Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, II*

Von E. VINCZE (Miskolc)

Mit der im ersten Teil ausgeführten Methode kann man auch die wichtigen und viel behandelten Funktionalgleichungen

$$C(z_1+z_2) = C(z_1)\,C(z_2) - S(z_1)\,S(z_2),$$
$$S(z_1+z_2) = S(z_1)\,C(z_2) + S(z_2)\,C(z_1)$$

der trigonometrischen Funktionen bzw. deren Verallgemeinerungen einzeln behandeln. Bezüglich der Literatur dieser Funktionalgleichungen weisen wir nur auf die Arbeiten [23], [26], [24], [22], [21], [25], [2], [1] und [19] hin, die vielleicht die wichtigsten sind. In [1] bzw. [19] kann man die (fast) vollständige Literatur dieser Funktionalgleichungen finden.

§ 4. Die Cosinus-Funktionalgleichung

Wir betrachten jetzt die Funktionalgleichung

$$C(z_1 * z_2) = C(z_1)\,C(z_2) - S(z_1)\,S(z_2) \tag{4. 1}$$
$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ C(z), S(z)\colon Q_0 \to Q],$$

die man oft die Cosinus-Funktionalgleichung nennt. Q_0 *ist eine beliebige abelsche Gruppe mit der Operation* $z_1 * z_2$, *also hat sie auch die folgende Eigenschaft: es gibt ein solches Element* a *in* Q_0, *bei dem die Gleichung* $a * z = \zeta$ *für alle* ζ *eine Lösung hat. Weiter ist* Q *eine beliebige Menge von komplexen Zahlen.*

Die Lösungen der Funktionalgleichung (4. 1) werden durch den folgenden Satz angegeben:

Satz 4. *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf* Q_0 *geltenden Funktionalgleichung* (4. 1) *sind die folgenden Funktionen und nur sie:*

$$(\mathrm{c}_1)\qquad C(z) = \frac{1}{2\beta}\,[(\alpha+\beta)\psi_2(z) - (\alpha-\beta)\psi_1(z)],\qquad S(z) = \frac{1}{2\beta}\,[\psi_1(z) - \psi_2(z)],$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = 1,\ \beta \neq 0;$$

$$(\mathrm{c}_2)\qquad C(z) = \psi(z)[1 \pm \varphi(z)],\qquad S(z) = \psi(z)\varphi(z);$$

* Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der in *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 149–163 erschienenen Mitteilung. Die Numerierung der Formeln, Sätzen und Literaturangaben ist fortlaufend.

wobei $\varphi(z)$ bzw. $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ und $\psi(z)$ beliebige den Cauchyschen Funktionalgleichungen

(4. 2) $$\varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2),$$

(4. 3) $$\psi(z_1 * z_2) = \psi(z_1)\psi(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ \varphi(z), \psi(z): Q_0 \to Q]$$

genügende komplexe Funktionen bezeichnen und α, β beliebige komplexe Konstanten sind, mit den obigen Einschränkungen. Es gibt keine andere Lösung.

Beweis. Wir können uns leicht überzeugen, daß die Lösungen $(c_1)-(c_2)$ mit den obigen Einschränkungen für die Konstanten (und nur mit diesen) die Funktionalgleichung (4. 1) tatsächlich erfüllen. Des weiteren müssen wir also nur zeigen, daß die Lösungen von (4. 1) alle der Gestalt (c_1) oder (c_2) sind.

Verwenden wir die Gleichung (4. 1) für $z_1 * \zeta * z_2$ und nützen wir die Assoziativität der Operation $z_1 * z_2$ aus, so erhalten wir

$$C(z_1 * \zeta * z_2) = C(z_1 * \zeta)\, C(z_2) - S(z_1 * \zeta)\, S(z_2) =$$
$$= C(\zeta * z_2)\, C(z_1) - S(\zeta * z_2)\, S(z_1),$$

woraus sich wegen $\zeta * z_2 = z_2 * \zeta$

$$\begin{vmatrix} C(z_1 * \zeta) & C(z_1) \\ C(z_2 * \zeta) & C(z_2) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S(z_1 * \zeta) & S(z_1) \\ S(z_2 * \zeta) & S(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

ergibt. Mit den vorigen Bezeichnungen (vgl. § 1.) können wir diese Gleichung in die Gestalt

