Decomposition d'une collineation de l'espace P_n en produit de perspectives ou en produit d'homologies centrales application aux matrices

Par NGUYỄN CẢNH TOÀN (Vietnam)

Dans cet article nous étudions la décomposition d'une collinéation de l'espace projectif à n dimensions P_n en produit de perspectives ou en produit d'homologies centrales.

Pour faciliter l'exposé, dans le cas où aucune ambiguïté n'est pas à craindre, nous ne distinguerons pas un espace de son support.

Théorème 1. *Si deux hyperplans de l'espace P_n sont en relation collinéaire telle que sur leur intersection il y ait un ensemble de points doubles remplissant un m — plan, alors cette relation collinéaire est décomposable en un produit de $n-m-1$ perspectives. Dans le cas où les deux hyperplans coincident, le nombre de perspectives sera $n-m$.*

Théorème 2. *En général, une collinéation de l'espace P_n est décomposable d'une manière unique en un produit de $n+1$ homologies centrales dont les centres sont respectivement les sommets $O_1, O_2, \ldots, O_n, O_{n+1}$ d'un simplexe donné rangés suivant un ordre déterminé. Pour que cette décomposition soit possible, il faut et il suffit que, pour toute valeur entière de m, de 1 jusquà n inclus, les images des points $O_1, O_2, \ldots, O_m$ définissent avec les points $O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_{n+1}$ un simplexe.*

En appliquant cette proposition aux matrices, nous obtenons le résultat suivant

Théorème 3. *Toute matrice carrée régulière d'ordre n dont toutes les sous matrices carrées situées en haut et à gauche sont aussi régulières est décomposable d'une manière unique en un produit de n matrices où le i-ième facteur (en comptant de droite à gauche) est une matrice qui différe de la matrice — unité seulement par la i-ième ligne; les éléments a_i^K $(K=1, 2, \ldots, n)$ de cette i-ième ligne constituent la solution du système d'équastions linéaires:*

$$\begin{cases} \sum_{K=1}^{i-1} b_K^j a_i^K = b_i^j & (j=1, 2, \ldots, i-1) \\ \sum_{K=1}^{i-1} b_K^j a_i^K + a_i^j = b_i^j & (j=i, i+1, \ldots, n) \end{cases}$$

où b_i^j est l'élément situé sur la i-ième ligne et sur la j-ième colonne de la matrice donnée.

Pour démontrer ces théorèmes, nous allons d'abord généraliser le théorème de Desargues sur les triangles homologiques.

Théorème 4. *Etant donnés dans l'espace P_n deux simplexes ayant respectivement comme sommets A_i et A'_i $(i=1,2,\ldots,n+1)$ et comme hyperfaces opposées à ces sommets a_i et a'_i. Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite, alors l'autre le sera aussi:*

10) *les droites $A_iA'_i$ sont concourantes.*

20) *les $(n-2)$-plans d'intersection des hyperplans a_i, a'_i sont cohyperplanaires.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.

Supposons que les droites $A_iA'_i$ concourent en un point E. Prenons le simplexe (A_i) comme simplexe de coordonnées projectives et le point E comme point-unité. Les indices des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont choisis de manière que l'hyperplan a_i ait pour équation $x_i=0$. Dans ce cas le système d'équations de la droite EA_i sera:

$$x_1=x_2=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_{n+1}.$$

Le point A'_i qui se trouve sur la droite EA_i aura pour coordonnées $(1, 1, \ldots, 1, h_i, 1, \ldots, 1)$, h_i étant la i-ième coordonnée (toutes les autres coordonnées sont égales à 1). Nous désignerons par H la matrice des coordonnées des $n+1$ points A'_i:

$$H=\begin{Vmatrix} h_1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & h_2 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h_3 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & h_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & h_{n+1} \end{Vmatrix}$$

(A'_i) étant un simplexe, le rang de H est égal à $n+1$.

