $\bar{G}$ eine Monotonisierung von G. Also sind alle Gruppen, die durch diesen Substitutionsprozeß entstehen, monotonisierbar.

Bedenkt man andererseits, daß für monotonisierbare Iterationsgruppen stets

$$\bar{f}^{[\varphi(s+t)]}=f^{[s+t]}=f^{[s]}f^{[t]}=\bar{f}^{[\varphi(s)]}\bar{f}^{[\varphi(t)]}=\bar{f}^{[\varphi(s)+\varphi(t)]} \tag{7}$$

und also (wegen der Monotonie von $\bar{G}$)

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)+\varphi(t) \tag{8}$$

gilt, so sieht man, daß sich sogar jede monotonisierbare Iterationsgruppe G auf die soeben beschriebene Art aus einer monotonen Iterationsgruppe konstruieren läßt.

Satz 2. 1. *Ist $\bar{G}=\{\bar{f}^{[s]}\}$ eine Monotonisierung von $G=\{f^{[s]}\}$, so ist $\bar{\bar{G}}=\{\bar{\bar{f}}^{[s]}\}$ genau dann auch eine Monotonisierung von G, wenn eine reelle Zahl $c>0$ mit*

$$\bar{f}^{[s]}=\bar{\bar{f}}^{[cs]} \qquad \textit{für alle reellen } s \tag{9}$$

existiert.

Beweis. 1. Es sei $\bar{\bar{G}}$ eine Monotonisierung von G. Wegen (4) liegt in G ein Element

$$f^{[s_0]}>e, \tag{10}$$

für welches wegen (5)

$$\bar{f}^{[\bar{\varphi}(s_0)]}=f^{[s_0]},\ \bar{\bar{f}}^{[\bar{\bar{\varphi}}(s_0)]}=f^{[s_0]} \tag{11}$$

gilt. Da wegen (5) $G\subset\bar{G}$ und $G\subset\bar{\bar{G}}$ gilt, so liegen die $f^{[rs_0]}$ (r rational) auch in den Gruppen $\bar{G}$ und $\bar{\bar{G}}$ mit

$$\bar{f}^{[r\bar{\varphi}(s_0)]}=f^{[rs_0]},\quad \bar{\bar{f}}^{[r\bar{\bar{\varphi}}(s_0)]}=f^{[rs_0]}. \tag{12}$$

Wäre nämlich $\bar{f}^{[r\bar{\varphi}(s_0)]}\neq f^{[rs_0]}$ für gewisses r, so ist wegen der Monotonie von $\bar{G}$ nur

$$\bar{f}^{[r\bar{\varphi}(s_0)]}\lessgtr f^{[rs_0]}$$

möglich. Mit $r=m/n$ folgt daraus durch Potenzierung mit n

$$\bar{f}^{[m\bar{\varphi}(s_0)]}\lessgtr f^{[ms_0]},$$

was mit (11) unvereinbar ist. Analog schließt man für die Elemente von $\overline{\overline{G}}$. Also ist (12) richtig und es folgt wegen der Stetigkeit von $\overline{G}$ und $\overline{\overline{G}}$ für alle sogar reellen t

$$\bar{f}^{[t\overline{\varphi}(s_0)]} = \bar{\bar{f}}^{[t\overline{\overline{\varphi}}(s_0)]}. \tag{13}$$

Wegen (10) und (11) sind $\overline{\varphi}(s_0)$, $\overline{\overline{\varphi}}(s_0)$ und daher auch $c = \dfrac{\overline{\overline{\varphi}}(s_0)}{\overline{\varphi}(s_0)}$ von Null verschieden. Setzt man c und $s = t\overline{\overline{\varphi}}(s_0)$ in (13) ein, so folgt (9). $\overline{\varphi}(s_0)$ und $\overline{\overline{\varphi}}(s_0)$ sind beide positiv, weil andernfalls wegen (11) und

$$f^{[s_0]} = \bar{f}^{[\overline{\varphi}(s_0)]} < e, \; f^{[s_0]} = \bar{\bar{f}}^{[\overline{\overline{\varphi}}(s_0)]} < e$$

die Relation (10) falsch wäre. Also ist $c > 0$.