(4. 4) $$\Delta[C(z_1 * \zeta), C(z_2)] - \Delta[S(z_1 * \zeta), S(z_2)] = 0$$

schreiben. „Erweitern" wir diese Gleichung mit $C(z_3)$, dann folgt

$$\Delta[S(z_1 * \zeta), S(z_2), C(z_3)] = 0,$$

die nach § 1. 4. nur in den Fällen

A.

(4. 5) $$C(z) \equiv 0,$$

B.

(4. 6) $$S(z) = \beta_1 C(z) \qquad (\beta_1 = \text{konst.}),$$

oder

C.

(4. 7) $$S(z * \zeta) = M_1(\zeta)\, S(z) + M_2(\zeta)\, C(z)$$

erfüllt ist.

A. Setzen wir die Funktion (4. 5) in die Gleichung (4. 1) ein, dann folgt

$$S(z_1)\, S(z_2) = 0,$$

also ist $S(z) \equiv 0$. Dieses triviale Lösungspaar $C(z) \equiv S(z) \equiv 0$ enthalten die Lösungen $(c_1)-(c_2)$ in den Fällen $\psi_1(z) \equiv \psi_2(z) \equiv 0$ bzw. $\psi(z) \equiv 0$. Damit ist der Fall **A** erledigt.

B. Im Falle (4. 6) erhalten wir aus (4. 1) die Pexidersche Funktionalgleichung

$$C(z_1 * z_2) = (1-\beta_1^2) C(z_1) C(z_2). \tag{4. 8}$$

Da wir den trivialen Fall $C(z) \equiv 0$ in **A** schon behandelt haben, können wir voraussetzen, daß $1-\beta_1^2 \neq 0$ ist. Dann folgt aus (4. 8)

$$C(z) = \frac{1}{1-\beta_1^2} \psi_1(z)$$

(vgl. [20]), wobei $\psi_1(z)$ eine beliebige der Cauchyschen Funktionalgleichung (4. 3) genügende komplexe Funktion ist.[1]) Weiter ist aus der Gleichung (4. 6)

$$S(z) = \frac{\beta_1}{1-\beta_1^2} \psi_1(z).$$

Mit den Spezialisierungen

$$\psi_2(z) \equiv 0, \quad \alpha = -\frac{1+\beta_1^2}{2\beta_1}, \quad \beta = \frac{1-\beta_1^2}{2\beta_1}$$

ist dieses vorige Lösungspaar in der Lösung (c_1) enthalten, und auch die Bedingungen $\alpha^2-\beta^2 = 1$, $\beta \neq 0$ sind erfüllt. Damit ist der Fall **B** erledigt.

Wir betonen, daß die Gleichungen (4. 5) und (4. 6) die lineare Abhängigkeit der Funktionen $C(z)$ und $S(z)$ bedeuten, also können wir im weiteren voraussetzen, daß die Funktionen $S(z)$, $C(z)$ *voneinander linear unabhängig* sind.

C. In der Gleichung (4. 7) nützen wir zuerst die Symmetrie der linken Seite aus, so ergibt sich die Gleichung

$$\Delta(M_1, S) + \Delta(M_2, C) = 0. \tag{4. 9}$$

„Erweitern" wir sie mit C, dann folgt

$$\Delta(M_1, S, C) = 0.$$

Diese Gleichung ist nur im Falle

$$M_1(z) = \beta_1 S(z) + \beta_2 C(z) \tag{4. 10}$$

$$(\beta_1, \beta_2 = \text{konst.})$$

erfüllt, da die Funktionen S und C schon als voneinander linear unabhängig vorausgesetzt sind.