Les coordonnées u_i^p $(p=1,2,\ldots,n+1)$ de l'hyperplan a'_i vérifient un système de n équations linéaires homogènes à $n+1$ inconnues dont la matrice H_i est obtenue de la matrice H par barrement de la i-ième ligne. Le rang de H étant égal à $n+1$, celui de H_i sera égal à n. Le système d'équations en u_i^p admet donc la solution:

$$Ku_i^p=(-1)^p|H_i^p|,$$

où K est un coefficient de proportionalité non nul et $|H_i^p|$, le déterminant obtenu en barrant la p-ième colonne de la matrice H_i. K étant arbitraire, nous pouvons aussi écrire:

$$Ku_i^p=(-1)^{i+p}|H_i^p|;$$

de cette façon le deuxième membre devient le complément algébrique de l'élément situé sur la i-ième ligne et la p-ième colonne du déterminant de la matrice H; nous le désignerons par D_i^p:

$$Ku_i^p=D_i^p.$$

De même les coordonnées u_j^q de l'hyperplan a'_j seront:

$$Ku_j^q=D_j^q.$$

Les $(n-2)$-plans $a_i \times a'_i$ et $a_j \times a'_j$ ont respectivement comme systèmes d'équations:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = 0 \\ \sum_{p=1}^{n+1} D_i^p x_p = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad \begin{cases} x_j = 0 \\ \sum_{q=1}^{n+1} D_j^q x_q = 0. \end{cases}$$

Pour que ces $(n-2)$-plans soient cohyperplanaires, il faut et il suffit que la matrice du système des quatre équations (1) et (2) ait un rang plus petit que 4. Cette matrice est la suivante:

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ D_i^1 & D_i^2 & \dots & D_i^{i-1} & D_i^i & D_i^{i+1} & \dots & D_i^{j-1} & D_i^j & D_i^{j+1} & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ D_j^1 & D_j^2 & \dots & D_j^{i-1} & D_j^i & D_j^{i+1} & \dots & D_j^{j-1} & D_j^j & D_j^{j+1} & \dots 0 \end{matrix} \right\|$$

Examinons les déterminants d'ordre 4 de cette matrice. Ceux dont les éléments d'une certaine ligne sont tous nuls sont égaux à zéro. Nous avons donc seulement à examiner les déterminants de la forme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ D_i^i & D_i^p & D_i^q & D_i^j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ D_j^i & D_j^p & D_j^q & D_j^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_i^p & D_i^q \\ D_j^p & D_j^q \end{vmatrix} \qquad (i \neq p, q;\ j \neq p, q).$$

D_i^p est égal à $(-1)^{i+p}$ multiplié par le déterminant $|H_i^p|$. Dans $|H_i^p|$, il y a une ligne dont tous les éléments sont 1; c'est la ligne qui, auparavant, a contenu h_p (maintenant h_p est barré en même temps que la p-ième colonne). Les autres lignes ont tous leurs éléments égaux à 1 sauf un seul qui est un certain h_r. Retranchons de chaque élément de ces lignes l'unité (c'est-à-dire l'élément correspondant dans la ligne dont tous les éléments sont 1); de cette façon la valeur du déterminant ne change pas. Ainsi nous voyons que $|H_i^p|$ est égal au produit des facteurs de la forme $h_r - 1$ où r prend toutes les valeurs de 1 jusqu'à $n+1$ inclus, sauf i et p. Donc $D_i^p D_j^q = D_j^p D_i^q$ parce que chaque membre est égal à $(-1)^{i+j+p+q}$ multiplié par un produit des facteurs de la forme $h_r - 1$ $(r = 1, 2, \dots, n+1)$, chaque facteur étant pris deux fois sauf les facteurs $h_i - 1, h_j - 1, h_p - 1, h_q - 1$ qui sont pris une seule fois. Ainsi le rang de la matrice (3) est plus petit que 4 et la première partie du théorème est démontrée. Il suffit d'appliquer le principe de dualité pour obtenir la deuxième partie du théorème.

