Sur la théorie générale des demi-anneaux

Par A. ALMEIDA COSTA (Lisbonne)

§ 1. Généralités

Un demi-anneau est un système algébrique $\mathfrak{S} = \{a, b, c, \ldots, r, s, \ldots, x, y, \ldots\}$ muni de deux lois de composition interne: une somme et un produit. En outre: 1) il s'agit d'un demi-groupe additif et d'un demi-groupe multiplicatif; 2) les lois distributives à gauche et à droite sont valables.

Un idéal à droite $\mathfrak{r}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ tel que: 1') si $a, b \in \mathfrak{r}$, alors $a+b \in \mathfrak{r}$; 2') si $a \in \mathfrak{r}, s \in \mathfrak{S}$, alors $as \in \mathfrak{r}$. On donne des définitions correspondantes pour un *idéal à gauche* $\mathfrak{e}$ et pour un *idéal bilatèral* $\mathfrak{a}$ (plus simplement: *idéal*).

Une somme $\Sigma \mathfrak{r}_\alpha$ d'idéaux à droite est l'ensemble des éléments Σr_α, où Σ est fini et $r_\alpha \in \mathfrak{r}_\alpha$. Cette somme est commutative.

Parmi les idéaux, on distingue l'intersection $\mathfrak{Z}$ de tous les idéaux non vides, qui peut être l'idéal vide, ainsi que les intersections $\mathfrak{Z}_d$ et $\mathfrak{Z}_e$ des idéaux à droite e à gauche, respectivement, aussi non vides. L'idéal $\mathfrak{Z}$ s'appelle *idéal nucléaire*. Il a une très grande importance dans la théorie. On peut faire la remarque suivante, qui est très intéréssante: Si $\mathfrak{Z} = \emptyset$, alors $\mathfrak{Z}_d$ et $\mathfrak{Z}_e$ sont aussi vides, mais la réciproque n'est pas vraie en général; il peut se faire que $\mathfrak{Z}_d$, par exemple, soit vide, avec $\mathfrak{Z} \neq \emptyset$; toutefois la proposition suivante a lieu: si $\mathfrak{Z}_d$ (ou $\mathfrak{Z}_e$) n'est pas vide, alors $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_d$, $(\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_e)$.

En considérant un idéal $\mathfrak{a}$ comme demi-anneau, l'idéal nucléaire correspondant, que l'on désigne par $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$, vérifie la relation $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{Z}$.

Un *demi-anneau régulier* est défini de la même façon qu'un anneau régulier associatif. Dans toutes les questions qui vont être objet de ce rapport, on ne parlera pas d'homomorphismes. Néanmoins, en suivant M. elle Noronha Galvão et l'auteur lui-même, on pourra faire un exposé avec un certain développement.

Si, pour deux sous-demi-groupes additifs $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de $\mathfrak{S}$, on définit une somme $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ comme l'ensemble des éléments $\Sigma(m_i^{(1)} + m_i^{(2)})$, où le signe Σ est fini et $m_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_1$, $m_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_2$, alors on dira que $\mathfrak{a}$ est un *idéal régulier* si la condition suivante est satisfaite: si $\mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{a}$ est un idéal à droite et $\mathfrak{e} \supseteq \mathfrak{a}$ est un idéal à gauche, la relation $\mathfrak{a} + \mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$ est valable. On a cette conséquence: Pour que $\mathfrak{S}$ soit un demi-anneau régulier, il faut et il suffit que $\mathfrak{Z}$ soit un idéal régulier.

L'idéal $\mathfrak{Z}$ permet l'introduction du concept de „nilpuissance". Un élément $a \in \mathfrak{S}$ est dit nilpotent, si $a^\varrho \in \mathfrak{Z}$, pour un certain ϱ. Avec cette définition, on peut faire la théorie du *radical classique* ainsi que celle du radical-L (J. Levitzki) (par analogie de ce qui se passe dans les anneaux associatifs), et, si $\mathfrak{S}$ a une somme commutative, on peut faire encore la théorie du radical-K (G. KÖTHE). Par exemple, on a les théorèmes que voici: 1″) Pour que le radical classique $\mathfrak{R}$ soit nilpotent, il faut et il suffit que toute chaîne $L_0 \supset L_0L_1 \supset L_0L_1L_2 \supset \ldots$ ou les L_i sont des idéaux contenus dans $\mathfrak{R}$ soit finie; 2″) la somme de deux idéaux à droite localement nilpotents est un idéal à droite localement nilpotent; 3″) si, dans un demi-anneau commutatif pour la somme, la somme de deux nilidéaux à gauche est un nilidéal à gauche, le même arrive pour la somme de deux nilidéaux à droite et chaque nilidéal à droite (ou à gauche) peut être plongé dans un nilidéal.

§ 2. *m*-SYSTÈMES ET *p*-SYSTÈMES

Un *m-système* d' éléments de $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble M tel que, si a, $b \in M$, il existe $d \in \mathfrak{S}$ tel que $axb \in M$. On trouve cette définition (toujours dans la théorie des anneaux) dans N. McCOY, ce que lui a permis de faire une généralisation de certains résultats de W. KRULL.

Il en est de même pour les demi-anneaux. La définition d'un *idéal premier* est la même que pour les anneaux associatifs. Les propositions suivantes sont valables: 1‴) si $\mathfrak{p}$ est un idéal, pour que $\mathfrak{p}$ soit un idéal premier, il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire $C(\mathfrak{p})$, de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{S}$, soit un m-systéme; 2‴) si M_0 est un m-système et $\mathfrak{a}_0$ un idéal sans aucun élément dans M_0 alors, tout idéal maximal $\mathfrak{q}$, parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et n'ont aucun élément dans M_0 est un idéal premier; 3‴) pour que le sous-ensemble $\mathfrak{p}$ soit un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que le complémentaire $C(\mathfrak{p})$ soit un m-système maximal, parmi les m-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$.

Cela posé, soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque. Il y a toujours des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$, au moins on a $\mathfrak{S} \supseteqq \mathfrak{a}$. Les ensembles complémentaires (celui de $\mathfrak{S}$ est le m-système vide) sont des m-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{a}$ est un idéal premier et $M_1 \supseteqq C(\mathfrak{p})$ un m-système maximal, parmi les m-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$, alors $C(M_1) = \mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}$ sera un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, lequel réalise les conditions $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{p}_1 \supseteqq \mathfrak{a}$.

Un *p-système* d'éléments de $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble P tel que, si $a \in P$, il existe $x \in \mathfrak{S}$ tel que $axa \in P$. On trouve cette définition dans ALMEIDA COSTA, pour faire l'étude des idéaux semi-premiers d'une façon analogue à celle des idéaux premiers. D'ailleurs la définition d'un *idéal semi-premier* est encore la même que pour les anneaux associatifs. Maintenant les propositions suivantes sont valables dans un demi-anneau quelconque: $1^{(IV)}$) si $\mathfrak{r}$ est un idéal, pour que $\mathfrak{r}$ soit un ideal semi-premier il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire $C(\mathfrak{r})$, de $\mathfrak{r}$, dans $\mathfrak{S}$, soit un p-système; $2^{(IV)}$, si P_0 est un p-système et $\mathfrak{a}_0$ un idéal sans aucun élément dans P_0, alors, tout idéal maximal $\mathfrak{y}$, parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et n'ont aucun élément dans P_0, est un idéal semi-premier; $3^{(IV)}$, pour que $\mathfrak{r}$ soit un idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{r}$ soit un sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ dont le complémentaire $C(\mathfrak{r})$ est un p-système maximal, parmi les p-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$.

Cela posé, soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque. Il y a toujours des idéaux semi-premiers contenant $\mathfrak{a}$, au moins on a $\mathfrak{S} \supseteqq \mathfrak{a}$. Les ensembles complémentaires sont des p-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{r} \supseteqq \mathfrak{a}$ est un idéal semi-premier et $P_1 \supseteqq C(\mathfrak{r})$ un p-système maximal, parmi les p-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$,

$C(P_1) = \mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{r}$ sera un idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, lequel réalise les conditions $\mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{r}_1 \supseteq \mathfrak{a}$.

On voit tout de suite qu'un m-système est aussi un p-système. La réciproque n'est pas vraie. On a cependant ce théorème: Pour que le sous-ensemble P soit un p-système, il faut et il suffit que P soit la réunion de m-systèmes. En partant de ce résultat on démontre que tout idéal semi-premier est l'intersection des idéaux premiers qui contiennent l'idéal (ou des idéaux premiers minimaux qui appartiennent à l'idéal). D'ailleurs on a cette réciproque: toute l'intersection d'idéaux semi-premiers est un idéal semi-premier. Donc: il y a un seul idéal semi-premier appartenant à un idéal ou il y a un seul p-système maximal sans aucun élément dans l'idéal.