2. $\overline{\overline{G}}$ erfülle die Beziehung (9). Ist $\bar{f}^{[\overline{\varphi}(s)]} = f^{[s]}$, so setze man $\overline{\overline{\varphi}}(s) = c\overline{\varphi}(s)$ und erhält

$$\bar{\bar{f}}^{[\overline{\overline{\varphi}}(s)]} = \bar{f}^{[\overline{\overline{\varphi}}(s)/c]} = \bar{f}^{[\overline{\varphi}(s)]} = f^{[s]}$$

und wegen $c > 0$ folgt aus $s < t$ auch $s/c < t/c$ und somit

$$\bar{\bar{f}}^{[s]} = \bar{f}^{[s/c]} < \bar{f}^{[t/c]} = \bar{\bar{f}}^{[t]}, \text{ q. e. d.}$$

Wie dieser Satz zeigt, ist die Monotonisierung einer Iterationsgruppe nicht eindeutig bestimmt, wohl aber die Menge der Elemente, die in ihr liegen. Eine gewisse Umkehrung dieses Satzes wird in Abschnitt 5 behandelt.

Satz 2. 2. *Ist G monotonisierbar, so ist G dicht.*

Beweis. 1. Ist $\overline{G}$ die Monotonisierung von G, so enthält $\overline{G}$ wegen $G \subset \overline{G}$ und (4) ein Element $\bar{f}^{[\varphi(s_0)]} \gtrless e$. Da $\overline{G}$ auch stetig ist, existiert zu jedem Tripel (x, y, ε) positiver reeller Zahlen eine sogar rationale Zahl r mit

$$y - \varepsilon < \bar{f}^{[r\varphi(s_0)]}(x) < y + \varepsilon,$$

d. h. schon die rationalen Iterierten von $\bar{f}^{[\varphi(s_0)]}$ liegen dicht im ersten Quadranten. Da φ, wie aus (7) und (8) ersichtlich, der Cauchyschen Funktionalgleichung genügen muß, so gilt, da r rational ist, $r\varphi(s_0) = \varphi(rs_0)$, woraus $\bar{f}^{[r\varphi(s_0)]} = \bar{f}^{[\varphi(rs_0)]} = f^{[rs_0]}$ und

$$y - \varepsilon < f^{[rs_0]}(x) < y + \varepsilon$$

folgt, womit (2) bewiesen ist.

2. Aus $f^{[s]}(x_0) = f^{[t]}(x_0)$ für $x_0 \in (0, \infty)$ folgt mit (5)

$$\bar{f}^{[\varphi(s)]}(x_0) = \bar{f}^{[\varphi(t)]}(x_0)$$

und daraus wegen der Schlichtheit von $\overline{G}$ $\bar{f}^{[\varphi(s)]} = \bar{f}^{[\varphi(t)]}$. Also ist $f^{[s]} = f^{[t]}$, was für (3) zu zeigen war.

3. Dichte Iterationsgruppen. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß der Satz 2. 2 auch umkehrbar ist. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig, die in den Hilfssätzen 3. 1 bis 3. 3 gemacht werden.

Hilfssatz 3. 1. *Ist G eine Iterationsgruppe und $f^{[s]}, f^{[t]} \in G$ mit $f^{[s]} > e$, so existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft*

$$(f^{[s]})^n > f^{[t]}.$$

Einen Beweis hierfür kann man in [4], Satz 4. 9 nachlesen. Er beruht auf der Vertauschbarkeit von $f^{[s]}$ und $f^{[t]}$.

