Die Darstellung der Tensoren mit ihren Tensorkomitanten niedrigerer Stufe in Räumen definiter und indefiniter Metrik

Von GYÖRGY TEVAN (Miskolc)

Kurzgefasster Inhalt

In diesem Artikel werden wir von den, für die Tensoren 2-ter Stufe des Raumes definiter Metrik gültigen, bekannten Sätzen ausgehend, den beliebigen Tensor p-ter Stufe, als lineare Kombination der dyadischen (tensoriellen) Produkte der Komitantentensoren $(p-q)$-ter und q-ter Stufe darstellen. (Satz 2.) Danach werden wir durch Anwendung des allgemeinen Satzes auf den Fall $q=1$, den Tensor p-ter Stufe vollständig bestimmende Komitantenvektoren und Invarianten angeben. (Satz 3.) Endlich verallgemeinern wir unsere Resultate auf Räume indefiniter Metrik. (Satz 4—7.)

§ 1.

Zuerst fassen wir diejenigen, für Räume mit definiter Metrik gültigen, auf Tensoren zweiter Stufe sich beziehenden, bekannten Sätze zusammen, die zum Ausgangspunkt dienen.

Satz I. *In einem n-dimensionalen Raum definiter Metrik haben alle symmetrischen Tensoren 2-ter Stufe $A^*=A$ (mindestens) n aufeineander senkrechte Eigenvektoren:*

$$\mathbf{A s}_\alpha=\lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren kann man den Tensor 2-ter Stufe (Bilineartensor) forlgendermaßen ausdrücken:

$$A=\frac{\lambda_1}{\mathbf{s}_1^2}\mathbf{s}_1\circ\mathbf{s}_1+\frac{\lambda_2}{\mathbf{s}_2^2}\mathbf{s}_2\circ\mathbf{s}_2+\ldots+\frac{\lambda_n}{\mathbf{s}_n^2}\mathbf{s}_n\circ\mathbf{s}_n \tag{2}$$

wo $\mathbf{s}_\alpha\cdot\mathbf{s}_\beta=0$, *wenn* $\alpha\neq\beta$ (Hier, wie auch im weiteren, bezeichnet „$\circ$" überall das dyadische Produkt.) [1], [2], [3], [4].

Satz II. *Im n-dimensionalen Raum definiter Metrik kann man alle Tensoren 2. Stufe A, mit Hilfe der Eigenvektoren $\mathbf{s}_\alpha$ mit den Eigenwerte λ_α des symmetrischen Tensors A^*A, folgenderweise aufschreiben:*

$$A=\mu_1\overset{0}{\mathbf{t}}_1\circ\overset{0}{\mathbf{s}}_1+\mu_2\overset{0}{\mathbf{t}}_2\circ\overset{0}{\mathbf{s}}_2+\ldots+\mu_n\overset{0}{\mathbf{t}}_n\circ\overset{0}{\mathbf{s}}_n; \tag{3}$$

wo

$$\mathbf{s}_\alpha^0 = \frac{\mathbf{s}_\alpha}{\sqrt[+]{|\mathbf{s}_\alpha^2|}}; \quad t_\alpha^0 = \frac{A\mathbf{s}_\alpha}{\sqrt[+]{|(A\mathbf{s}_\alpha)^2|}} \frac{|\mathbf{s}_\alpha^2|}{\mathbf{s}_\alpha^2} = \frac{A\mathbf{s}_\alpha}{\sqrt[+]{|\lambda_\alpha|}\,\mathbf{s}_\alpha^2} \sqrt[+]{|\mathbf{s}_\alpha^2|}; \quad \mu_\alpha = \sqrt[+]{|\lambda_\alpha|}$$

ferner ist das System der Vektoren $\mathbf{s}_\alpha^0$ *und* $\mathbf{t}_\alpha^0$ *orthonormiert, d. h.*

$$\mathbf{s}_\alpha^0 \cdot \mathbf{s}_\beta^0 = \begin{cases} 0, & \textit{wenn } \alpha \neq \beta \\ \pm 1, & \textit{wenn } \alpha = \beta \end{cases} \tag{3a}$$

hier steht das Vorzeichen „—" in Räumen negativ definiter Metrik.

$$\mathbf{t}_\alpha^0 \cdot \mathbf{t}_\beta^0 = \begin{cases} 0, & \textit{wenn } \alpha \neq \beta \\ \pm 1, & \textit{wenn } \alpha = \beta \end{cases} \tag{3b}$$

hier steht das Vorzeichen „—" in Räumen negativ definiter Metrik.