Le théorème est encore vrai si les deux simplexes (A_i), (A'_i) sont situés dans deux hyperplans différents de l'espace P_{n+1}. En effet, supposons que les droites $A_iA'_i$ concourent en un point E. Les deux $(n-1)$-plans a_i et a'_i, se trouvant dans un même hyperplan $EA_1A_2 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_{n+1}$ se coupent suivant un $(n-2)$-plan; ce plan setrouve évidemment sur le $(n-1)$-plan Q d'intersection des deux hyperplans donnés. Ainsi, tous les $(n-2)$-plans $a_i \times a'_i$ se trouve dans un même $(n-1)$-plan Q.

Réciproquement, supposons que, pour chaque valeur de i $(i = 1, 2, \dots, n+1)$, les deux $(n-1)$-plans a_i, a'_i se coupent suivant un $(n-2)$-plan (situé évidemment dans Q). Le plan de dimension minimum qui contient a_i, a' est un plan de dimension égale à $2(n-1)-(n-2) = n$, c'est-à-dire un hyperplan de P_{n+1}. Examinés dans cet hyperplan, considéré comme un espace P_n, a_i et a'_i sont deux simplexes situés dans deux hyperplans différents de ce P_n; ces deux simplexes de P_n vérifient aussi la condition que, pour toute valeur de j ($j=1, 2, \ldots, n$), deux hyperfaces correspondantes b_j, b'_j (de dimension $n-2$) se coupent suivant un $(n-3)$-plan (situé évidemment sur l'intersection de a_i et de a'_i). En effet, supposons que b_j soit l'intersection de a_i et de a_K et b'_j — celle de a'_i et de a'_K; alors l'intercestion de b_j et de b'_j est le $(n-3)$-plan d'intersection des deux $(n-2)$-plans $a_i \times a'_i$ et $a_K \times a'_K$. Supposons que le théorème soit vrai dans P_n; alors les droites $A_K A'_K$ ($K=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1$) sont concourantes; comme i est un entier quelconque ($1 \leqq i \leqq n+1$), on en conclut que n'importe quelles n droites parmi les $n+1$ droites $A_i A'_i$ sont concourantes. Donc toutes les $n+1$ droites $A_i A'_i$ sont concourantes. Ainsi le théorème sera vrai dans P_{n+1} s'il est vrai dans P_n. Or, il est bien connu que le théorème est vrai dans P_3. Donc il est vrai dans P_n pour $n \geqq 3$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

1. *Cas où les deux hyperplans sont distincts.*

(a) *Cas où* $m = n-2$, c'est-à-dire que tous les points du $(n-2)$-plan d'intersection des deux hyperplans sont doubles. Dans ce cas il suffit d'appliquer le théorème de Desargues généralisé (cas où les deux simplexes se trouvent dans deux hyperplans différents) pour s'assurer tout de suite que la collinéation donnée est une perspective. Ainsi, le théorème est vrai dans ce cas parce que $n-(n-2)-1 = 1$.

(b) Cas où $-1 \leqq m < n-2$. Supposons que le théorème est vrai pour $m = i+1$ et démontrons que, dans ce cas, il est aussi vrai pour $m=i$. Soit R le i — plan rempli de points doubles situés sur l'intersection des deux hyperplans P et P'. Prenons un point O de R et deux droites correspondantes Ox, Ox' situées respectivement dans P et dans P' mais non sur leur intersection. Prenons ensuite sur Ox deux points M, N tels que M, N et M', N' ne se trouvent pas sur l'intersection de P et de P'. Soit I le point de rencontre de MN et de $M'N'$. Projetons de I, comme centre, l'espace des points P sur un hyperplan P'' contenant R et les points M', N'. Nous obtenons dans P'' un espace de points en perspective avec l'espace de points porté par P et, par suite, en relation collinéaire avec l'espace de points porté par P':