Hilfssatz 3. 2. *Ist G eine Iterationsgruppe und $f^{[s]} > e$ ein beliebiges Element aus G, so folgt für je zwei rationale Zahlen r_1, r_2 aus $r_1 < r_2$ stets*

$$f^{[r_1 s]} < f^{[r_2 s]}.$$

Für den Beweis kann wieder auf [4] verwiesen werden (Hilfssatz 2. 9). Der folgende Hilfssatz 3. 3 ist für die Umkehrung von Satz 2. 1 sehr wichtig. Er bringt zum Ausdruck, daß die rationalen Iterierten eines festen Elements einer dichten Iterationsgruppe dicht liegen.

Hilfssatz 3. 3. *Ist G dicht und $f^{[s_0]} \in G$ mit $f^{[s_0]} \lesseqgtr e$, so existiert zu jedem Tripel (x, y, ε) positiver reeller Zahlen eine rationale Zahl r mit*

$$y - \varepsilon \leqq f^{[rs_0]}(x) \leqq y + \varepsilon.$$

Beweis. 1. Wir nehmen zunächst an, daß $f^{[s_0]} > e$ ist und daß $(x_0, y_0, \varepsilon_0)$ ein solches Tripel ist, für welches

$$y_0 - \varepsilon_0 \leqq f^{[rs_0]}(x_0) \leqq y_0 + \varepsilon_0 \text{ für kein rationales } r \tag{14}$$

gilt. Wegen (2) existieren sicher zwei Elemente $f^{[\varrho_1]}, f^{[\varrho_2]} \in G$ mit den Eigenschaften

$$y_0 - \varepsilon_0 \leqq f^{[\varrho_1]}(x_0) < y_0,$$
$$y_0 < f^{[\varrho_2]}(x_0) \leqq y_0 + \varepsilon_0,$$

woraus

$$f^{[\varrho_2 - \varrho_1]} > e \tag{15}$$

folgt. Wäre nämlich für ein $x_1 \in (0, \infty)$ $f^{[\varrho_2 - \varrho_1]}(x_1) \leqq x_1$, so würde wegen $f^{[\varrho_2 - \varrho_1]}(x_0) > x_0$ ein x_2 existieren mit $f^{[\varrho_2 - \varrho_1]}(x_2) = x_2$, woraus mit (3) $f^{[\varrho_1]} = f^{[\varrho_2]}$ folgen würde. Nach Hilfssatz 3. 1 existiert also eine natürliche Zahl n_0 mit der Eigenschaft

$$(f^{[\varrho_2 - \varrho_1]})^{n_0} = f^{[n_0(\varrho_2 - \varrho_1)]} > f^{[s_0]}. \tag{16}$$

Nun bilden wir zwei Klassen R_1 und R_2 rationaler Zahlen, die durch

$$R_1 = \{r : f^{[rs_0]} < f^{[\varrho_1]}\}, \quad R_2 = \{r : f^{[rs_0]} > f^{[\varrho_2]}\}$$

gegeben sind. Ist R die Menge aller rationalen Zahlen, so gilt wegen (14)

$$R_1 \cup R_2 = R \tag{17}$$

und wegen (15) ist $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Aber es ist keine der Klassen R_1, R_2 leer. Es sei nämlich $r_1 \in R_1$. Es kann $r_1 \neq 0$ angenommen werden, denn mit 0 enthält R_1 wegen Hilfssatz 3. 2 auch alle rationalen Zahlen < 0. Daher ist $|r_1| > 0$ und aus Hilfssatz

3. 2 folgt mit $f^{[s_0]} > e$

$$e < f^{[|r_1|s_0]}.$$

Wendet man nun den Hilfssatz 3. 1 auf $f^{[|r_1|s]}$ und $f^{[\varrho_2]}$ an, so existiert ein natürliches n_1 mit der Eigenschaft

$$(f^{[|r_1|s_0]})^{n_1} = f^{[n_1|r_1|s_0]} > f^{[\varrho_2]},$$

womit gezeigt ist, daß $n_1|r_1| \in R_2$ gilt. Aus $R_1 \neq \emptyset$ folgt also $R_2 \neq \emptyset$. Analog beweist man, daß aus $R_2 \neq \emptyset$ auch $R_1 \neq \emptyset$ folgt. Da wegen (17) wenigstens eine der Mengen R_1, R_2 nicht leer sein kann, sind also beide nicht leer. Nach Hilfssatz 3. 2 bilden die $f^{[rs_0]}$ eine monoton wachsende Untergruppe von G. Daher existieren zwei Zahlen $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ mit