La théorie des *radicaux supérieur et inférieur* (R. BAER) se suit très naturellement. En désignant par *idéal radical* un nil-idéal semi-premier, on reconnaît que, si $\mathfrak{J} = \emptyset$, il n'y a pas d'autre idéal radical que $\mathfrak{J}$. Si $\mathfrak{J} \neq \emptyset$, il peut arriver que $\mathfrak{J}$ soit semi-premier; alors $\mathfrak{J}$ est un idéal radical non vide. Mais, si $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ n'est pas semi-premier, l'existence d'idéal radical non vide est assurée par la proposition suivante: Dans un demi-anneau, en supposant P_0 un p-système et $\mathfrak{a}_0$ un nilidéal qui n'a aucun élément dans P_0, tout nilidéal maximal $\mathfrak{w}_0$, parmi les nilidéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et n'ont aucun élément dans P_0 est un idéal radical. Il s'ensuit qu'il y a des idéaux radicaux contenant un nilidéal $\mathfrak{a}_0 \neq \emptyset$; il suffit de prendre pour P_0 le système vide. Vraiment, il y a un seul idéal radical maximal contenant un nilidéal donné, lequel est indépendant du nilidéal en question. Il s'agit de l'ensemble réunion de tous les nilidéaux. Nous le désignerons par B_s. B_s est le *radical supérieur de Baer*. L'intersection de tous les idéaux radicaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ a un sens. Il s'agit d'un idéal $B_i(\mathfrak{a}_0)$, qui est le seul idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$. L'idéal $B_i(\mathfrak{J}) = B_i$ s'appelle le *radical inférieur de Baer*. Supposons $B_i = \mathfrak{J}$. Alors, toujours que l'on a $\mathfrak{b}^\sigma \subseteq \mathfrak{J}$, on a aussi $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{J}$. $\mathfrak{J}$ est la réunion de tous les idéaux nilpotents ce qui entraîne l'égalité $\mathfrak{J} = \mathfrak{R} =$ radical classique. Réciproquement, si $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}$, alors $\mathfrak{J}$ contient tous les idéaux $\mathfrak{b}$ pour lesquels $\mathfrak{b}^\sigma \subseteq \mathfrak{J}$, c'est-à-dire $\mathfrak{J}$ est semi-premier, ce qui entraîne $B_i = \mathfrak{J}$. Les idéaux $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ et B_i sont à la fois vides ou non vides.

Le radical inférieur peut être obtenu par un procédé différent celui dont'on vient de faire usage, mais toujours en corrélation avec la thèorie des idéaux semi-premiers. Nous appellons *radical d'un idéal* $\mathfrak{a}$ l'ensemble $B(\mathfrak{a})$ des éléments du demi-anneau tels que, pour chaque $x \in B(\mathfrak{a})$, tout le p-système contenant x a des éléments dans $\mathfrak{a}$. Nous avons cette proposition: Le radical $B(\mathfrak{a})$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$. Nous allons donner la démonstration. De la définition, on conclut que $x \in B(\mathfrak{a})$, si et seulement si n'appartient à aucun p-système qui n'a aucun élément dans $\mathfrak{a}$. Si P_α est un tel p-système, P_α est contenu dans le seul p-système maximal P_0 qui n'a aucun élément dans $\mathfrak{a}$, donc il en est de même d'écrire $x \in B(\mathfrak{a})$ ou $x \notin P_0$. On en déduit $B(\mathfrak{a}) = C(P_0)$.

Puisque tout m-système est un p-système, on voit que tout m-système contenant $x \in B(\mathfrak{a})$ a des éléments dans $\mathfrak{a}$. Réciproquement, si tout m-système qui contient x a des éléments dans $\mathfrak{a}$, en prenant un p-système contenant x, puisqu'il est réunion de m-systèmes, il s'ensuit que le p-système a des éléments dans $\mathfrak{a}$. Ainsi: Le radical $B(\mathfrak{a})$ peut être défini comme l'ensemble des éléments du demi-anneau tels que tout m-système contenant un tel élément contient aussi des éléments qui sont dans $\mathfrak{a}$.

En faisant intervenir les *idéaux complètement premiers* et les *idéaux complètement semi-premiers*, définis comme pour les anneaux associatifs, on peut dire: $1^{(V)}$) pour que l'idéal $\mathfrak{q}$ soit complètement premier, il faut et il suffit que $C(\mathfrak{q})$ soit un système multiplicatif; $2^{(V)}$) pour que l'idéal soit complètement semi-premier, il faut et il suffit que $C(\mathfrak{q})$ contienne les puissances de ses éléments.

§ 3. DEMI-ANNEAUX RÉTICULÉS

Les considérations faites dans les paragraphes précédents sont presque partout d'un caractère tout à fait général. Il en est autrement dans ce paragraphe. Ici il s'agit des demi-anneaux $\mathfrak{S}$ dans les conditions suivantes: I) $\mathfrak{S}$ est un ensemble réticulé; II) les opérations de *inf* et de *sup* vérifient les relations $x+y = x \vee y$, $xy \equiv x \wedge y$.

Les résultats que l'on va mettre en évidence auront néanmoins une très grande application dans la théorie générale. Nous les utiliserons principalement dans l'étude d'un certain type de demi-anneaux qui seront appelés μ-demi-anneaux.

Puisque $\mathfrak{S}$ est un réticulé, il y a des idéaux au sens de la théorie des réticulés. De tels idéaux sont aussi des idéaux du demi-anneau $\mathfrak{S}$. On les appellera *idéaux réticulés*. Pour construire l'idéal réticulé $\mathfrak{b}$ engendré par un ensemble d'éléments, on construit l'idéal $\mathfrak{b}'$ engendré par le même ensemble et après on considère l'idéal $\mathfrak{b}$ formé des éléments $b \equiv b'$, où $b' \in \mathfrak{b}'$.

Pour les idéaux réticulés, les deux notions de „premier" et de „complètement premier" sont confondues; il en est de même pour les notions de „semi-premier" et de „complètement semi-premier".

L'idéal réticulé $\mathfrak{a}$ un radical $B(\mathfrak{a})$ lequel est aussi réticulé. Pour que l'on ait $v \in B(\mathfrak{a})$, il faut et il suffit que $v^{\varrho} \in \mathfrak{a}$, pour un certain ϱ.

Pour éviter de faire des répétitions, on supposera dans tout ce paragraphe que $\mathfrak{a}$ est un idéal réticulé. On définit alors un quotient à droite $(\mathfrak{a}:b)_d$, lequel est un idéal réticulé; et on dit que b est *en relation* avec $\mathfrak{a}$, si $(\mathfrak{a}:b)_d \supset \mathfrak{a}$; autrement, si l'on a $(\mathfrak{a}:b)_d = \mathfrak{a}$, on dit que *b n'est pas en relation* avec $\mathfrak{a}$. Les ensembles des éléments en relation et non en relation avec $\mathfrak{a}$ seront représentés par $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}$, respectivement. Il s'agit de systémes multiplicatifs.

Un idéal est dit en relation, par éléments, avec $\mathfrak{a}$, si tous ses éléments sont en relation avec $\mathfrak{a}$.

Un *idéal maximal* $\mathfrak{q}$, *par éléments*, appartenant à $\mathfrak{a}$ se définit comme d'habitude: I') il est en relation avec $\mathfrak{a}$, par éléments; II') tout idéal $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}$ n'est pas en relation avec $\mathfrak{a}$, par éléments. À ce propos, l'énoncé suivant est valable: Si $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ est un idéal réticulé d'un demi-anneau, il y a des idéaux maximaux $\mathfrak{q}$, par éléments, appartenant à $\mathfrak{a}$, lesquels contiennent $\mathfrak{a}$ et sont des idéaux réticulés premiers. On peut dire aussi: Tout idéal en relation avec $\mathfrak{a}$, par éléments, est contenu dans un idéal maximal, par éléments appartenant à $\mathfrak{a}$.

L'idéal adjoint $\mathfrak{w}$, *par éléments, de l'idéal* $\mathfrak{a}$, se compose des éléments c tels que, pour chaque $b \in \mathfrak{M}'$, on a aussi $c+b \in \mathfrak{M}'$. Il s'agit d'un idéal réticulé, égal à l'intersection de tous les idéaux maximaux, par éléments, appartenant à $\mathfrak{a}$.

Lorsque l'on a $\mathfrak{w} = \mathfrak{M}'$, l'idéal réticulé est dit *primal*, par éléments. On peut donner les caractérisations suivantes des idéaux primaux: I″) Pour que $\mathfrak{a}$ soit primal il faut et il suffit, b_1 et b_2 étant des éléments de $\mathfrak{M}'$, que l'on ait $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$; II″) pour que $\mathfrak{a}$ soit primal, il faut et il suffit que sont idéal adjoint, par éléments, soit le seul idéal complètement premier maximal, par éléments, appartenant a $\mathfrak{a}$.

La notion de *composante isolée*, par éléments, dont nous allons nous occuper a surtout un intérêt dans les deux cas dont'on parlera aussi. Soient $\mathfrak{a}$ ainsi que le m-système M. La composante isolée $\mathfrak{a}_M$, par éléments, définie par $\mathfrak{a}$ et M, est l'ensemble réunion de $\mathfrak{a}$ et des éléments b pour lesquels il y a en fait $m \in M$ tel que $bm \in \mathfrak{a}$. On reconnaît que $\mathfrak{a}_M$ est un idéal réticulé.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal maximal, par éléments, appartenant à $\mathfrak{a}$. On appelle *composante principale* $\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$, la composante isolée $\mathfrak{a}_{C(\mathfrak{q})}$, par éléments. Toujours comme chez W. Krull, on a: L'idéal réticulé $\mathfrak{a}$ est l'intersection de toutes ses composantes principales, par éléments. La proposition suivante est aussi valable: Pour que $\mathfrak{a}$ soit primal, par éléments, il faut et il suffit que l'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{q})$, en supposant $\mathfrak{q}$ un idéal maximal, par éléments, appartenant à $\mathfrak{a}$.

Enfin, soit $\mathfrak{p}_0$ un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$. L'idéal réticulé $\mathfrak{a}_{C(\mathfrak{p}_0)}$ est un idéal primal, par éléments, dont l'idéal adjoint est $\mathfrak{p}_0$. Donc: Un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$ est un idéal réticulé.