Setzen wir die Funktion (4. 10) in (4. 9) ein:

$$\Delta(\beta_1 S + \beta_2 C, S) + \Delta(M_2, C) = \Delta(\beta_2 C, S) + \Delta(M_2, C) =$$
$$= \Delta(-\beta_2 S, C) + \Delta(M_2, C) = \Delta(M_2 - \beta_2 S, C) = 0,$$

[1]) Wir betonen, daß die Eigenschaft der Menge Q_0 bezüglich der Lösbarkeit der Gleichung $a * z = \zeta$ *nur* bei der Lösung der Pexiderschen Gleichung (4. 8) ausgenützt wurde. Wenn diese Gleichung unter schwächeren Bedingungen auflösbar wäre, können wir den Satz 4 auch in allgemeinerer Form behaupten und beweisen.

also ist wegen $C(z) \not\equiv 0$

$$M_2(z) - \beta_2 S(z) = \beta_3 C(z) \qquad (\beta_3 = \text{konst.}). \tag{4. 11}$$

Mit den Funktionen (4. 10) und (4. 11) ergibt sich aus (4. 7)

$$\begin{aligned} S(z_1 * z_2) = \beta_1 S(z_1)\, S(z_2) + \beta_2 S(z_1)\, C(z_2) + \beta_2 S(z_2)\, C(z_1) + \\ + \beta_3 C(z_1)\, C(z_2). \end{aligned} \tag{4. 12}$$

Um für die Konstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ weitere Einschränkungen zu erhalten, setzen wir die Formeln (4. 1) und (4. 12) in (4. 4) ein:

$$\begin{aligned} &\Delta[C(z_1)\, C(\zeta) - S(z_1)\, S(\zeta),\, C(z_2)] - \\ &- \Delta[\beta_1 S(z_1)\, S(\zeta) + \beta_2 S(z_1)\, C(\zeta) + \beta_2 S(\zeta)\, C(z_1) + \beta_3 C(z_1)\, C(\zeta),\, S(z_2)] = \\ &= C(\zeta)\, \Delta[C(z_1),\, C(z_2)] - S(\zeta)\, \Delta[S(z_1),\, C(z_2)] - \\ &- \beta_1 S(\zeta)\, \Delta[S(z_1),\, S(z_2)] - \beta_2 C(\zeta)\, \Delta[S(z_1),\, S(z_2)] - \\ &- \beta_2 S(\zeta)\, \Delta[C(z_1),\, S(z_2)] - \beta_3 C(\zeta)\, \Delta[C(z_1),\, S(z_2)] = \\ &= [(1-\beta_2)\, S(\zeta) - \beta_3 C(\zeta)]\, \Delta[C(z_1),\, S(z_2)] = 0. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $C(z)$ und $S(z)$ folgt

$$\Delta[C(z_1),\, S(z_2)] \not\equiv 0,$$

d. h. es gilt

$$(1-\beta_2)\, S(\zeta) - \beta_3 C(\zeta) \equiv 0,$$

woraus sich wieder wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $C(z)$ und $S(z)$

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0$$

ergeben. Die Gleichung (4. 12) vereinfacht sich also auf

$$S(z_1 * z_2) = \beta_1 S(z_1) S(z_2) + S(z_1) C(z_2) + S(z_2) C(z_1). \tag{4. 13}$$

Jetzt wollen wir aus (4. 13) und (4. 1) ein Cauchysches Gleichungspaar der Gestalt

$$\begin{cases} C(z_1 * z_2) + \delta_1 S(z_1 * z_2) = [C(z_1) + \delta_1 S(z_1)][C(z_2) + \delta_1 S(z_2)], \\ C(z_1 * z_2) + \delta_2 S(z_1 * z_2) = [C(z_1) + \delta_2 S(z_1)][C(z_2) + \delta_2 S(z_2)] \end{cases} \tag{4. 14}$$

erhalten, worin $\delta_1 \neq \delta_2$ ist. Um dies zu erreichen, bilden wir auf Grund von (4. 1) und (4. 13) den Ausdruck

$$C(z_1 * z_2) + (\beta_1 + \gamma)\, S(z_1 * z_2)$$

und wählen wir dann den Wert γ so, daß die entstehende Gleichung eben der Gestalt