$$P'' \overline{\wedge} P'. \tag{1}$$

Dans cette relation collinéaire, nous avons, sur l'intersection des deux hyperplans P' et P'', le i-plan R rempli de point doubles et deux points doubles M', N' non situés sur R. Considérons le $(i+1)$-plan S défini par R et le droite $OM'N'$. Il est clair que dans la collinéation (1), S se transforme en S. Démontrons que S est rempli de points doubles: prenons dans R $i+1$ points linéairement indépendants; ces points constituent avec M' et N' un groupe de $i+3$ points situés dans S et tels qué aucun sous-groupe de $i+2$ points ne soit linéairement dépendant; la collinéation induite dans S par la collinéation (1) est donc la transformation identique comme ayant un tel groupe de $i+3$ points doubles. Donc S est rempli de points doubles. Comme le théorème est supposé vrai pour $m = i+1$, nous voyons que la collinéation (1) est décomposable en $n-(i+1)-1$ perspectives. Par suite, la collinéation entre P et P' est décomposable en $[n-(i+1)-1]+1 = n-i-1$ perspectives. Le théorème est donc vrai pour $m=i$. Comme le théorème est vrai pour $m = n-2$ il sera vrai pour $m = n-3$ et ensuite pour $m = n-4$ et ainsi de suite jusqu'à $m = -1$.

2. *Cas où les deux hyperplans coincïdent.*

Supposons que P coïncide avec P' et que dans la relation $P \barwedge P'$ il y ait un ensemble de points doubles remplissant un m-plan R. Prenons un hyperplan Q contenant R et différent de P. Projetons l'un des espaces de points P, P' (par exemple P') sur Q. Nous revenons ainsi au cas précédent. Par comparaison au cas précédent, nous avons ici une perspective de plus, projetant P' sur Q.

Démonstration des théorèmes 2 et 3.

La démonstration se divise en trois parties:

10) *dans l'espace affine à n dimensions A_n, une transformation affine est décomposable en général d'une manière unique en n homologies affines dont les centres sont respectivement n sommets rangés dans un ordre déterminé d'un simplexe de l'hyperplan à l'infini.*

Soit donnée une transformation affine dans A_n, définie par deux simplexes correspondants $M_1M_2...M_{n+1}$ et $M_1'M_2'...M_{n+1}'$. Cherchons à décomposer cette transformation affine en n homologies affines dont les centres sont respectivement n sommets $O_1, O_2, ..., O_n$ d'un simplexe de l'hyperplan à l'infini. Nous désignerons par f_i l'homologie de centre O_i.

Supposons la décomposition réalisée et nous avons le produit $f_nf_{n-1}...f_2f_1$: f_1 transforme les points $M_K = M_K^0$ $(K=1, 2, ..., n+1)$ en les points M_K^1, f_2 transforme M_K^1 en M_K^2, ..., f_{n-1} transforme M_K^{n-2} en M_K^{n-1} et f_n transforme M_K^{n-1} en $M_K' = M_K^n$. Les côtés de la ligne brisée $M_K^0M_K^1M_K^2...M_K^{n-1}M_K^n$ passent respectivement par $O_1, O_2, ..., O_n$. Parce que les points M_K^0 et M_K^n ne se trouvent pas dans l'hyperplan à l'infini, les points $M_K^0, O_1, O_2, ..., O_i$ définissent toujurs un i-plan et les points $O_{i+1}, O_{i+2}, ..., O_n, M_K^n$ — un $(n-i)$-plan. Ces deux plans ont un point commun unique M_K^1. De cette remarque, nous déduisons la manière de décomposition suivante:

(a) Pour chaque valeur de i et pour chaque valeur de K, nous prenons le point de rencontre unique M_K^i du i-plan $M_K^0O_1O_2...O_i$ et du $(n-i)$-plan $O_{i+1}O_{i+2}...O_n^KM_K^n$. Démontrons que la droite $M_K^{i-1}M_K^i$ ainsi construite passe par O_i. En effet, le i-plan $M_K^0O_1O_2...O_i$ et le $(n-i+1)$-plan $O_iO_{i+1}O_{i+2}...O_nM_K^n$ se coupent suivant une droite D passant par O_i. Dans le i-plan $M_K^0O_1O_2...O_i$, la droite D coupe le $(i-1)$-plan $M_K^0O_1O_2...O_{i-1}$ en un certain point; ce point se trouvant sur D, est aussi un point du $(n-i+1)$-plan $O_iO_{i+1}O_{i+2}...O_nM_K^n$; c'est donc le point M_K^{i-1} unique commun aux deux plans $M_K^0O_1O_2...O_{i-1}$ et $O_iO_{i+1}O_{i+2}...O_nM_K^n$. De même, dans le $(n-i+1)$-plan $O_iO_{i+1}...O_nM_K^n$, la doite D coupe le $(n-i)$-plan $O_{i+1}O_{i+2}...O_nM_K^n$ en un certain point qui est le point M_K^i unique commun aux deux plans $M_K^0O_1O_2, ...O_i$ et $O_{i+1}O_{i+2}...O_nM_K^n$. Ainsi la droite $M_K^{i-1}M_K^i$ est justement la droite D passant par O_i.

(b) Supposons que, pour chaque valeur de i, les $n+1$ points M_K^i $(K=1, 2, ...$ $..., n+1)$ précédemment construits définissent un simplexe (M^i). Les droites joignant les sommets correspondants des deux simplexes (M^{i-1}) et (M^i) concourent au point O_i. Donc, d'après le théorème de Desargues généralisé, les hyperfaces correspondantes de ces deux simplexes se coupent suivant des $(n-2)$-plans se trouvant dans un même hyperplan P_i. Considérons l'homologie affine définie par le centre O_i, l'hyperplan d'homologie P_i et les deux points correspondants M_1^{i-1}, M_1^i. Il est évident que cette homologie transforme le simplexe (M^{i-1}) en le simplexe (M^i). Désignons — la par f_i. Alors le produit $f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1$ sera une transformation affine dans laquelle les simplexes donnés (M^0) et (M^n) se correspondent. Ce produit est donc la transformation affine donnée.

En résumé, si, pour chaque valeur de i, les $n+1$ points M_K^i définissent un simplexe, alors la transformation affine donnée est décomposable d'une manière unique en un produit d'homologies affines dont les centres sont respectivement $O_1, O_2, \dots, O_n$.

20) Soit maintenant une matrice carrée régulière d'ordre n $\|b_i^j\|$. Considérons-la comme matrice d'une transformation centro-affine:

$$x_1' = \sum_{j=1}^{n} b_i^j x_j.$$

Prenons les points $O_1, O_2, \dots, O_n$ respectivement à l'infini sur les axes de coordonnées $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$. Choisissons le simplexe (M^0) comme suit: le point M_{n+1}^0 en O et les autres points M_K^0 $(K=1, 2, \dots, n)$ respectivement sur les axes Ox_K. Ainsi, nous avons:

$$M_K^0(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{K-1\ \ 0}, m_K, 0, \dots, 0),\ m_K \neq 0,\ K \leqq n,$$

$$M_{n+1}^0(0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0).$$

La transformation centro-affine précédente transforme ces points respectivement en les points:

$$M_K^n(b_1^K m_K, b_2^K m_K, \dots, b_{n-1}^K m_K, b_n^K m_K),$$

$$M_{n+1}^n(0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0).$$

Les deux simplexes (M^0) et (M^n) définissent la transformation centro-affine. Décomposons cette transformation en homologies affines de centres respectifs $O_1, O_2, \dots, O_n$. D'après ce qui précède, le point M_K^i est le point commun unique aux deux plans $M_K^0 O_1 O_2 \dots O_i$ et $O_{i+1} O_{i+2} \dots O_n M_K^n$. M_K^i est donc le le point commun à l'i-plan passant par M_K^0 et parallèle à l'i-face de coordonnées $Ox_1 x_2 \dots x_i$ et au $(n-i)$-plan passant par M_K^n et parallèle à la $(n-i)$-face de coordonnées $Ox_{i+1} x_{i+2} \dots \dots x_n$. Donc les i premières coordonnées de M_K^i sont respectivement les i premières coordonnées de M_K^n et les $(n-i)$ coordonnées qui restent sont respectivement les coordonnées de M_K^0, de la $(i+1)$-ième jusqu'à la n-ième:

$$M_K^i(b_1^K m_K, b_2^K m_K, \dots, b_i^K m_K, 0, 0, \dots, 0) \text{ si } K \leqq i,$$

$$M_K^i(b_1^K m_K, b_2^K m_K, \dots, b_i^K m_K, 0, \dots, m_K, 0, \dots, 0) \text{ si } K > i.$$

Fixons la valeur de i $(1 \leqq i \leqq n-1)$. Pour que les $n+1$ points M_K^i $(K=1, 2, \ldots, n+1)$ définissent un simplexe, il faut et il suffit que:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 m_1 & b_2^1 m_1 & \ldots & b_i^1 m_1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \\ b_1^2 m_2 & b_2^2 m_2 & \ldots & b_i^2 m_2 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots . & . & . \\ b_1^i m_i & b_2^i m_i & \ldots & b_i^i m_i & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \\ b_1^{i+1} m_{i+1} & b_2^{i+1} m_{i+1} & \ldots & b_i^{i+1} m_{i+1} & m_{i+1} & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \\ b_1^{i+2} m_{i+2} & b_2^{i+2} m_{i+2} & \ldots & b_i^{i+2} m_{i+2} & 0 & m_{i+2} & \ldots 0 & 0 & 1 \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots . & . & . \\ b_1^n m_n & b_2^n m_n & \ldots & b_i^n m_n & 0 & 0 & \ldots 0 & m_n & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ou:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \ldots & b_i^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_i^2 \\ . & . & \ldots & . \\ b_1^i & b_2^i & \ldots & b_i^i \end{vmatrix} \neq 0$$

c'est-à-dire que la sous-matrice carrée d'ordre i située en haut et à gauche de la matrice $\|b_i^j\|$ soit régulière. Moyennant cette condition pour toute valeur de i de 1 jusqu'à $n-1$ inclus, la transformation centro-affine précédente sera décomposable en produit $f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1$ d'une manière unique. L'homologie f_i transforme le simplexe (M^{i-1}) en le simplexe (M^i). Toute droite joignant deux points correspondants dans cette homologie est parallèle à Ox_i (passe par O_i); donc seule la i-ième coordonnée diffère chez les deux points et la matrice de f_i a la forme suivante:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . \ldots & . & . \\ a_i^1 & a_i^2 & a_i^3 \ldots & a_i^{n-1} & a_i^n \\ . & . & . \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \} \text{ } i\text{-ème ligne.} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Pour calculer les a_i^K, écrivons que f_i transforme les points M_K^{i-1} en les points M_K^i. Prenons par exemple le point M_1^i. Sa i-ième coordonnée s'exprime au moyen des coordonnées du point M_1^{i-1} comme suit:

$$b_i^1 m_1 = a_i^1 (b_1^1 m_1) + a_i^2 (b_2^1 m_1) + \ldots + a_i^{i-1} (b_{i-1}^1 m_1)$$

d'où:

$$b_1^1 a_i^1 + b_2^1 a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^1 a_i^{i-1} = b_i^1.$$

Donnons à K successivement les valeurs de 1 à $n+1$; nous obtenons le système d'équations suivantes pour calculer les a_i^K:

$$\begin{cases} b_1^1 \quad a_i^1 + b_2^1 \quad a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^1 \, a_i^{i-1} & = b_i^1 \\ b_1^2 \quad a_i^1 + b_2^2 \quad a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^2 \, a_i^{i-1} & = b_i^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_1^{i-1} \, a_i^1 + b_2^{i-1} \, a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^{i-1} \, a_i^{i-1} & = b_i^{i-1} \\ b_1^i \quad a_i^1 + b_2^i \quad a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^i \, a_i^{i-1} + a_i^i & = b_i^i \\ b_1^{i+1} \, a_i^1 + b_2^{i+1} \, a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^{i+1} \, a_i^{i-1} + \quad a_i^{i+1} & = b_i^{i+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_1^n \quad a_i^1 + b_2^n \quad a_i^2 + \ldots + b_{i-1}^n \, a_i^{i-1} + \qquad a_i^n & = b_i^n \end{cases}$$