Les résultats que l'on vient de rappeler ont une grande importance dans ce qui va suivre, car à tout demi-anneau $\mathfrak{S}$ on associe un demi-anneau réticulé pour lequel l'application des mêmes résultats contribue pour éclaircir la structure du demi-anneau.

§ 4. DEMI-ANNEAU $\bar{\mathfrak{S}}$. μ-SYSTÈME ET π-SYSTÈME D'IDÉAUX

1) **Définition du demi-anneau** $\bar{\mathfrak{S}}$. Prenons un demi-anneau arbitraire $\mathfrak{S}$. On représente par $\bar{\mathfrak{S}}$ le demi-anneau de ses idéaux, en faisant exclusion de l'idéal vide. Il s'agit d'un demi-anneau réticulé, que l'on associe à $\mathfrak{S}$. Nous posons

$$\mathfrak{S} = \{a, b, c, \ldots, x, y, \ldots\}, \quad \bar{\mathfrak{S}} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\}.$$

Si $\bar{\mathfrak{a}}$ est un idéal de $\bar{\mathfrak{S}}$, on obtient un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{S}$, dit *idéal support* de $\bar{\mathfrak{a}}$, en prenant l'ensemble réunion des éléments de $\mathfrak{S}$ qui composent les différents idéaux qui sont les éléments de $\bar{\mathfrak{a}}$. Ainsi, tout idéal de $\bar{\mathfrak{S}}$ est un ensemble d'idéaux de $\mathfrak{S}$ contenus dans un certain idéal de $\mathfrak{S}$. Des exemples importants d'idéaux de $\bar{\mathfrak{S}}$ sont les idéaux $\bar{\mathfrak{a}}_0$, exactement composés de tous les sous-idéaux de son support $\mathfrak{a}$. Nous dirons que $\bar{\mathfrak{a}}_0$ est un *idéal principal* ou *complet*.

Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux de $\mathfrak{S}$ et les idéaux complets de $\bar{\mathfrak{S}}$, dont'ils sont le support. Si $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$, nous avons aussi $\bar{\mathfrak{a}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{b}}_0$ et réciproquement. Et, en supposant $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda \in L}$, une famille d'idéaux de $\mathfrak{S}$ ordonnée par inclusion, l'idéal $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\lambda$ donne $(\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{a}}_0$, donc $\bigcup (\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0 \subseteqq (\overline{\bigcup \mathfrak{a}_\lambda})_0$. Nous pouvons dire:

Théorème 1. *Pour que l'on ait* $\bigcup (\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0 = (\overline{\bigcup \mathfrak{a}_\lambda})_0$, *supposée* $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *une famille ordonnée (par inclusion) d'idéaux, il faut et il suffit qu'il existe un* $\beta \in L$ *tel que* $\bigcup \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}_\beta$.

Voici quelques relations utiles entre les ideaux de $\mathfrak{S}$ et ceux de $\bar{\mathfrak{S}}$:

I) $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}$ implique $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c}$;

II) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c}$ implique $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$, donc $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$;

III) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c}$ et $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$ sont équivalents;

IV) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ implique $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$, donc $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0 \subseteqq (\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})_0$;

V) $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{c}}$ implique $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, donc $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0=\bar{\mathfrak{c}}_0$ implique $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$;

VI) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ implique $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0=\bar{\mathfrak{c}}_0$, si $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0$ est un idéal réticulé;

VII) $\bigcap\bar{\mathfrak{a}}_\alpha \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}$ implique $\bigcap\mathfrak{a}_\alpha \subseteqq \mathfrak{c}$, si les $\bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ sont des idéaux réticulés;

VIII) $\bigcap\mathfrak{a}_\alpha \subseteqq \mathfrak{c}$ implique $\bigcap\bar{\mathfrak{a}}_\alpha \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$, donc $\bigcap(\bar{\mathfrak{a}}_\alpha)_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$;

IX) $\bigcap\mathfrak{a}_\alpha \subseteqq \mathfrak{c}$ et $\bigcap(\bar{\mathfrak{a}}_\alpha)_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{c}}_0$ sont équivalents;

X) $\bigcap\bar{\mathfrak{a}}_\alpha=\bar{\mathfrak{c}}$ implique $\bigcap\mathfrak{a}_\alpha=\mathfrak{c}$, si les $\bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ sont des idéaux réticulés;

XI) $\bigcap\mathfrak{a}_\alpha=\mathfrak{c}$ implique $\bigcap(\bar{\mathfrak{a}}_\alpha)_0=\bar{\mathfrak{c}}_0$;

XII) $\bigcap\mathfrak{a}_\alpha=\mathfrak{c}$ et $\bigcap(\bar{\mathfrak{a}}_\alpha)_0=\bar{\mathfrak{c}}_0$ sont équivalents.

2) **μ-systèmes et π-systèmes d'idéaux.** Un système $\mathfrak{M}^*$ d'idéaux de $\mathfrak{S}$ est appelé un *μ-système*, s'il existe, pour $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}^*$, un idéal $\mathfrak{x} \subseteqq \mathfrak{S}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}^*$. Un *μ-système* de $\mathfrak{S}$ est un *m*-système de $\bar{\mathfrak{S}}$ et réciproquement. On définit aussi *π-système* d'idéaux de $\mathfrak{S}$. Un π-système est un ensemble $\mathfrak{P}^*$ d'idéaux tel que l'on a, si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}^*$, pour un certain idéal $\mathfrak{x} \subseteqq \mathfrak{S}$. Un π-système de $\mathfrak{S}$ est un *p*-système de $\bar{\mathfrak{S}}$ et réciproquement.

Dans ce qui concèrne l'étude de la correspondance entre idéaux de $\mathfrak{S}$ et de $\bar{\mathfrak{S}}$, il est très important ce théorème:

Théorème 2. *Pour que $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{S}$ soit un idéal premier, il faut et il suffit que l'idéal complet $\bar{\mathfrak{p}}_0$ soit premier dans $\bar{\mathfrak{S}}$.*

La condition est *nécessaire:* — Si $\mathfrak{p}$ est premier, en prenant $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_0$, la relation I) du n°. antérieur nous donne $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$. Dans le premier cas, il est $\bar{\mathfrak{a}} \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_0$; dans le deuxième, il est $\bar{\mathfrak{b}} \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_0$.

La condition est *suffisante:* — Si $\bar{\mathfrak{p}}_0$ est premier, en prenant $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$, la relation II) du n°. antérieur nous donne $\bar{\mathfrak{a}}_0\bar{\mathfrak{b}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_0$, donc $\bar{\mathfrak{a}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_0$ ou $\bar{\mathfrak{b}}_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_0$. Dans le premier cas, il est $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$; dans le deuxième, il est $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$.

Dans le § 2 nous avons fait usage du symbole $C(\mathfrak{p})$ pour signifier l'ensemble complémentaire de $\mathfrak{p}$, dans $\mathfrak{S}$. Ici le même symbole désignera l'ensemble des idéaux qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{p}$. Il s'agit donc exactement des idéaux qui sont les éléments de l'ensemble $C(\bar{\mathfrak{p}}_0)$, complémentaire de $\bar{\mathfrak{p}}_0$, dans $\bar{\mathfrak{S}}$.

Corollaire 1. *Un idéal $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{S}$ est premier, si et seulement si $C(\mathfrak{p})$ est un μ-système.*

En fait, comme $\mathfrak{p}_0$ est un idéal premier réticulé, par conséquent complètement premier, il s'ensuit que $C(\mathfrak{p})$ est un système multiplicatif d'idéaux.

D'une façon analogue, nous avons:

Théorème 3. *Pour que $\mathfrak{x} \subseteqq \mathfrak{S}$ soit un idéal semi-premier de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que l'idéal complet $\mathfrak{x}_0$ soit semi-premier dans $\bar{\mathfrak{S}}$.*

Corollaire 2. *Un idéal $\mathfrak{x} \subseteqq \mathfrak{S}$ est semi-premier, si et seulement si $C(\mathfrak{x})$ contient les puissances des idéaux qu'il contient.*

En liaison avec les résultats que l'on vient d'établir, nous avons:

Théoréme 4. *Un idéal* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{S}$ *est premier, si et seulement si l'inclusion* $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, *où* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont des idéaux, entraîne* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ *ou* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

Théorème 5. *Un idéal* $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{S}$ *est semi-premier, si et seulement si l'inclusion* $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ *entraîne* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$.

Avant de poursuivre, on doit faire une *remarque*. L'usage du demi-anneau $\overline{\mathfrak{S}}$ que l'on fait dans ce paragraphe pour étudier la structure de $\mathfrak{S}$ est surtout du à la façon dont'on l'a choisi. Ce sera dans les paragraphes 5,6 et 7 que les résultats du § 3 seront d'une grande utilité.

3) **Usage de μ-systèmes et de π-systèmes particuliers.** Maintenant, d'une façon générale, même si $\mathfrak{g}$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{S}$, on fera l'emploi du symbole $C(\mathfrak{g})$ pour signifier l'ensemble des idéaux qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$, on a $C(\mathfrak{g}) \supseteq C(\mathfrak{h})$, et si $C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{h})$ on en conclut $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, toujours que l'on sait que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont des idéaux. Supposons même $\mathfrak{g} = \cup \mathfrak{b}_\mu$ un ensemble réunion d'idéaux $\mathfrak{b}_\mu$ et $\mathfrak{h} = \cup \mathfrak{c}_\nu$ un ensemble réunion d'idéaux $\mathfrak{c}_\nu$. Encore dans ce cas, la relation $C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{h})$ implique $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

Les raisonnements que nous allons faire resteront dans le cadre des raisonnements antérieurs. Quelques fois on les développera avec des μ-systèmes, d'autres avec des π-systèmes. Il s'agit cependant de *systèmes particuliers*, dont voici la définition, pour le cas des π-systèmes: le π-système $\mathfrak{P}_0^*$ est particulier, si l'ensemble réunion U_0 des idéaux qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}_0^*$ n'a aucun idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0^*$. On a alors $\mathfrak{P}_0^* = C(U_0)$.