(4. 14) sei:

$$C(z_1 * z_2) + (\beta_1 + \gamma) S(z_1 * z_2) = \\ = [C(z_1) + (\beta_1 + \gamma) S(z_1)][C(z_2) + (\beta_1 + \gamma) S(z_2)]. \tag{4. 15}$$

Schreiben wir beide Seiten ausführlich aus, so ergibt sich

$$[C(z_1) + (\beta_1 + \gamma) S(z_1)][C(z_2) + (\beta_1 + \gamma) S(z_2)] = \\ = C(z_1) C(z_2) - S(z_1) S(z_2) + (\beta_1 + \gamma)\beta_1 S(z_1) S(z_2) + \\ + (\beta_1 + \gamma) S(z_1) C(z_2) + (\beta_1 + \gamma) S(z_2) C(z_1),$$

also muss

$$[(\beta_1 + \gamma)^2 - (\beta_1 + \gamma)\beta_1 + 1] S(z_1) S(z_2) \equiv 0$$

sein. Wegen $S(z) \not\equiv 0$ ist das nur dann möglich, falls

$$\gamma^2 + \beta_1 \gamma + 1 = 0 \tag{4. 16}$$

gilt, wo man die folgende zwei Unterfälle unterscheiden muss:

C. 1.

$$\beta_1^2 - 4 \neq 0, \tag{4. 17}$$

C. 2.

$$\beta_1^2 - 4 = 0. \tag{4. 18}$$

C. 1. Das Cauchysche Gleichungspaar (4. 14) können wir dann und nur dann erhalten, wenn die Gleichung (4. 16) für γ *zwei verschiedene* Lösungen hat, also falls (4. 17) besteht. Dann ist

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4}\right]$$

und folglich

$$\begin{cases} \delta_1 = \beta_1 + \gamma_1 = \dfrac{1}{2}\left[\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4}\right], \\ \delta_2 = \beta_1 + \gamma_2 = \dfrac{1}{2}\left[\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4}\right]. \end{cases} \tag{4. 19}$$

Jetzt führen wir in (4. 14) die Bezeichnungen

$$\psi_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} C(z) + \delta_1 S(z),$$
$$\psi_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} C(z) + \delta_2 S(z)$$

ein, wobei die Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ der Cauchyschen Gleichung (4. 3) genügen. So erhalten wir das folgende Lösungspaar:

$$C(z) = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}[\delta_1 \psi_2(z) - \delta_2 \psi_1(z)], \qquad S(z) = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}[\psi_1(z) - \psi_2(z)],$$
$$\delta_1 \neq \delta_2.$$

Wegen (4. 19) sind diese Lösungen tatsächlich der Gestalt (c_1). Damit ist der Fall **C. 1.** erledigt.

C. 2. Jetzt betrachten wir die Gleichung (4. 18), als eben $\beta_1 = \pm 2$ ist. Das sind im wesentlichen zwei verschiedene Unterfälle, aber trotzdem können wir diese gleichzeitig behandeln.

Natürlich besteht die Gleichung (4. 15) auch jetzt und da

$$\beta_1 + \gamma = \beta_1 - \frac{1}{2}\beta_1 = \pm 1$$

gilt, können wir statt (4. 15) die Gleichung

$$C(z_1 * z_2) \pm S(z_1 * z_2) = [C(z_1) \pm S(z_1)][C(z_2) \pm S(z_2)]$$

schreiben. Also erfüllt

$$\psi(z) \overset{\text{def}}{=} C(z) \pm S(z) \tag{4. 20}$$

die Cauchysche Gleichung (4. 3). Diese Bezeichnung und $\beta_1 = \pm 2$ vereinfachen die Gleichung (4. 13):

$$\begin{cases} S(z_1 * z_2) = \pm 2S(z_1)S(z_2) + S(z_1)[\psi(z_2) \mp S(z_2)] + \\ + S(z_2)[\psi(z_1) \mp S(z_1)] = S(z_1)\psi(z_2) + S(z_2)\psi(z_1). \end{cases} \tag{4. 21}$$