Diese Zerlegung hat die Eigenheit — gegenüber Zerlegungen gemäß anderen orthogonalen Grundvektoren (Basisvektoren), — daß auch die Vektoren $\mathbf{t}_\alpha^0$ orthogonal sind. Dieser Satz ist in der Literatur als die Zerlegung eines beliebigen Tensors in Produkte symmetrischer und isometrischer (orthogonaler) oder umgekehrt, isometrischer (orthogonaler) und symmetrischer Tensoren bekannt. ([1], [2], [4]). Man kann nämlich die Relation (3) auch in der Form

$$\begin{aligned} A &= (\mu_1 \mathbf{t}_1^0 \circ \mathbf{t}_1^0 + \dots + \mu_n \mathbf{t}_n^0 \circ \mathbf{t}_n^0) \cdot (\mathbf{t}_1^0 \circ \mathbf{s}_1^0 + \dots + \mathbf{t}_n^0 \circ \mathbf{s}_n^0) = \\ &= (\mathbf{t}_1^0 \circ \mathbf{s}_1^0 + \dots + \mathbf{t}_n^0 \circ \mathbf{s}_n^0) \cdot (\mu_1 \mathbf{s}_1^0 \circ \mathbf{s}_1^0 + \dots + \mu_n \mathbf{s}_n^0 \circ \mathbf{s}_n^0) \end{aligned}$$

aufschreiben.

§ 2.

Auf Grund der Sätze I und II, kann man die auf die Zerlegung der Tensoren höherer Stufe bezüglichen Sätze ableiten.

Satz 1. *Im n-dimensionalen Raum definiter Metrik verfügen alle solche Tensoren gerader (2p-ter) Stufe, welche die in ihrer reinen Kovarianten oder in ihrer reinen Kontravarianten Form sich zeigende Symmetrie*

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_p} = A_{j_1 j_2 \dots j_p i_1 i_2 \dots i_p} \tag{4}$$

haben, (mindestens) über n^p *Eigentensoren p-ter Stufe:*

$$\overset{p+p}{A} \overset{(p)}{\cdot} \overset{p}{S}_\alpha = \lambda_\alpha \overset{p}{S}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n^p) \tag{5}$$

wo $\overset{p+p}{A}$ den die Symmetrie (4) besitzenden Tensor $2p$-ter Stufe bezeichnet, während das (p) über dem Multiplikationszeichen eine p-fache (innere) Multiplikation bedeutet. So erhalten wir die vorige Gleichung mit Indizes:

$$A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{\dots\dots\dots j_1 j_2 \dots j_p} S_\alpha^{j_1 j_2 \dots j_p} = \lambda_\alpha S_\alpha^{i_1 i_2 \dots i_p}; \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n^p).$$

Die Eigentensoren sind orthogonal, d. h.:

$$\overset{p}{\boldsymbol{S}}_{\alpha} \overset{(p)}{\cdot} \overset{p}{\boldsymbol{S}}_{\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta$$

und mit deren Hilfe kann man den Tensor $\overset{p+p}{A}$ *folgendermaßen ausdrücken:*

$$\overset{p+p}{A} = \frac{\lambda_1}{\overset{p}{\boldsymbol{S}}{}_1^2} \overset{p}{\boldsymbol{S}}_1 \circ \overset{p}{\boldsymbol{S}}_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n^p}}{\overset{p}{\boldsymbol{S}}{}_{n^p}^2} \overset{p}{\boldsymbol{S}}_{n^p} \circ \overset{p}{\boldsymbol{S}}_{n^p}; \tag{6}$$

hier ist

$$\overset{p}{\boldsymbol{S}}{}_{\alpha}^2 = \overset{p}{\boldsymbol{S}}_{\alpha} \overset{(p)}{\cdot} \overset{p}{\boldsymbol{S}}_{\alpha}$$