En faisant intervenir les systèmes particuliers et les caractérisations des idéaux premiers et semi-premiers que nous avons faites dans le n°. précédent, on peut énoncer et démontrer des théorèmes analogues à ceux que l'on a donnés dans le § 2. Ainsi: I) Soient $\mathfrak{a}_0$ un idéal et $\mathfrak{P}_0^*$ un π-système particulier qui ne contient aucun idéal qui soit sous-idéal de $\mathfrak{a}_0$; alors, parmi les π-systèmes particuliers qui contiennent $\mathfrak{P}_0^*$ et n'ont aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}_0$, il y a un π-système maximal; II) dans un demi-anneau $\mathfrak{S}$ quelconque, soient $\mathfrak{M}_0^* = C(U_0)$ un μ-système particulier et $\mathfrak{a}_0$ un idéal sans sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0^*$; alors, tout idéal maximal $\mathfrak{q}$, parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et ne contiennent aucun sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0^*$, est un idéal premier; III) pour que l'ensemble réunion $\mathfrak{r}$ de certains idéaux soit un idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $C(\mathfrak{r})$ soit un π-système maximal, parmi les π-systèmes qui ne contiennent aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$ et sont de la forme $\mathfrak{P} = C(U)$.

La théorie du radical peut aussi être reproduite, en faisant usage de la définition suivante: le radical de $\mathfrak{a}$ est l'ensemble réunion de tous les idéaux $\mathfrak{n}$ tels que tout le μ-système de la forme $\mathfrak{M}^* = C(U)$, qui contient $\mathfrak{n}$, contient aussi un sous-idéal de $\mathfrak{a}$. Le radical est alors l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$. On arrive ainsi au radical $B(\mathfrak{a})$. De même, on pourrait arriver à un radical qui serait l'intersection de tous les idéaux semi-premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$ (par conséquent qui serait le seul idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, en remplaçant les μ-systèmes par les π-systèmes particuliers.

L'existance du radical, compte tenu de la définition ci-dessus, peut être établie très facilement. D'une part, il existe toujours des μ-systèmes de la forme $\mathfrak{M}^* = C(U)$ [et, partant, des π-systèmes de la forme $\mathfrak{P}^* = C(U)$], comme l'on reconnaît en prenant $\mathfrak{M}^*$ = ensemble totalité des idéaux de $\mathfrak{S}$. Alors, est $\mathfrak{M}_0^* = C(U_0) = \mathfrak{P}_0^*$, où U_0 est l'ensemble vide. D'autre part, si l'on considère $\mathfrak{a}$, dans tout μ-système de la forme $\mathfrak{M}^* = C(U)$ qui contient $\mathfrak{a}$, tel que $\mathfrak{M}_0^*$, il y a un sous-idéal de $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ lui-même) qui appartient à $\mathfrak{M}^*$.

§ 5. DÉFINITION ET CARACTÉRISATION DES μ-DEMI-ANNEAUX

1) **Définition.** On dit qu'un demi-anneau vérifie la *μ-condition*, s'il a la propriété suivante: — *En prenant un μ-système d'idéaux et une famille $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda\in L}$ d'idéaux, l'hypothèse que la famille est ordonnée par la relation d'inclusion et que chaque $\mathfrak{a}_\lambda$ n'a aucun sous-idéal dans le μ-système entraîne pour l'idéal $\mathfrak{a} = \cup\mathfrak{a}_\lambda$ la propriété de n'avoir aucun sous-idéal appartenant au μ-système.* Un demi-anneau vérifiant la μ-condition est appelé *μ-demi-anneau.* On exprime par rapport à $\bar{\mathfrak{S}}$ la μ-condition, en disant: — Si $\{(\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0\}_{\lambda\in L}$ est une famille ordonnée d'idéaux complets et si aucun des $(\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0$ n'a élément dans un m-système de $\bar{\mathfrak{S}}$, il en est de même de l'idéal $(\overline{\cup\mathfrak{a}_\lambda})_0$.

On introduit de façon analogue une *π-condition* et un π-demi-anneau. Le théorème qui suit est valable.

Théorème 6. *Tout π-demi-anneau est un μ-demi-anneau et réciproquement.*

En fait, la π-condition entraîne la μ-condition, car tout μ-système est un π-système. Réciproquement, si la μ-condition a lieu, prenons un p-système d'éléments de $\bar{\mathfrak{S}}$ et une famille $\{(\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0\}_{\lambda\in L}$ d'idéaux, chacun d'eux n'ayant aucun élément dans le p-système; alors $(\overline{\cup\mathfrak{a}_\lambda})_0$ n'intersecte pas le p-système, puisque il n'intersecte aucun des μ-systèmes dont'il est la réunion.

2) **Une caractérisation des μ-demi-anneaux.** Il est très intéréssante la caractérisation des μ-demi-anneaux donnée par ce

Théorème 7. *Pour qu'un demi-anneau $\mathfrak{S}$ soit un μ-demi-anneau, il faut et il suffit que tout idéal réticulé et semi-premier de $\bar{\mathfrak{S}}$ soit complet.*

La condition est *nécessaire:* — Supposons $\bar{\mathfrak{r}}$ un idéal réticulé et semi-premier de $\bar{\mathfrak{S}}$. L'ensemble $C(\bar{\mathfrak{r}})$ est un p-système d'éléments de $\bar{\mathfrak{S}}$. Nous allons voir qu'il y a, parmi les idéaux de $\mathfrak{S}$ appartenant à $\bar{\mathfrak{r}}$, des idéaux maximaux. Prenons un ensemble ordonné $\{\mathfrak{r}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de tels idéaux. Aucun de ces idéaux n'a sous-idéal appartenant à $C(\bar{\mathfrak{r}})$, puisque $\bar{\mathfrak{r}}$ est un idéal réticulé. Du fait que $\mathfrak{S}$ est un μ-demi-anneau, $\cup\mathfrak{r}_\alpha$ n'a aucun sous-idéal appartenant à $C(\bar{\mathfrak{r}})$. Alors, d'après le principe de maximum, il y aura un idéal maximal $\mathfrak{h}\in\bar{\mathfrak{r}}$. On aura $\mathfrak{h}=\mathfrak{r}$, car l'inclusion $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{r}$ implique l'existence de $x\in\mathfrak{r}$, $x\notin\mathfrak{h}$, avec $(x)\in\mathfrak{r}$; l'idéal $(\mathfrak{h},(x))$, somme deux idéaux appartenant à $\mathfrak{r}$ appartiendrait à $\bar{\mathfrak{r}}$ et $\mathfrak{h}$ ne serait pas maximal. Par conséquent, l'égalité $\mathfrak{h}=\mathfrak{r}$ est valable et on a $\mathfrak{h}\in\bar{\mathfrak{r}}$, ce qui entraîne $\mathfrak{r}=\bar{\mathfrak{r}}_0$.

La condition est *suffisante:* Il faut montrer que, si l'on a une famille ordonnée $\{(\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0\}_{\lambda\in L}$ d'idéaux complets aucun d'eux n'ayant élément dans un m-système $\mathfrak{M}^*$, on a aussi $\mathfrak{M}^*\cap(\overline{\cup\mathfrak{g}_\lambda})_0 = \emptyset$. Soit $\mathfrak{r}_\lambda$ le radical de $(\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. On peut faire les remarques suivantes: 1) $\{\bar{\mathfrak{r}}_\lambda\}_{\lambda\in L}$ est une famille ordonné d'idéaux et $\cup\bar{\mathfrak{r}}_\lambda$ est un idéal; 2) $\cup\bar{\mathfrak{r}}_\lambda$ est un idéal réticulé; 3) chaque $\bar{\mathfrak{r}}_\lambda$ est un idéal complétement semi-premier et il en est de même de $\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda$. Alors l'idéal réticulé et semi-premier $\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda$ est, par hypothèse, un idéal complet. D'après la définition du radical, aucun des $\bar{\mathfrak{r}}_\lambda$ n'a d'élément dans $\mathfrak{M}^*$, et il en est de même pour $\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda$: $\mathfrak{M}^* \cap (\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda) = \emptyset$. L'idéal support de $\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda$ est $\cup \mathfrak{r}_\lambda$, donc $\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda = \cup (\bar{\mathfrak{r}}_\lambda)_0 = (\overline{\cup \mathfrak{r}_\lambda})_0$. Compte tenu de l'inclusion $(\overline{\cup \mathfrak{g}_\lambda})_0 \subseteq (\overline{\cup \mathfrak{r}_\lambda})_0$, on a $\mathfrak{M}^* \cap (\overline{\cup \mathfrak{g}_\lambda})_0 \subseteq \mathfrak{M}^* \cap (\overline{\cup \mathfrak{r}_\lambda})_0 = \mathfrak{M}^* \cap (\cup \bar{\mathfrak{r}}_\lambda) = \emptyset$. Le théorème est démontré.