Wir können jetzt voraussetzen, daß $\psi(z) \neq 0$ für alle z besteht. Im Gegenfalle, wie das bekannt ist,[2] wäre $\psi(z) \equiv 0$ wegen $\psi(z_0) = 0$, was laut (4. 20) eben die lineare Abhängigkeit der Funktionen $C(z)$ und $S(z)$ bedeuten würde, aber im vorigen haben wir diesen Fall ausgeschlossen. So kann man in (4. 21) mit

$$\psi(z_1 * z_2) = \psi(z_1)\psi(z_2) \neq 0$$

dividieren. Dadurch ergibt sich die Cauchysche Gleichung

$$\frac{S(z_1 * z_2)}{\psi(z_1 * z_2)} = \frac{S(z_1)}{\psi(z_1)} + \frac{S(z_2)}{\psi(z_2)}$$

der Gestalt (4. 2). Führen wir jetzt die Bezeichnung

$$\varphi(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{S(z)}{\psi(z)}$$

ein [vgl. (4. 2)] und betrachten auch (4. 20), so folgt das Lösungspaar

$$S(z) = \psi(z)\varphi(z),$$
$$C(z) = \psi(z)[1 \pm \varphi(z)],$$

das tatsächlich der Gestalt (c_2) ist.

Damit ist der Fall **C. 2.** erledigt und auch der Beweis ist vollendet.

---

[2]) Das folgt eben aus der Gruppeneigenschaft von Q_0. Es sei noch bemerkt, daß wir die Gruppeneigenschaft *nur hier* ausnützen müssen.

§ 5. Die Sinus-Funktionalgleichung

Als eine weitere Verwendung dieser Methode behandeln wir auch die Lösung der Funktionalgleichung

$$S(z_1 * z_2) = S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1) \tag{5. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ S(z),\ C(z)\colon Q_0 \to Q],$$

die man oft die Sinus-Funktionalgleichung nennt. Die Bezeichnungen und die Bedingungen sind die vorigen (vgl. § 4.).

Es gilt der folgende

Satz 5. *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf Q_0 geltenden Funktionalgleichung* (5. 1) *sind die folgenden Funktionen und nur sie:*

(d_1)
$$S(z) \equiv 0,$$
$$C(z) \text{ eine beliebige komplexe Funktion;}$$

(d_2)
$$S(z) = \psi(z)\varphi(z),$$
$$C(z) = \psi(z);$$

(d_3)
$$S(z) = \alpha\,[\psi_1(z) - \psi_2(z)],$$
$$C(z) = \frac{1}{2}\,[\psi_1(z) + \psi_2(z)];$$

wobei $\varphi(z)$ bzw. $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ beliebige den Cauchyschen Funktionalgleichungen (4. 2) *und* (4. 3) *genügende komplexe Funktionen bezeichnen und α eine beliebige komplexe Konstante ist. Es gibt keine andere Lösung.*

Beweis. Die Funktionen $(d_1)-(d_3)$ sind tatsächlich Lösungen; wir haben also nur zu beweisen, daß die Lösungen von (5. 1) alle von der Gestalt (d_1)—(d_3) sind.

Verwenden wir die Gleichung (5. 1) für $z_1 * \zeta * z_2$ und nützen wir die Assoziativität und Kommutativität der Operation $z_1 * z_2$ aus, so erhalten wir die Gleichung

$$S(z_1 * \zeta * z_2) = S(z_1 * \zeta)C(z_2) + S(z_2)C(z_1 * \zeta) =$$
$$= S(z_1)C(z_2 * \zeta) + S(z_2 * \zeta)C(z_1),$$

d. h. mit der von uns gebrauchten Bezeichnung ergibt sich

$$\Delta[S(z_1 * \zeta),\ C(z_2)] + \Delta[C(z_1 * \zeta),\ S(z_2)] = 0. \tag{5. 2}$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit $C(z_3)$, so folgt

$$\Delta[C(z_1 * \zeta),\ S(z_2),\ C(z_3)] = 0,$$

was mit der Gleichung

$$\Delta[C(z_1 * \zeta),\ C(z_2),\ S(z_3)] = 0$$

equivalent ist. Diese Gleichung ist nur in den folgenden Fällen erfüllt:

A.