On peut prévoir que le déterminant de ce système est différent de zéro parce que la décomposition est possible. Remarquons encore que pour $i=1$, le système se réduit à:

$$a_1^1 = b_1^1, \ a_1^2 = b_1^2, \ \ldots, \ a_1^n = b_1^n .$$

Ainsi la première ligne de la matrice de l'homologie f_1 est identique à la première ligne de la matrice $\|b_i^j\|$.

Le théorème 3 est ainsi démontré.

30) Soit maintenant dans P_n une collinéation et un simplexe $O_1 O_2 \ldots O_{n+1}$. Prenons ce simplexe comme simplexe de coordonnées. Par rapport à ce simplexe de coordonnées, la collinéation donnée a une certaine matrice carrée régulière d'ordre $n+1 \|b_i^j\|$. Si les sous-matrices carrées situées en haut et à gauche de cette matrice sont aussi régulières, alors on peut décomposer $\|b_i^j\|$ en un produit de $n+1$ matrices ayant la forme indiquée dans le théorème 3. Chacune de ces matrices correspond à une homologie ayant un sommet du simplexe de coordonnées comme centre.

Cherchons la signification géométrique de la condition imposée à la matrice $\|b_i^j\|$. Prenons la sous-matrice carrée d'ordre i située en haut et à gauche de $\|b_i^j\|$ et supposons qu'elle soit régulière. La collinéation donnée transforme les points $O_1, O_2, \ldots, O_i$ respectivement en les points:

$$\begin{array}{l} B_1 (b_1^1, \, b_2^1, \, \ldots, \, b_{n+1}^1) \\ B_2 (b_1^2, \, b_2^2, \, \ldots, \, b_{n+1}^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_i \, (b_1^i, \, b_2^i, \, \ldots, \, b_{n+1}^i) \end{array}$$

Le déterminant des coordonnées des points $B_1, B_2, \ldots, B_i, O_{i+1}, O_{i+2}, \ldots$ $\ldots, O_{n+1}$ est:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \ldots & b_i^1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n+1}^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_i^2 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^i & b_2^i & \ldots & b_i^i & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n+1}^i \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

il est égal au déterminant de la sous-matrice et, par conséquent est différent de zéro. Ainsi les points:

$$B_1, B_2, \dots, B_i, O_{i+1}, O_{i+2}, \dots, O_{n+1}$$

définissent un simplexe.

Enfin, cherchons comment on peut réaliser géométriquement la décomposition de la collinéation: choisissons $n+2$ hyperplans Q_i tels que n'importe quels $n+1$ d'entre eux forment un simplexe. Prenons les $n+2$ hyperlans Q_i', images des Q_i dans la collinéation. On peut regarder la collinéation comme définie par les Q_i et les Q_i'. Considérons P_n comme un hyperplan dans P_{n+1}. Dans ce P_{n+1} prenons $(n+2)$ hyperplans R_i et $(n+2)$ hyperplans R_i' (dont aucun ne coincïde avec P_n) passant respectivement par les Q_i, Q_i' et définissant deux simplexes R, R'. Prenons P_n comme hyperplan à l'infini et dans P_{n+1} (devenu A_{n+1}), décomposons la transformation affine $(R \to R')$ en $n+1$ homologies affines de centres respectifs $O_1, O_2, \dots$ $\dots, O_{n+1}$. À chacune de ces homologies correspond dans P_n une homologie. La collinéation donnée dans P_n est ainsi décomposée en ces homologies.

(Reçu le 22. avril 1961; revisé le 30. juin 1962.)