Corollaire 1. *Pour ques $\mathfrak{S}$ soit un μ-demi-anneau, il faut et il suffit que le radical $B(\mathfrak{a})$, de chaque idéal réticulé $\bar{\mathfrak{a}}$, de $\bar{\mathfrak{S}}$, soit complet.*

Corollaire 2. *Pour que $\mathfrak{S}$ soit un μ-demi-anneau, il faut et il suffit que tout idéal réticulé et premier de $\bar{\mathfrak{S}}$ soit complet.* Pour la suffisance de la condition, on doit aussi tenir compte des deux faits suivants: 1) tout idéal premier minimal appartenant à un idéal réticulé est un réticulé; 2) les propriétés X) et XII) du § 4, n° 1, ont lieu.

3) **Propriétés des μ-demi anneaux.** Nous donnerons maintenant quelques propriétés de μ-demi-anneaux, dont'on se servira pour établir une autre caractérisation.

Théorème 8. *Dans un μ-demi-anneau, toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie.*

Prenons une chaîne $\{\mathfrak{r}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ dans les conditions de l'énoncé. La famille $\{(\bar{\mathfrak{r}}_\lambda)_0\}_{\lambda \in L}$ est de même une chaîne dans $\bar{\mathfrak{S}}$. L'idéal $\cup (\bar{\mathfrak{r}}_\lambda)_0$ est réticulé et complètement semi-premier, donc complet. Alors $\cup (\bar{\mathfrak{r}}_\lambda)_0 = (\overline{\cup \mathfrak{r}_\lambda})_0$, par conséquent, d'après le th. 1, § 4, n° 1) $\cup \mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r}_\beta$, $(\beta \in L)$.

Corollaire: *Un μ-demi-anneau satisfait à la condition de chaîne ascendante pour les idéaux, si et seulement si toute chaîne ascendante d'idéaux avec le même radical est finie.*

Théorème 9. *Dans un μ-demi-anneau, pour que $\mathfrak{p}$ soit un idéal premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$, il faut et il suffit que $\bar{\mathfrak{p}}_0$ soit un idéal premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$.*

La condition est *nécessaire:* — Dans les conditions de l'énoncé, on a $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}_0 \subseteq \bar{\mathfrak{p}}_0$, ou $\bar{\mathfrak{p}}_0$ est un idéal premier. Soit $\bar{\mathfrak{p}}_1$ un idéal premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{p}}_0$. On a $\bar{\mathfrak{a}}_0 \subseteq \bar{\mathfrak{p}}_1 \subseteq \bar{\mathfrak{p}}_0$. On sait que $\bar{\mathfrak{p}}_1$ est un idéal réticulé. En outre, la μ-condition entraîne que $\bar{\mathfrak{p}}_1$ est complet: $\bar{\mathfrak{p}}_1 = (\bar{\mathfrak{p}}_1)_0$, On a $(\bar{\mathfrak{p}}_1)_0 \subseteq \bar{\mathfrak{p}}_0$, donc $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$. Alors on a $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ et $\bar{\mathfrak{p}}_0 = (\bar{\mathfrak{p}}_1)_0$ est un idéal premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$.

La condition est *suffisante:* — Soit $\bar{\mathfrak{a}}_0 \subseteq \bar{\mathfrak{p}}_0$ et supposons ce dernier idéal un idéal premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$. Si le support $\mathfrak{p}$ n'est pas un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, ou pourra écrire $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}_1$ est l'idéal minimal en question. Alors $\bar{\mathfrak{a}}_0 \subseteq (\bar{\mathfrak{p}}_1)_0 \subset \bar{\mathfrak{p}}_0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Des raisonnements analogues nous conduisent à la proposition suivante:

Théorème 10. *Dans un μ-demi-anneau, pour que $\mathfrak{r}$ soit l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $\bar{\mathfrak{r}}_0$ soit l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$.*

Ce théorème nous montre que, dans un μ-demi-anneau, le radical $B(\mathfrak{a})$, de $\mathfrak{a}$, est le support du radical $B(\bar{\mathfrak{a}}_0)$, de $\bar{\mathfrak{a}}_0$: $(\overline{B(\mathfrak{a})})_0 = B(\bar{\mathfrak{a}}_0)$.

Si l'on tient compte d'une propriété du radical d'un idéal réticulé signalée dans le § 3, nous pouvons dire:

Théorème 11. *Dans un μ-demi-anneau, le radical $B(\mathfrak{a})$ est l'ensemble réunion des idéaux $\mathfrak{v}$ tels que $\mathfrak{v}^\varrho \subseteqq \mathfrak{a}$.*

Voici maintenant la nouvelle caractérisation des μ-demi-anneaux, à laquelle nous avons faite une référence au commencement de ce numéro:

Théorème 12. *Pour que $\mathfrak{S}$ soit un μ-demi-anneau, il faut et il suffit que $\mathfrak{S}$ possède les deux propriétés qui suivent:* 1) *$\mathfrak{S}$ satisfait à la condition de chaîne ascendante pour les idéaux semi-premiers*; 2) *si $\mathfrak{r}$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{r}}_0$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$.*

Nous savons déjà que les deux propriétés traduisent des conditions nécessaires pour que $\mathfrak{S}$ soit un μ-demianneau. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{S}$ a les deux propriétés. Si $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ est une famille ordonnée d'idéaux et chaque $\mathfrak{a}_\lambda$ n'a aucun sous-idéal appartenant à un π-système $\mathfrak{P}^*$, alors, en passant aux radicaux $\mathfrak{r}_\lambda$, des $\mathfrak{a}_\lambda$, la propriété 1) entraîne $\cup \mathfrak{r}_\nu = \mathfrak{r}_\alpha$, $(\alpha \in L)$. Les $(\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0$ n'ont aucun élément dans $\mathfrak{P}^*$, et il en est de même pour les $(\bar{\mathfrak{r}}_\lambda)_0$, puisque ceux-ci, d'après la propriété 2), sont les radicaux des $(\bar{\mathfrak{a}}_\lambda)_0$. Alors $(\overline{\cup \mathfrak{r}_\lambda})_0 = (\bar{\mathfrak{r}}_\alpha)_0$, n'a aucun élément dans $\mathfrak{P}^*$, et il en est de même pour $(\overline{\cup \mathfrak{a}_\lambda})_0$, ce qui achève la démonstration.

§ 6. Idéaux en relation avec un idéal. Idéal adjoint d'un idéal. Idéaux primaux. Composantes isolées. Composantes principaux.

1) **Idéaux premiers et non-premiers à droite à un idéal.** — Pour faire une théorie de représentation des idéaux dans les μ-demi-anneaux, on doit développer certains raisonnements qui se rapprochent de ceux que l'on a déjà faits dans le § 3. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal d'un demi-anneau $\mathfrak{S}$. On définit le *quotient à droite* $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal, comme l'ensemble réunion des idéaux $\mathfrak{r}$ tels que $\mathfrak{r}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$. Cette définition coïncide avec celle que l'on a précisement donné dans le § 3. En supposant $\mathfrak{a} \neq \emptyset \neq \mathfrak{b}$ et en passant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$, on voit que l'ensemble en question est l'idéal support de l'idéal réticulé $(\bar{\mathfrak{a}}_0:\mathfrak{b})_d$. Du fait que $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d.\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$, on conclut la relation $(\bar{\mathfrak{a}}_0:\mathfrak{b})_d = ((\overline{\mathfrak{a}:\mathfrak{b}})_d)_0$. On donnera cet énoncé:

Théorème 13. *Pour chaque paire d'idéaux non vides d'undemi-anneau $\mathfrak{S}$, on a $((\overline{\mathfrak{a}:\mathfrak{b}})_d)_0 = (\bar{\mathfrak{a}}_0:\mathfrak{b})_d$. Cette relation s'étend au cas $\mathfrak{a} = \emptyset$.*

Lorsque $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d = \mathfrak{a}$, on dit que $\mathfrak{b}$ est *premier à droite à* $\mathfrak{a}$; autrement, si $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}$, on dit que $\mathfrak{b}$ est *non-premier à droite à* $\mathfrak{a}$.

Dans le premier cas l'élément $\mathfrak{b}$ n'est pas en relation avec l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}_0$; dans le deuxième, $\mathfrak{b}$ est en relation avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$. De cette façon, les systémes multiplicatifs $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_0'$ des éléments non en relation avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$ et en relation avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$ ont ici une autre signification.

Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \neq \mathfrak{S}$ est un idéal premier, les idéaux non-premiers à droite à $\mathfrak{p}$ sont ses sous-idéaux; si $\mathfrak{a} = \emptyset$, tout idéal $\mathfrak{b} \neq \emptyset$ est premier à droite à $\mathfrak{a}$; et l'idéal vide est premier. Les idéaux non-vides non-premiers à droite à $\emptyset$ forment un système vide.

2) **Idéaux en relation avec un idéal.** Soit $\mathfrak{S}$ un demi-anneau quelconque. Un idéal $\mathfrak{h}$ est dit *en relation* avec l'idéal $\mathfrak{a} \neq \emptyset$, s'il a les propriétés suivantes: 1) Il est la réunion $\mathfrak{h} = \cup\, \mathfrak{b}_\alpha$ d'idéaux $\mathfrak{b}_\alpha$ non-premiers à droite à $\mathfrak{a}$; la somme $(\mathfrak{b}_\alpha, \mathfrak{b}_{\alpha'}, \ldots)$ d'un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{b}_\alpha$ est encore un idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$. Cette définition revient au même de dire: 1′) Chaque élément de $\mathfrak{h}$ engendre un idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$; 2′) si $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{h}$, l'idéal $((x_1,) \ldots, (x_n))$ est non-premier à droite à $\mathfrak{a}$. [Si $\mathfrak{a} = \emptyset$, le seul idéal en relation avec $\mathfrak{a}$ est l'idéal vide].