(5. 3) $$S(z) \equiv 0,$$

B.

(5. 4) $$C(z) = \beta_1 S(z) \qquad (\beta_1 = \text{konst.})$$

C.

(5. 5) $$C(z_1 * \zeta) = M_1(\zeta) S(z_1) + M_2(\zeta) C(z_1).$$

A. Im Falle (5. 3) ist auch eine beliebige komplexe Funktion $C(z)$ mit $S(z) \equiv 0$ ein Lösungspaar von (5. 1). Das liefert eben die Lösung (d_1). Im weiteren können wir also voraussetzen, daß $S(z) \not\equiv 0$ ist.

B. Falls (5. 4) erfüllt ist, so folgt die Pexidersche Gleichung

(5. 6) $$S(z_1 * z_2) = 2\beta_1 S(z_1) S(z_2)$$

aus (5. 1). Es ist klar, daß $\beta_1 \neq 0$ wegen $S(z) \not\equiv 0$ ist (vgl. [20]), also ist die Lösung von (5. 6)

$$S(z) = \frac{1}{2\beta_1} \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ eine der Cauchyschen Gleichung (4. 3) genügende komplexe Funktion ist.[3]) Weiter ist aus (5. 4)

$$C(z) = \frac{1}{2} \psi(z).$$

Die Lösung (d_3) enthält auch dieses Lösungssystem, und zwar im Falle $\psi_2(z) \equiv 0$.

Damit ist auch der Fall **B** erledigt. Auch hier betonen wir, daß die Gleichungen (5. 3) und (5. 4) eben die lineare Abhängigkeit der Funktionen $S(z)$ und $C(z)$ bedeuten. Im weiteren können wir diese Fälle außer acht lassen.

C. Bei der Gleichung (5. 5) nützen wir zuerst die Kommutativität der linken Seite aus und ähnlich wie vorher erhalten wir die Gleichung

(5. 7) $$\Delta(M_1, S) + \Delta(M_2, C) = 0.$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit S, so ergibt sich

$$\Delta(M_2, C, S) = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $S(z)$ und $C(z)$ besteht diese Gleichung nur im Falle

(5. 8) $$M_2(z) = \beta_1 C(z) + \beta_2 S(z)$$

$$(\beta_1, \beta_2 = \text{konst.}).$$

---

[3]) Die Fußnote 1) bezüglich der Pexiderschen Gleichung (5. 6) ist auch hier unverändert gültig.

Setzen wir diese Funktion in (5. 7) ein, dann folgt

$$\Delta(M_1, S)+\Delta(\beta_1 C+\beta_2 S, C) = \Delta(M_1, S)+\Delta(\beta_2 S, C) =$$
$$= \Delta(M_1, S)+\Delta(-\beta_2 C, S) = \Delta(M_1-\beta_2 C, S) = 0,$$

woraus sich wegen $S(z)\not\equiv 0$

$$M_1(z)-\beta_2 C(z) = \beta_3^2 S(z) \qquad (\beta_3 = \text{konst.}) \tag{5. 9}$$

ergibt. Mit den Funktionen (5. 8) und (5. 9) erhalten wir aus (5. 5) die Gleichung

$$C(z_1 * z_2) = \beta_1 C(z_1)C(z_2)+\beta_2 S(z_1)C(z_2)+ \\ +\beta_2 S(z_2)C(z_1)+\beta_3^2 S(z_1)S(z_2). \tag{5. 10}$$