$$r_2 - r_1 < \frac{1}{n_0}, \tag{18}$$

wobei n_0 die durch (16) definierte natürliche Zahl ist. Aus

$$f^{[r_1 s_0]} < f^{[\varrho_1]} < f^{[\varrho_2]} < f^{[r_2 s_0]}$$

folgt dann mit (18)

$$(f^{[\varrho_2 - \varrho_1]})^{n_0} < (f^{[(r_2 - r_1)s_0]})^{n_0} = f^{[n_0(r_2 - r_1)s_0]} < f^{[s_0]},$$

also $(f^{[\varrho_2 - \varrho_1]})^{n_0} < f^{[s_0]}$, was (16) widerspricht und zeigt, daß die Annahme (14) falsch war.

2. Ist $f^{[s_0]} < e$, so ist $f^{[-s_0]} > e$ und wenn man noch in (14) r durch $-r$ ersetzt, so hat man diesen Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Satz 3. 4. *Ist G dicht, so ist G monotonisierbar.*

Beweis. Es sei $f^{[\varrho_0]} \in G$ mit der Eigenschaft $f^{[\varrho_0]} > e$ fest gewählt, was wegen (2) stets möglich ist. Auf der Menge der reellen Zahlen kann dann eine Funktion

$$\varphi(s) = \inf\{r\varrho_0 : f^{[s]} < f^{[r\varrho_0]}\} \tag{19}$$

definiert werden. Wegen der Dichtheit von G und Hilfssatz 3. 3 ist die Existenz dieses Infimums immer gesichert. Ebenso sind durch

$$\bar{f}^{[s]}(x) = \inf\{f^{[r\varrho_0]}(x) : s < r\varrho_0\}, \; x \in [0, \infty) \tag{20}$$

die Funktionen $\bar{f}^{[s]} \in S$ korrekt definiert. Wir wollen zeigen, daß sie eine Iterationsgruppe $\bar{G}$ bilden, daß also

$$\bar{f}^{[s+t]} = \bar{f}^{[s]}\bar{f}^{[t]} \tag{21}$$

gilt. Wäre nämlich $\bar{f}^{[s+t]} < \bar{f}^{[s]}\bar{f}^{[t]}$, so gäbe es ein r_0 mit

$$\bar{f}^{[s+t]} < f^{[r_0\varrho_0]} < \bar{f}^{[s]}\bar{f}^{[t]} \tag{22}$$

und r_0 ließe eine Darstellung $r_0 = r_0' + r_0''$ zu, so daß gleichzeitig die Ungleichungen

$$f^{[r_0'\varrho_0]} < \bar{f}^{[s]}, \; f^{[r_0''\varrho_0]} < \bar{f}^{[t]} \tag{23}$$

erfüllt sind. Setzt man (22) und (23) zusammen, so folgt

$$\bar{f}^{[s+t]} < f^{[r_0\varrho_0]} = f^{[r'\varrho_0]} f^{[r''_0\varrho_0]} < \bar{f}^{[s]} \bar{f}^{[t]} = \bar{f}^{[s+t]},$$

was unmöglich ist, also war die Annahme $\bar{f}^{[s+t]} < \bar{f}^{[s]}\bar{f}^{[t]}$ falsch. Ganz analog führt man $\bar{f}^{[s+t]} > \bar{f}^{[s]}\bar{f}^{[t]}$ zum Widerspruch, womit (21) bewiesen ist. Die $\bar{f}^{[s]}$ bilden also eine Iterationsgruppe $\bar{G}$, von der nun gezeigt werden soll, daß sie die Bedingungen (5) und (6) erfüllt. Wäre $\bar{f}^{[\varphi(s)]}(x_1) < f^{[s]}(x_1)$ für ein $x_1 \in (0, \infty)$ und ein beliebiges $s \in (-\infty, +\infty)$, so existiert nach Hilfssatz 3. 3 ein rationales r_1 mit