En passant à l'idéal réticulé complet $\bar{\mathfrak{a}}_0$, chaque $\mathfrak{b}_\alpha$ est un élément en relation avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$. L'idéal $\mathfrak{h}$ peut être considéré le support de l'idéal réticulé $\bar{\mathfrak{h}}$, de $\bar{\mathfrak{S}}$, engendré par les $\mathfrak{b}_\alpha$; et $\bar{\mathfrak{h}}$ est un idéal en relation avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$, par éléments. Réciproquement, si l'on suppose $\bar{\mathfrak{h}}$ un idéal réticulé en relation, par éléments, avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$, son support est un idéal en relation avec $\mathfrak{a}$. Au lieu de l'idéal $\bar{\mathfrak{h}}$, on peut considérer l'idéal réticulé $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}$, engendré par les idéaux (x). On a $\bar{\bar{\mathfrak{h}}} \subseteq \bar{\mathfrak{h}}$, bien que $\mathfrak{h}$ soit le support des deux idéaux.

Le cas le plus simple d'un idéal $\mathfrak{h}$ est donné par un idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$.

Nous allons nous occuper, en particulier, des μ-demi-anneaux. Les résultats que l'on va établir se condensent dans la proposition que voici:

Théorème 14. *En supposant $\mathfrak{S}$ un μ-demi-anneau, il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{h}$ soit un idéal en relation avec $\mathfrak{a}$, que $\mathfrak{h}$ soit un idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$. Tout idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$ peut être plongé dans un idéal non-premier à droite maximal $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{a}$, lequel est un idéal premier. Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux non-premiers à droite à $\mathfrak{a}$ maximaux (tous eux contenant $\mathfrak{a}$) et les idéaux maximaux, par éléments, appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$.*

Prenons $\mathfrak{a}$ et l'idéal $\mathfrak{h} = \cup\, \mathfrak{b}_\alpha$ en relation avec $\mathfrak{a}$. En passant au idéal $\bar{\mathfrak{h}}$, nous savons que ce dernier idéal peut être plongé dans un idéal maximal $\bar{\mathfrak{p}}$ appartenant, par éléments, à $\bar{\mathfrak{a}}_0$, lequel est premier, réticulé et contient $\bar{\mathfrak{a}}_0$ (§ 3). Alors $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}_0$ est complet. Son support $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{a}$ et on a $\mathfrak{p} \in \bar{\mathfrak{p}}_0$. Cela signifie que $\mathfrak{p}$ est un idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$ et le même arrive pour $\mathfrak{h}$. Réciproquement, tout idéal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$ est en relation avec $\mathfrak{a}$. En passant à la deuxième partie, remarquons que $\mathfrak{q}$ est premier et qu'il est un idéal maximal non-premier à droite à $\mathfrak{a}$, puisque si l'on avait $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ était non-premier à droite à $\mathfrak{a}$, nous aurions aussi $\bar{\mathfrak{p}}_0' \supset \mathfrak{p}_0$ et $\bar{\mathfrak{p}}_0$ serait un idéal en relation avec $\bar{\mathfrak{a}}_0$, par éléments. Cette contradiction achève la démonstration. La dernière partie est maintenant immédiate.

3) **Idéaux adjoints. Idéaux primaux.** Soit $\mathfrak{S}$ un demi-anneau quelconque. Prenons $a \neq \emptyset$, $\mathfrak{S}$, ainsi que l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}_0$. L'idéal adjoint, par éléments, de $\bar{\mathfrak{a}}_0$, est l'idéal réticulé $\bar{\mathfrak{w}}$, de $\bar{\mathfrak{S}}$, composé de tous les idéaux $\mathfrak{c}$ tels que l'on a, en supposant $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}'_0$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{M}'_0$. On sait que $\bar{\mathfrak{w}} = \cap\, \bar{\mathfrak{p}}_\alpha$, où les $\bar{\mathfrak{p}}_\alpha$ sont les idéaux maximaux, par éléments, appartenant à $\bar{\mathfrak{a}}_0$. On appelle l'idéal $\mathfrak{w}$, support de $\bar{\mathfrak{w}}$, *l'idéal adjoint de* $\mathfrak{a}$. Comme les idéaux $\bar{\mathfrak{p}}_\alpha$ sont des idéaux réticulés, on a $\mathfrak{w} = \cap\, \mathfrak{p}_\alpha$ [§ 4, n°. 1, prop. X]. On peut dire:

Théorème 15. *Dans un demi-anneau quelconque, l'idéal adjoint* $\mathfrak{w}$, *de* $\mathfrak{a}$, *est l'intersection de tous les supports des idéaux maximaux appartenant à* $\bar{\mathfrak{a}}_0$, *par éléments. L'énoncé inclut les cas* $\mathfrak{a}=\emptyset$, $\mathfrak{S}$, *pour lesquels* $\mathfrak{w}=\emptyset$.

COROLLAIRE: *Dans un* μ*-demi-anneau, l'idéal adjoint* $\mathfrak{w}$, *de* $\mathfrak{a}$, *est l'intersection de tous les idéaux maximaux non-premiers à droite à* $\mathfrak{a}$.

L'idéal $\mathfrak{a}$ d'un μ-demi-anneau est dit *primal*, si $\bar{\mathfrak{a}}_0$ est un idéal primal, par éléments. D'après la dernière partie du théorème 14 et les propriétés des idéaux primaux, par éléments, rappelées dans le § 3, on a les deux propositions suivantes:

Théorème 16. *Dans un* μ*-demi-anneau, pour que* $\mathfrak{a}$ *soit un idéal primal, il faut et il suffit qu'il y ait un seul idéal maximal non-premier à droite à* $\mathfrak{a}$.

Théorème 17. *Dans un* μ*-demi-anneau, pour que* $\mathfrak{a}$ *soit un idéal primal, il faut et il suffit que la somme de deux idéaux non-premiers à droite à* $\mathfrak{a}$ *soit un idéal non-premier à droite à* $\mathfrak{a}$.

4) **Composantes isolées.** Prenons un idéal $\mathfrak{a}$ d'un demi-anneau quelconque, ainsi qu'un μ-système $\mathfrak{M}^*$ d'idéaux. Ce dernier peut être vide. La *composante isolée* $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}$ est définie comme l'idéal support de l'idéal $(\bar{\mathfrak{a}}_0)_{\mathfrak{M}^*}$, où $\mathfrak{M}^*$ est maintenant un m-système de $\bar{\mathfrak{S}}$.

L'idéal $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal tel qu'il existe en effet $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}^*$ pour lequel $\mathfrak{b}\mathfrak{m}\subseteqq\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{b}\mathfrak{m}\in\bar{\mathfrak{a}}_0$ et $\mathfrak{b}\in(\bar{\mathfrak{a}}_0)_{\mathfrak{M}^*}$. Alors $\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}$. On obtient de la sorte la composante isolée. Ainsi:

Théorème 18. *Dans un demi-anneau quelconque, la composante isolée* $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}$, *par rapport à* $\mathfrak{M}^*$, *est la réunion de* $\mathfrak{a}$ *et de tous les idéaux* $\mathfrak{b}$, *de* $\mathfrak{S}$, *pour lesquels il existe en effet* $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}^*$ *tel que* $\mathfrak{b}\mathfrak{m}\subseteqq\mathfrak{a}$. Si l'on sait que $\mathfrak{M}^*\neq\emptyset$, alors $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}$ peut être définie comme la réunion des idéaux $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{a}=\emptyset$ on a $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}=\emptyset$; si $\mathfrak{M}^*=\emptyset$, on a $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}^*}=\mathfrak{a}$.

En supposant $\mathfrak{S}$ un μ-demi-anneau, un idéal $\mathfrak{q}$ non-premier à droite à $\mathfrak{a}$ et maximal est premier. Alors, $\mathfrak{M}^*=C(\mathfrak{q})$ définit $\mathfrak{a}_{C(\mathfrak{q})}=\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$, que l'on appelle *composante principale définie par* $\mathfrak{q}$. Nous avons la proposition suivante:

Théorème 19. *Dans un* μ*-demi-anneau, pour que* $\mathfrak{a}$ *soit primal, il faut et il suffit que l'on ait* $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$, *où* $\mathfrak{q}$ *est supposé un idéal maximal non-premier à droite à* $\mathfrak{a}$. Cela résulte du fait que $\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$ est le support de $\bar{\mathfrak{a}}_0(\bar{\mathfrak{q}}_0)=\bar{\mathfrak{a}}_{0C(\bar{\mathfrak{q}}_0)}$.

COROLLAIRE: *S'il y a, dans un* μ*-demi-anneau, plusieurs idéaux maximaux* $\mathfrak{q}$ *non-premiers à droite à* $\mathfrak{a}$, *on ne peut avoir, pour aucun* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$.

Nous finissons encore par un théorème que l'on trouve, comme pour la plupart, chez W. KRULL.

Théorème 20. *Dans un* μ*-demi-anneau, l'idéal* $\mathfrak{a}$ *est l'intersection de toutes ses composantes principales:* $\mathfrak{a}=\bigcap\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$. Nous avons déjà dit dans le § 3, que, dans un demi-anneau réticulé, chaque idéal réticulé est l'intersection de toutes ses composantes principales. De cette façon, si l'on passe à l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}_0$, on a $\bar{\mathfrak{a}}_0=\bigcap\bar{\mathfrak{a}}_0(\bar{\mathfrak{q}}_0)$. D'autre part, $\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$ est le support de $\bar{\mathfrak{a}}_0(\bar{\mathfrak{q}}_0)$. Alors la relation XII), du même § 3, nous donne $\mathfrak{a}=\bigcap\mathfrak{a}(\mathfrak{q})$.