Um für die Konstanten β_1, β_2, β_3 weitere Einschränkungen zu erhalten, setzen wir die Funktionen (5. 1) und (5. 10) in (5. 2) ein:

$$\Delta[S(z_1)C(\zeta)+S(\zeta)C(z_1), C(z_2)]+$$
$$+\Delta[\beta_1 C(z_1)C(\zeta)+\beta_2 S(z_1)C(\zeta)+\beta_2 S(\zeta)C(z_1)+\beta_3^2 S(z_1)S(\zeta), S(z_2)] =$$
$$= C(\zeta)\Delta[S(z_1), C(z_2)]+S(\zeta)\Delta[C(z_1), C(z_2)]+$$
$$+\beta_1 C(\zeta)\Delta[C(z_1), S(z_2)]+\beta_2 C(\zeta)\Delta[S(z_1), S(z_2)]+$$
$$+\beta_2 S(\zeta)\Delta[C(z_1), S(z_2)]+\beta_3^2 S(\zeta)\Delta[S(z_1), S(z_2)] =$$
$$= [(1-\beta_1)C(\zeta)-\beta_2 S(\zeta)]\Delta[S(z_1), C(z_2)] = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $S(z)$ und $C(z)$ besteht diese Gleichung nur im Falle

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0.$$

Damit ergibt sich aus (5. 10)

$$C(z_1 * z_2) = C(z_1)C(z_2)+\beta_3^2 S(z_1)S(z_2). \tag{5. 11}$$

Jetzt unterscheiden wir folgende zwei Unterfälle:

C. 1.

$$\beta_3 = 0, \tag{5. 12}$$

C. 2.

$$\beta_3 \neq 0. \tag{5. 13}$$

C. 1. Falls (5. 12) besteht, ist die Lösung von (5. 11)

$$C(z) = \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ eine der Cauchyschen Gleichung (4. 3) genügende komplexe Funktion ist. Damit erhalten wir aus (5. 1) die Gleichung

$$S(z_1 * z_2) = S(z_1)\psi(z_2)+S(z_2)\psi(z_1),$$

die eben der Gestalt (4. 21) ist, also können wir sie auf dieselbe Weise lösen. Die Lösung ist auch hier

$$S(z) = \psi(z)\, q(z),$$

wo $q(z)$ der Cauchyschen Gleichung (4. 2) genügt. Dieses Lösungssystem ist tatsächlich der Form (d_2), womit der Fall **C. 1** erledigt ist.

C. 2. Schließlich können wir im Falle (5. 13) auf Grund (5. 1) und (5. 11) die folgenden voneinander unabhängigen Cauchyschen Gleichungen der Gestalt (4. 3) aufschreiben:

$$(5.\ 14)\qquad \begin{cases} C(z_1 * z_2) + \beta_3 S(z_1 * z_2) = [C(z_1) + \beta_3 S(z_1)][C(z_2) + \beta_3 S(z_2)], \\ C(z_1 * z_2) - \beta_3 S(z_1 * z_2) = [C(z_1) - \beta_3 S(z_1)][C(z_2) - \beta_3 S(z_2)]. \end{cases}$$

Führen wir hier die Bezeichnungen

$$\psi_1(z) \overset{\text{def}}{=} C(z) + \beta_3 S(z),$$
$$\psi_2(z) \overset{\text{def}}{=} C(z) - \beta_3 S(z)$$

ein, so erhalten wir das Funktionspaar

$$S(z) = \frac{1}{2\beta_3}[\psi_1(z) - \psi_2(z)],$$

$$C(z) = \frac{1}{2}[\psi_1(z) + \psi_2(z)].$$

Diese sind tatsächlich Lösungen der Gestalt (d_3).

Damit ist der Beweis des Satzes 5 vollendet.

Literatur

[21] J. G. VAN DER CORPUT, Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaalbetrekking, I—II., *Euclides*, **17** (1940), 55—75.

[22] J. C. H. GERRETSEN, De karakteriseering van de goniometrische functies door middel van een funktionaalbetrekking, *Euclides*, **16** (1939), 92—99.

[23] W. F. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie, (2. Aufl.), *Leipzig*, 1912.

[24] O. PERRON, Über Additions- und Subtraktionstheoreme, *Archiew Math. Phys.*, (3) **28** (1919—20), 97—100.

[25] L. VIETORIS, Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen, *Journal für reine und angew. Math.* **186** (1944), 1—15.

[26] W. H. WILSON, On Certain Related Functional Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **26** (1919—20), 300—312.

(Eingegangen am 17. Juli 1962.)