$$\bar{f}^{[\varphi(s)]}(x_1) < f^{[r_1\varrho_0]}(x_1), \tag{24}$$

$$f^{[r_1\varrho_0]}(x_1) < f^{[s]}(x_1), \tag{25}$$

und es folgt wegen (20) aus (24) $\varphi(s) < r_1\varrho_0$ und daraus mit (19) $f^{[s]} < f^{[r_1\varrho_0]}$, was (25) widerspricht. Analog zeigt man, daß $\bar{f}^{[\varphi(s)]}(x_1) > f^{[s]}(x_1)$ für kein $x_1 \in (0, \infty)$ gelten kann. Die durch (19) festgelegte Funktion φ erfüllt also die Bedingung (5). Daß auch (6) gilt, liest man unmittelbar aus (20) ab, wenn man noch Hilfssatz 3. 2 berücksichtigt.

4. Spezielle monotonisierbare Iterationsgruppen. Als Beispiele für die vorangegangenen allgemeinen Sätze seien drei spezielle Klassen monotonisierbarer Iterationsgruppen besonders hervorgehoben.

Zunächst die schlichten Iterationsgruppen, die schon in Abschnitt 1 definiert wurden. Als dichte Iterationsgruppen sind sie zugleich monotonisierbar und lassen sich dadurch charakterisieren, daß die Abbildungsfunktion φ in (5) eine auf allen reellen Zahlen definierte Inverse φ^{-1} besitzt. Ist nämlich letzteres der Fall, so kann man statt (5) auch $\bar{f}^{[s]} = f^{[\varphi^{-1}(s)]}$ schreiben: Jedes Element aus $\bar{G}$ kommt auch in G vor. G und $\bar{G}$ enthalten also dieselben Elemente und aus der Schlichtheit von $\bar{G}$ folgt die Schlichtheit von G. Ist dagegen G schlicht, so folgt aus $s_1 \neq s_2$ $f^{[s_1]} \neq f^{[s_2]}$ und daraus mit (5) $\bar{f}^{[\varphi(s_1)]} \neq \bar{f}^{[\varphi(s_2)]}$, also $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$. Ist t eine beliebige reelle Zahl, so existiert wegen der Schlichtheit von G ein reelles s mit $\bar{f}^{[t]} = f^{[s]} = \bar{f}^{[\varphi(s)]}$, also $t = \varphi(s)$. Der Wertebereich von φ umfaßt also alle reellen Zahlen. Daraus folgt, daß φ eine Inverse besitzt.

Das zweite Beispiel soll zeigen, daß die Funktionen einer monotonisierbaren Iterationsgruppe den 1. Quadranten des E_2 nicht zu überdecken brauchen. Es sei $H = \{\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots\}$ eine Hamelbasis der reellen Zahlen und für $s = r_0\varrho_0 + r_1\varrho_1 + r_2\varrho_2 + \ldots$ sei die Funktion $f^{[s]}$ der monotonisierbaren Iterationsgruppe $G = \{f^{[s]}\}$ definiert durch

$$f^{[s]} = \bar{f}^{[r_0\varrho_0]},$$

wobei $\bar{G} = \{\bar{f}^{[s]}\}$ eine beliebige monotone Iterationsgruppe sei. Dann sind alle Gruppenelemente $f^{[s]} \in G$, deren Iterationsindex s dieselbe rationale Komponente r_0 in „ϱ_0-Richtung" hat, gleich. In G kommt also jedes Element mit (sogar unendlich hoher) Vielfachheit vor.

Daß bei nichtüberdeckenden, monotonisierbaren Iterationsgruppen aber nicht notwendig Elemente mit „Vielfachheit" auftreten müssen, geht aus dem folgenden

Satz über Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung hervor*), aus dem dann das dritte Beispiel abgeleitet wird.