§ 7. Intersection d'idéaux. Représentations

1) **Idéaux sous-irréductibles.** Lorsqu'un idéal $\mathfrak{b}$ est l'intersection d'une famille $\{\mathfrak{g}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, d'idéaux, en posant $\mathfrak{b} = \bigcap \mathfrak{g}_\lambda$ on dit que l'on a une *représentation* de $\mathfrak{b}$.

L'idéal $\mathfrak{b}$ est *sous-irréductible*, si toute sa représentation implique $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{b}$, pour un certain $\mathfrak{g}_\lambda$: $\mathfrak{b}$ est *irréductible*, s'il n'a pas une représentation finie au moyen de diviseurs propres. De cette façon, tout idéal sous-irréductible est irréductible.

Théorème 21. *Un idéal $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ d'un demi-anneau quelconque a toujours une représentation par des idéaux sous-irréductibles.*

Prenons $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ ainsi que la totalité T des éléments qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{a}$. Si $t \in T$, considérons la famille des idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et ne contiennent pas t. Cette famille constitue un système partiellement ordonné, non vide et inductif. Désignons par $\mathfrak{g}_t$ un élément maximal du système. On a $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{g}_t$. Nous allons reconnaître que chaque $\mathfrak{g}_t$ est sous-irréductible. Si l'on avait $\mathfrak{g}_t = \bigcap \mathfrak{h}_\sigma^{(t)}$, $\mathfrak{h}_\sigma^{(t)} \supset \mathfrak{g}_t$, on aurait aussi $t \notin \mathfrak{h}_{\sigma'}^{(t)}$, pour une certaine valeur σ', de σ, et cela serait en contradiction avec la maximalité de $\mathfrak{g}_t$.

Le théorème ne fait pas d'exception pour $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$. Ce dernier idéal est considéré sous-irréductible. L'idéal $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ peut ne pas être sous-irréductible, car l'idéal nucléaire peut être vide. Un *demi-anneau est dit sous-irréductible*, si son idéal nucléaire $\mathfrak{J}$ est sous-irréductible. Alors on a $\mathfrak{J} \neq \emptyset$.

Théorème 22. — *Dans un μ-demi-anneau, un idéal irréductible $\mathfrak{s} \neq \emptyset$ est primal.*

En effet, si $(\mathfrak{s}:\mathfrak{b}_1)_d \supset \mathfrak{s}$ et $(\mathfrak{s}:\mathfrak{b}_2)_d \supset \mathfrak{s}$, on a aussi $(\mathfrak{s}:(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2))_d = (\mathfrak{s}:\mathfrak{b}_1)_d \cap (\mathfrak{s}:\mathfrak{b}_2) \supset \mathfrak{s}$, car, autrement, $\mathfrak{s}$ ne serait pas irréductible. Alors, si $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal non-premier à droite à $\mathfrak{s}$, l'idéal $(\mathfrak{q}, \mathfrak{b})$ quel que soit $\mathfrak{b}$ non-premier à droite à $\mathfrak{s}$, est non-premier à droite à $\mathfrak{s}$. Par conséquent, $(\mathfrak{q}, \mathfrak{b}) \subseteqq \mathfrak{q}$, ce qui entraîne $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{q}$. Il y a un seul idéal maximal non-premier à droite à $\mathfrak{s}$.

Corollaire: *Dans un μ-demi-anneau, tout idéal $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ a une représentation au moyen d'idéaux primaux. Le corollaire s'étend au cas $\mathfrak{a} = \emptyset$.*

Si l'on passe de l'idéal irréductible $\mathfrak{b}$ à l'idéal $\bar{\mathfrak{b}}_0$, de $\bar{\mathfrak{S}}$, on ne peut pas avoir $\bar{\mathfrak{b}}_0 = \bar{\mathfrak{h}} \cap \bar{\mathfrak{g}}$, si $\bar{\mathfrak{h}} \supset \bar{\mathfrak{b}}_0$ et $\bar{\mathfrak{g}} \supset \bar{\mathfrak{b}}_0$ et si l'on suppose $\bar{\mathfrak{h}}$ et $\bar{\mathfrak{g}}$ des idéaux réticulés [prop X), § 4., n°. 1)]. Il s'agit d'un résultat à fixer.

2) **Représentations irrédundantes.** Prenons, dans un demi-anneau quelconque, la représentation

$$\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{g}_\nu, \qquad (\nu \in N). \tag{1}$$

On dit qu'il s'agit d'une représentation *irrédundante*, si aucun des $\mathfrak{g}_\nu$ ne peut être écarté; que la représentation est *réduite*, si aucun des $\mathfrak{g}_\nu$ ne peut être remplacé par un diviseur propre; et on dit que la représentation est *normée*, si elle est irrédundante et réduite.

Supposons maintenant que (1) est une représentation irrédundante d'un idéal $\mathfrak{a} \neq \emptyset$, avec les $\mathfrak{g}_\nu$ irréductibles. La représentation correspondante

$$\bar{\mathfrak{a}}_0 = \bigcap (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0, \qquad (\nu \in N), \tag{2}$$

est une représentation irrédundante au moyen des idéaux $(\bar{\mathfrak{g}}_0)_0$, lesquels, comme l'on a vu dans le n°. antérieur, ne peuvent pas être une intersection de deux idéaux réticulés les contenant proprement. Nous appelerons (2) *faiblement réduite*, si aucun des $(\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0$ ne peut pas être remplacé par un idéal réticulé qui soit son diviseur propre. En fait, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemma. *La représentation (2) est faiblement réduite.*

Si l'on pourrait avoir

$$\bar{\mathfrak{a}}_0 = (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0 \cap \Big(\bigcap_{\nu\neq\lambda} (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0\Big) = \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda \cap \Big(\bigcap_{\nu\neq\lambda} (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0\Big), \quad \text{avec} \quad \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda \supset (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0, \qquad (\lambda\in N), \tag{3}$$

où $\bar{\mathfrak{g}}'_\lambda$ est supposé réticulé, le fait que $\bigcap\limits_{\nu\neq\lambda} (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0 \subsetneqq (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$ nous amenerait à

$$(\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0 \subseteqq \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda \cap \Big((\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0, \bigcap_{\nu\neq\lambda} (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0\Big), \tag{4}$$

où le deuxième membre est l'intersection de deux idéaux contenant proprement $(\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. Soit $\bar{\mathfrak{h}}$ le deuxième membre en question. Nous allons reconnaître l'égalité $\bar{\mathfrak{h}} = (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. Si (4) est valable, prenons $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}'_\lambda = (\mathfrak{b}_\lambda, \mathfrak{c}) \in \bar{\mathfrak{h}}$, avec $\mathfrak{b}'_\lambda \in \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda$, $\mathfrak{b}_\lambda \in (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$, $\mathfrak{c} \in \bigcap (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0$, $(\nu\neq\lambda)$. Comme l'on a $(\mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{c}) \in \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda$, on a aussi $\mathfrak{c} \in \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda$, par conséquent $\mathfrak{c} \in \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda \cap \big(\bigcap (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0\big) = \bar{\mathfrak{a}}_0 \subseteqq (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. De cette façon, on voit que $\mathfrak{x} = (\mathfrak{b}_\lambda, \mathfrak{c}) \in (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. C'est le résultat annoncé. D'autre part, on aurait

$$(\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0 = \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda \cap \Big(\overline{\big(\mathfrak{g}_\lambda, \bigcap_{\nu\neq\lambda} \mathfrak{g}_\nu\big)}\Big)_0, \tag{5}$$

comme nous allons le démontrer. Soit $\mathfrak{y}$ un idéal appartenant au deuxième membre de (5). On a $\mathfrak{y} \subseteqq (\mathfrak{g}_\lambda, \bigcap\limits_{\nu\neq\lambda} \mathfrak{g}_\nu)$. Si $y\in\mathfrak{y}$, en posant $y = \Sigma(g_\lambda^{(i)} + h_\lambda^{(i)})$, avec $g_\lambda^{(i)} \in \mathfrak{g}_\lambda$, $h_\lambda^{(i)} \in \bigcap\limits_{\lambda\neq\lambda} \mathfrak{g}_\nu$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, on voit que $y \in ((g_\lambda^{(1)}), \ldots, (g_\lambda^{(n)}), (h_\lambda^{(1)}), \ldots, (h_\lambda^{(n)}))$ et que $(y) \in \bar{\mathfrak{g}}'_\lambda \cap ((\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0, \cap (\bar{\mathfrak{g}}_\nu)_0)$. Dans le raisonnement ci-dessus, nous avons vu que $(y) \in (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. Pour chaque $y\in\mathfrak{y}$, on obtient $y\in\mathfrak{g}_\lambda$, ce qui entraîne $\mathfrak{y} \subseteqq \mathfrak{g}_\lambda$ et $\mathfrak{y} \in (\bar{\mathfrak{g}}_\lambda)_0$. Le résultat (5) que l'on vient d'établir est en contradiction avec un résultat cité dans le n°. antérieur. Le lemme est établi.