BEWEIS. Wenn die Vektoren eines n^p-dimensionalen Raumes jedem Tensor p-ter Stufe des n-dimensionalen Raumes von definiter Metrik entsprechen, dann ist dieser Raum einerseits ebenfalls von definiter Metrik, andererseits entspricht ein symmetrischer Tensor $\boldsymbol{A}$ zweiter Stufe dem Tensor $\overset{p+p}{A}$ in diesem Raum; so führen wir den Satz 1 auf Satz I. zurück. (Die Matrix des Tensors $\boldsymbol{A}$ ist die Hypermatrix der Matrix des Tensors $\overset{p+p}{A}$). Die Gleichung (5) entspricht der Gleichung (1) und die Gleichung (6) der Gleichung (2).

Satz 2. *Im n-dimensionalen Raum definiter Metrik kann man einen beliebigen Tensor* $\overset{p}{A}$ *p-ter Stufe als die lineare Kombination der dyadischen Produkte der Komitantentensoren* $(p-q)$*-ter und q-ter Stufe herstellen; sowohl die Tensoren* $(p-q)$*-ter Ordnung, wie auch jene q-ter Ordnung, sind orthonormiert;*

$$\overset{p}{A} = \mu_1 \overset{p-q}{\boldsymbol{T}}{}_1^0 \circ \overset{q}{\boldsymbol{S}}{}_1^0 + \ldots + \mu_{n^q} \overset{p-q}{\boldsymbol{T}}{}_{n^q}^0 \circ \overset{q}{\boldsymbol{S}}{}_{n^q}^0, \tag{8}$$

$$\overset{q}{\boldsymbol{S}}{}_{\alpha}^0 \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{\boldsymbol{S}}{}_{\beta}^0 = \begin{cases} 0, & \textit{wenn } \alpha \neq \beta, \\ \pm 1, & \textit{wenn } \alpha = \beta, \end{cases} \tag{8a}$$

(hier steht—1, venn der Raum negativ definiter Metrik uud q ungerade ist),

$$\overset{p-q}{\boldsymbol{T}}{}_{\alpha}^0 \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p-q}{\boldsymbol{T}}{}_{\beta}^0 = \begin{cases} 0, & \textit{wenn } \alpha \neq \beta, \\ \pm 1, & \textit{wenn } \alpha = \beta, \end{cases} \tag{8b}$$

(hier steht -1*, wenn der Raum negativ definiter Metrik und* $(p-q)$ *ungerade ist.)*

Der Satz 2 ist die Verallgemeinerung des Satzes II. So entspricht die Gleichung (8) der Gleichung (3).

BEWEIS. Bezeichnen wir mit $\overset{p}{A}{}^* \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p}{A}$ jenen Tensor $2q$-ter Stufe, welcher eine reine kovariante Form:

$$A^{k_1k_2\ldots k_{p-q}}{}_{\cdots\cdots\cdots i_1i_2\ldots i_q} A_{k_1k_2\ldots k_{p-q}j_1j_2\ldots j_q} \equiv A_{k_1k_2\ldots k_{p-q}i_1i_2\ldots i_q} A^{k_1k_2\ldots k_{p-q}}{}_{\cdots\cdots\cdots j_1j_2\ldots j_q} \quad \text{hat.}$$

Es ist ersichtlich, daß dieser Tensor eine Symmetrie von (4) besitzt; den Satz 1 anwendend, erhalten wir also solche Komitantentensoren $\overset{q}{S}_\alpha$, für welche

$$[\overset{p}{A}{}^* \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p}{A}] \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\alpha = \lambda_\alpha \overset{q}{S}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n^q)$$

gilt, wo $\overset{q}{S}_\alpha \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\beta = 0$, für $\alpha \neq \beta$ ist. Da die Komitantentensoren $\overset{q}{S}_\alpha$ ein vollständig orthogonales System bilden, können wir sogleich aufschreiben:

$$\overset{p}{A} = \frac{1}{\overset{q}{S}{}_1^2} \left[\overset{p}{A} \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_1\right] \circ \overset{q}{S}_1 + \ldots + \frac{1}{\overset{q}{S}{}_{n^q}^2} \left[\overset{p}{A} \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_{n_q}\right] \circ \overset{q}{S}_{n^q}.$$