Satz 4. 1. *Ist $\varrho_0 \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl, so existiert eine Lösung φ der Cauchyschen Funktionalgleichung* (8) *mit den Eigenschaften*

$$\varphi(s) \neq \varrho_0 \text{ für alle reellen } s, \tag{26}$$

$$s_1 \neq s_2 \to \varphi(s_1) \neq \varphi(s_2). \tag{27}$$

Beweis. Es sei $H = \{\varrho_\alpha : \alpha \in A\}$ eine ϱ_0 enthaltende Hamelbasis der reellen Zahlen. Dann ist $H' = H - \{\varrho_0\}$ eine Menge, auf die H wegen der Gleichmächtigkeit umkehrbar eindeutig durch die Funktion φ abgebildet werden kann. Durch

$$\varphi(s) = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha \varphi(\varrho_\alpha) \tag{28}$$

ist also auf allen reellen Zahlen s in der Basisdarstellung

$$s = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha \varrho_\alpha \qquad (r_\alpha \text{ rational})$$

eine Lösung von (8) gegeben. (28) kann den Wert ϱ_0 für kein s annehmen, weil das $\varrho_0 \in H$ widersprechen würde. Damit ist (26) klar. Es sei $s_1 \neq s_2$ und

$$s_1 = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha^{(1)} \varrho_\alpha \quad s_2 = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha^{(2)} \varrho_\alpha, \tag{29}$$

dann folgt aus

$$\varphi(s_1) = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha^{(1)} \varphi(\varrho_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha^{(2)} \varphi(\varrho_\alpha) = \varphi(s_2)$$

für die Koeffizienten $r_\alpha^{(1)} = r_\alpha^{(2)}$, weil die $\varphi(\varrho_\alpha)$ in H' und also in einer Hamelbasis (nämlich in H) liegen, weshalb Koeffizientenvergleich möglich ist. Daraus folgt aber mit (29) $s_1 = s_2$, entgegen der Annahme, womit auch (27) gezeigt ist.

Ist $\bar{G} = \{\bar{f}^{[s]}\}$ eine monotone Iterationsgruppe, so kann insbesondere mit der durch Satz 4. 1 gegebenen Funktion φ eine monotonisierbare Iterationsgruppe $G = \{f^{[s]}\}$ definiert werden durch $f^{[s]} = \bar{f}^{[\varphi(s)]}$. Wegen (26) ist dann $\bar{f}^{[\varrho_0]} \notin G$, so daß G den 1. Quadranten nicht überdeckt, aber wegen (27) folgt aus $s_1 \neq s_2$ stets $f^{[s_1]} \neq f^{[s_2]}$. Also kann daraus, daß eine monotonisierbare Iterationsgruppe G den 1. Quadranten des E_2 nicht überdeckt, nicht geschlossen werden, daß in G Elemente mit Vielfachheit vorkommen *müssen*.

5. Strukturbeziehungen zwischen monotonen und monotonisierbaren Iterationsgruppen. In Satz 2. 1 hat sich ergeben, daß der Prozeß der Monotonisierung nicht eindeutig ist, aber es konnte die Klasse aller monotonen Gruppen angegeben werden, die zu einer festen monotonisierbaren Gruppe gehören. Unter Benutzung von Satz 3. 4 kann nun umgekehrt zu jeder monotonen Iterationsgruppe $\bar{G}$ die Klasse aller monotonisierbaren Iterationsgruppen angegeben werden, die $\bar{G}$ als Monotonisierung besitzen.

Satz 5. 1. *Ist $\bar{G} = \{\bar{f}^{[s]}\}$ eine Monotonisierung von $G_1 = \{f_1^{[s]}\}$, so ist $\bar{G}$ genau dann eine Monotonisierung auch von $G_2 = \{f_2^{[s]}\}$, wenn für je zwei Elemente $f_1^{[s]} \in G_1$,*

*) Den Hinweis auf diese Fragestellung verdankt Verf. Herrn E. Vincze (Miskolc).