Théorème 23. *Dans un demi-anneau quelconque, tout idéal qui a une représentation irrédundante au moyen d'idéaux irréductibles, en a aussi une normée.*

En prenant (1) avec les $\mathfrak{g}_\nu$ irréductibles, on peut affirmer qu'elle est réduite, car autrement, de

$$\mathfrak{a} = \cap\, \mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{g}'_\lambda \cap \Big(\bigcap_{\nu\neq\lambda} \mathfrak{g}_\nu\Big), \quad \mathfrak{g}'_\lambda \supset \mathfrak{g}_\lambda, \qquad (\nu\in N),$$

en passant à l'idéal complet $\bar{\mathfrak{a}}_0$ et à ses représentations correspondantes (aussi avec l'intervention d'idéaux complets), on arriverait à une contradiction avec le lemme antérieur.

3) **Représentations réduites.** Soit

$$\mathfrak{a} = \cap\, \mathfrak{g}_\nu, \qquad (\nu\in N), \tag{6}$$

une représentation d'un idéal $\mathfrak{a}$ d'un demi-anneau quelconque au moyen des idéaux

$\mathfrak{g}_\nu$. D'après les relations $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d = (\cap \mathfrak{g}_\nu:\mathfrak{b})_d = \cap(\mathfrak{g}_\nu:\mathfrak{b})_d$, on voit que l'hypothèse $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}$ implique, pour un certain $\lambda \in N$, $(\mathfrak{g}_\lambda:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{g}_\lambda$. Réciproquement, en prenant (6) et en supposant la représentation réduite, l'hypothèse $(\mathfrak{g}_\lambda:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{g}_\lambda$, pour un certain $\lambda \in N$, implique $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}$. Ainsi:

Théorème 24. *Si* (6) *est une représentation réduite d'un idéal* $\mathfrak{a}$ *d'un demi-anneau quelconque, alors, pour que* $\mathfrak{b}$ *soit un idéal non-premier à droite à* $\mathfrak{a}$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{a}$ *soit non-premier à droite à un certain* $\mathfrak{g}_\nu$.

COROLLAIRE: *Si, dans un μ-demi-anneau,* (6) *est une représentation réduite de* $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ *au moyen d'idéaux primaux, alors, pour que* $\mathfrak{a}$ *soit primal, il faut et il suffit que l'on ait, pour la réunion* $\cup \mathfrak{w}_\lambda$, *des idéaux adjoints des* $\mathfrak{g}_\nu$, *et pour l'idéal* $\mathfrak{w}$, *adjoint de* $\mathfrak{a}$, *les relations* $\mathfrak{w} = \cup \mathfrak{w}_\lambda = \mathfrak{w}_\alpha$, *où* $\alpha \in N$.

La condition est *nécessaire:* Si $\mathfrak{a}$ est primal, nous savons que $\mathfrak{w}$ est non-premier à droite à $\mathfrak{a}$. Par conséquent, on a $\mathfrak{w} \subseteqq \mathfrak{w}_\alpha$, pour un certain $\alpha \in N$. D'autre part, quel que soit $\mathfrak{w}_\nu$, on a aussi $\mathfrak{w}_\nu \subseteqq \mathfrak{w}$, ce qui entraîne $\cup \mathfrak{w}_\nu \subseteqq \mathfrak{w} \subseteqq \mathfrak{w}_\alpha$, d'où les relations de l'énoncé.

La condition est *suffisante:* En prenant un idéal maximal $\mathfrak{q}$ non-premier à droite à $\mathfrak{a}$, l'inclusion $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{w}_\alpha$ sera valable. Comme $\mathfrak{w}_\alpha$ est contenu dans idéal maximal $\mathfrak{q}'$ non-premier à droite à $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{w}_\alpha \subseteqq \mathfrak{q}'$, ce qui entraîne $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{a}$ est primal.

Pour arriver à un certain théorème d'univocité, on a encore besoin de la proposition suivante:

Théorème 25. *Dans un μ-demi-anneau, si l'on suppose* (6) *une représentation réduite de* $\mathfrak{a}$ *au moyen d'idéaux primaux, il existe, dans la famille* $\{\mathfrak{w}_\nu\}_{\nu \in N}$ *des idéaux adjoints des* $\mathfrak{g}_\nu$, *des idéaux maximaux par rapport à l'inclusion.*

Le théorème résulte de deux faits très simples. D'une part, dans un μ-demi-anneau, l'idéal adjoint d'un idéal semi-premier. D'autre part, dans un μ-demi-anneau, toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie.

Soit, dans un μ-demi-anneau, la représentation réduite

$$\mathfrak{a} = \cap \mathfrak{g}_\nu, \qquad (\nu \in N), \tag{7}$$

au moyen d'idéaux primaux. Prenons les idéaux maximaux $\{\mathfrak{w}_\sigma\}$, $(\sigma \in S \subseteqq N)$, dans la famille $\{\mathfrak{w}_\nu\}$, $(\nu \in N)$, dont'il est question dans le théorème 25. Si l'on associe tous les idéaux $\mathfrak{g}_\nu$ dont les idéaux adjoints sont contenus dans un $\mathfrak{w}_\sigma$, on obtient, en vertu du corollaire, un idéal $\mathfrak{h}_\sigma$ qui est encore primal. La représentation

$$\mathfrak{a} = \cap \mathfrak{h}_\sigma, \qquad (\sigma \in S), \tag{8}$$

est irrédundante, par les raisons qui suivent. Supposons $\mathfrak{a} = \cap \mathfrak{h}_{\sigma'}$ $(\sigma' \in S' \subset S)$, une représentation obtenu de (8), en écartant quelques $\mathfrak{h}_\sigma$. En remplaçant les $\mathfrak{h}_{\sigma'}$ par les $\mathfrak{g}_\nu$ correspondants, on arrive à

$$\mathfrak{a} = \cap \mathfrak{g}_{\nu'}, \qquad (\nu' \in N'), \tag{9}$$

où manquent quelques $\mathfrak{g}_\nu$ de (7) et quelques-uns des idéaux maximaux $\mathfrak{w}_\sigma$. Cette représentation (9) est encore réduite. Les idéaux maximaux de la famille $\{\mathfrak{w}_{\nu'}\}$ doivent, d'autre part, être les mêmes que ceux de la famille $\{\mathfrak{w}_\nu\}$, les uns comme les autres ètant la totalité des idéaux maximaux appartenant à $\mathfrak{a}$. Comme cela n'est pas vrai, on reconnaît qu'il n'y a pas la possibilité d'écarter quelques-uns des $\mathfrak{h}_\sigma$, dans (8). La représentation (8) est irrédundante. Nous avons:

Théorème 26. *Dans un μ-demi-anneau, chaque idéal* $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ *qui a une représentation réduite de la forme (7), a aussi une représentation irrédundante de la forme* $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{h}_\sigma$, $(\sigma \in S)$, *où chaque* $\mathfrak{h}_\sigma$ *est un idéal primal avec un idéal adjoint* $\mathfrak{w}_\sigma$ *qui n'est contenu dans aucun* $\mathfrak{w}_\tau$, *avec* $\tau \neq \sigma$.

On peut dire maintenant:

Théorème 27. *(d'univocité). Dans un μ-demi-anneau, deux représentations irrédundantes d'un idéal (au moyen d'idéaux primaux) pour lesquelles les idéaux adjoints sont tous maximaux ont la même cardinalité et les mêmes idéaux adjoints.*

Conférence donnée à Oberwohlfach—Walke, dans le Colloque sur la Théorie des Anneaux, tenu de 23 à 28 Octobre 1961, sous la direction du Prof. R. Baer.

Bibliographie

S. Bourne, On multipliciative idempotents of a potent semiring, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42** (1956), 632—638.

Mª. L. Noronha Galvão, On the theory of residuals, *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1959), 283—300.

Mª. L. Noronha Galvão, Sobre a teoria de Noether-Krull em semianéis, *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1961), 175—256.

J. Levitzki, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943), 462—466.

J. Levitzki, A characteristic condition for semi-primary rings, *Duke Math. J.* **11** (1944), 367—368.

K. Iseki, Ideal theory of semirings, *Proc. Japan Acad.* **32** (1956), 554—559.

K. Iseki, Ideal in semirings, *Proc. Japan Acad.* **34** (1958), 29—31.

K. Asano, Über Ringe mit Vielfachenkettensatz, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 288—291.

N. H. McCoy, Prime ideals in general rings *Amer. J. Math.* **71** (1949), 823—833.

A. Almeida Costa, Sur les anneaux demi-premiers, *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1958), 89—104.

R. Baer, Radical ideals, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 537—568.

J. Levitzki, Prime ideals and the lower radical *Amer. J. Math.* **73** (1951), 25—29.

J. Tiago de Oliveira, Residuais de sistemas e radicais de anéis, *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **5** (1956), 177—245.

G. Thierrin, Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque, *Bull. Acad. Belgique*, **43** (1957), 124—132.

E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.* **83** (1921), 24—66.

W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, *Math. Ann.* **101** (1929), 729—744.

N. H. McCoy, Rings and ideals, *Baltimore*, 1948.

L. Fuchs, On primal ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 1—6.

J. von Neumann On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **22** (1936), 707—713.

Mª. L. Noronha Galvão, Sur les idéaux réguliers d'un demi-anneau, *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1960).

A. Almeida Costa, μ-systèmes et π-systèmes d'idéaux *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **7** (1959), 235—243.

A. Almeida Costa, Sur les μ-anneaux et les μ_0-anneaux, *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, **8** (1960), 131—144.

A. Almeida Costa, Sur la théorie générale des demi-anneaux, *Séminaire Dubreil—Pisot* (Algébre et Théorie des nombres), 1960—1961, exposés nº 24 et 25.

(Reçu le 12 avril 1962.)