Es ist aber

$$\left[\overset{p}{A} \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\alpha\right] \overset{(p-q)}{\cdot} \left[\overset{p}{A} \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\beta\right] = \overset{q}{S}_\alpha \overset{(q)}{\cdot} \left\{\left[\overset{p}{A}{}^* \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p}{A}\right] \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\beta\right\} = \lambda_\beta \overset{q}{S}_\alpha \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\beta = 0, \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta,$$

also sind die Tensoren $[\overset{p}{A} \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}]$ $(p-q)$-ter Stufe ebenfalls *orthogonal*. Den normierten Wert von $\overset{q}{S}_\alpha$ mit $\overset{q}{S}{}_\alpha^0$ bezeichnend,

$$\overset{q}{S}{}_\alpha^0 = \frac{1}{\sqrt[+]{\left|\overset{q}{S}{}_\alpha^2\right|}} \overset{q}{S}_\alpha,$$

ferner mit der Bezeichnung

$$\overset{p-q}{T}_\alpha = \frac{1}{\overset{q}{S}{}_\alpha^2} \sqrt[+]{\left|\overset{q}{S}{}_\alpha^2\right|} \left[\overset{p}{A} \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}_\alpha\right]$$

gilt:

$$\overset{p}{A} = \overset{p-q}{T}_1 \circ \overset{q}{S}{}_1^0 + \ldots + \overset{p-q}{T}_{n^q} \circ \overset{q}{S}{}_{n^q}^0, \tag{9}$$

wo

$$\overset{p-q}{T}_\alpha \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p-q}{T}_\beta = 0, \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta$$

ist. Wenn wir die Tensoren $\overset{p-q}{T}_\alpha$ noch normieren, gelangen wir zur Gleichung (8), die zu beweisen war.

Bestätigung der Folgen. Die Gleichung (9) wird im Falle $q = 1$, die folgende:

$$\overset{p}{A} = \overset{p-1}{T}_1 \circ \mathbf{s}_1^0 + \ldots + \overset{p-1}{T}_n \circ \mathbf{s}_n^0 \tag{9a}$$

wo $\mathbf{s}_1^0, \ldots, \mathbf{s}_n^0$ die aufeinander senkrechten Komitanten-Einheitsvektoren sind, $\overset{p-1}{T}_1, \ldots, \overset{p-1}{T}_n$ hingegen die aufeinander „senkrecht"-en Tensoren $(p-1)$-ter Stufe sind. Diese Zerlegung kann man für jede der Tensoren $(p-1)$-ter Stufe durchführen, dann auch für die Tensoren $(p-2)$-ter Stufe, endlich wird sich der Tensor $\overset{p}{A}$ als lineare Kombination der dyadischen Produkte seiner Komitantenvektoren ergeben. Z. B. für einen Tensor 4-ter Stufe:

$$\overset{4}{A} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{t}_{\alpha\beta\gamma}^0 \circ \mathbf{s}_{\alpha\beta\gamma}^0 \circ \mathbf{s}_{\alpha\beta}^0 \circ \mathbf{s}_\alpha^0.$$

Offenbar sind hier die Zahlen $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ Invarianten, und ebenso sind die Skalarprodukte zweier Komitantenvektoren (nur außer „O") invariant. Die erhaltenen Invarianten sind — wegen der Orthogonalität — nicht voneinander unabhängig; das Aufschreiben der Gebundenheiten ist aber schwerfällig.

Geben wir die Komponenten der Tensoren $\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_\alpha}$ bei (9a) in einem durch die Komitantenvektoren $\mathbf{s}_\alpha^0$ als Grundvektoren (Basisvektoren) bestimmten orthogonalen Koordinatensystem an! Diese Komponenten sind gewiß invariant, sie sind aber nicht voneinander unabhängig, da die Tensoren $\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_\alpha}$ orthogonal sind. Die Gebundenheit der Zahlen $\frac{n(n-1)}{2}$ kann man aber einfach auf Grund der Relation:

$$\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_\alpha} \overset{(p-1)}{\cdot} \overset{p-1}{\boldsymbol{T}_\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)$$

aufschreiben. So gelangen wir letzten Endes zum Satz 3.