$f_2^{[t]} \in G_2$ *stets genau eine der Relationen*

$$f_1^{[s]} < f_2^{[t]},\ f_1^{[s]} = f_2^{[t]},\ f_1^{[s]} > f_2^{[t]} \quad \textit{gilt.} \tag{30}$$

Beweis. 1. Es sei $\bar{G}$ eine Monotonisierung auch von G_2. Dann ist $G_1 \cup G_2 \subset \bar{G}$ und (30) ist erfüllt, weil $\bar{G}$ schlicht ist.

2. Es sei (30) gültig und

$$\bar{f}^{[s]}(x) = \inf \{ f_1^{[r\varrho_1]}(x) : s < r\varrho_1 \},\ x \in [0, \infty),$$

die Darstellung von $\bar{G}$ als Monotonisierung von G_1. Ist weiter $f_2^{[\varrho_2]} > e$ (ein solches Element liegt nach (4) in G_2), so ist eine Monotonisierung $\bar{\bar{G}} = \{\bar{\bar{f}}^{[s]}\}$ gegeben durch

$$\bar{\bar{f}}^{[s]}(x) = \inf \{ f_2^{[r\varrho_2]}(x) : s < r\varrho_2 \},\ x \in [0, \infty).$$

Da aber G_1 dicht ist, so muß wegen (30) ein $s_2 > 0$ mit

$$f_2^{[\varrho_2]} = \bar{f}^{[s_2]}$$

existieren, also ist

$$\bar{\bar{f}}^{[\varrho_2]} = \bar{f}^{[s_2]}. \tag{31}$$

Daraus ergibt sich für alle rationalen Iterierten

$$\bar{\bar{f}}^{[r\varrho_2]} = \bar{f}^{[rs_2]}. \tag{32}$$

Aus (30) folgt nämlich, daß neben (32) nur $\bar{\bar{f}}^{[r\varrho_2]} \gtrless \bar{f}^{[rs_2]}$ möglich ist. Aber aus $\bar{\bar{f}}^{[r\varrho_2]} < \bar{f}^{[rs_2]}$ folgt z. B. mit $r = m/n$

$$(\bar{\bar{f}}^{[\varrho_2]})^m < (\bar{f}^{[s_2]})^m,$$

was mit (31) unvereinbar ist und wegen der Stetigkeit der Monotonisierungen erhält man aus (32) $\bar{\bar{f}}^{[\varrho_2 s/s_2]} = \bar{f}^{[s]}$. Also geht $\bar{\bar{G}}$ in $\bar{G}$ über, wenn man die Indizes s durch $\varrho_2 s/s_2$ ersetzt und damit ist gezeigt, daß $\bar{G}$ auch eine Monotonisierung von G_2 ist.

Zusammen mit Satz 2.1 ergibt dieser Satz den folgenden Zusammenhang zwischen monotonen und monotonisierbaren Iterationsgruppen: Nennt man in der Menge $\bar{M}$ der monotonen Iterationsgruppen zwei Gruppen $\bar{G}, \bar{\bar{G}}$ genau dann äquivalent, wenn (9) gilt und nennt man andererseits in der Menge M der monotonisierbaren Iterationsgruppen zwei Gruppen G_1, G_2 genau dann äquivalent, wenn (30) gilt, so kann man die Monotonisierung auffassen als eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Äquivalenzklassen von M auf die Äquivalenzklassen von $\bar{M}$.

Literatur

[1] Aczél, J., Kalmár, L. und Mikusiński, J. G., Sur l'équation de translation, *Studia Math.* **12** (1951), 112–116.

[2] Berg, L., Unstetige, monotone Iterationsgruppen reeller Funktionen, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 47–56.

[3] Hamel, G., Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Ann.* **60** (1905), 459–462.

[4] Michel, H., Untersuchungen über stetige, monotone Iterationsgruppen reeller Funktionen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 13–46.

(Eingegangen am 29. Juni 1962.)