Satz 3. *Wenn wir im n-dimensionalen Raum definiter Metrik die Eigenvektoren* $\mathbf{s}_\alpha^0$ *der aus dem Tensor* $\overset{p}{\boldsymbol{A}}$ *gebildeten Tensoren 2-ter Stufe* $\overset{p}{\boldsymbol{A}^*} \overset{(p-1)}{\cdot} \overset{p}{\boldsymbol{A}}$, *ebenso die auf das Koordinatensystem dieser Eigenvektoren bezüglichen Komponenten der Tensoren* $(p-1)$*-ter Stufe*

$$\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_\alpha} = \frac{1}{(\mathbf{s}_\alpha^0)^2} \overset{p}{\boldsymbol{A}} \mathbf{s}_\alpha^0 = (\mathbf{s}_\alpha^0)^2 \overset{p}{\boldsymbol{A}} \mathbf{s}_\alpha^0$$

ausrechnen, und — wegen der Orthogonalität — eine der Komponenten $\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_2}$, *zwei der Komponenten* $\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_3}$, *usw.* $(n-1)$ *der Komponenten* $\overset{p-1}{\boldsymbol{T}_n}$ *weglassen, dann bilden die so erhaltenen unabhängigen Komponenten ein System, welches mit den Einheitsvektoren* $\mathbf{s}_0^1, \ldots, \mathbf{s}_n^0$ *zusammen, den Tensor* $\overset{p}{\boldsymbol{A}}$ *vollkommen bestimmt. Darum kann man alle Invarianten des Tensors* $\overset{p}{\boldsymbol{A}}$ *mit diesen Invarianten ausdrücken.*

§ 3.

Im Folgenden werden wir untersuchen, wie sich die obigen Sätze in Räumen indefiniter Metrik abändern. Da sich unsere Sätze (auch der Satz II), auf Satz I stützen, werden wir in erster Reihe untersuchen, wie ein symmetrischer Tensor 2-ter Stufe auf einem Raum indefiniter Metrik zerlegbar ist.

Vor allem stellen wir fest, daß es genügend ist, wenn wir uns auf nicht entartete symmetrische Tensoren 2-ter Stufe beschränken. Wenn nämlich $\boldsymbol{A}$ ein entarteter Tensor ist, d. h. es gibt einen solchen Vektor $\mathbf{z}_1$, für welchen $\boldsymbol{A}\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$ gilt, dann ist der zu $\mathbf{z}_1$ senkrechte Unterraum („Sub-Raum") ein invarianter Unterraum des Tensors $\boldsymbol{A}$, da $\mathbf{z}_1\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\boldsymbol{A}\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{0} = 0$, d. h. zusammen mit $\mathbf{x}$ auch $\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ senkrecht zu $\mathbf{z}_1$ ist. Wenn jetzt in diesem Unterraum der Tensor $\boldsymbol{A}$ noch immer entartet ist, d. h. es gibt einen solchen Vektor $\mathbf{z}_2 \perp \mathbf{z}_1$, für welchen $\boldsymbol{A}\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$ gilt, dann ist der auf $\mathbf{z}_1$ und auf $\mathbf{z}_2$ zugleich senkrechte Unterraum ebenfalls ein invarianter Unterraum des Tensors, usw. Wir führen dieses Verfahren weiter, bis wir endlich zu einem solchen Unterraum gelangen, wo der Tensor nicht entartet ist.

Jetzt müssen wir nur noch den definiten oder den indefiniten symmetrischen Tensor im n-dimensionalen Raum indefiniter Metrik untersuchen, den Semidefiniten aber nicht.

Bezüglich des den indefiniten Raum charakterisierenden Maßtensors werden wir noch jene natürliche Einschränkung machen, daß wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängige Vektoren eines beliebigen Unterraumes sind, so kann kein solcher Vektor $\mathbf{x}$ existieren, daß die Verbindung $\mathbf{xy} = g_{ij}x^i y^j = 0$ bei allen $\mathbf{y}$-Vektoren des Unterraumes stattfindet. Das bedeutet, daß der Maßtensor in keinem 2-dimensionalen Raum entartet ist. Im folgenden werden wir indefinite Räume solcher Maßtensoren voraussetzen.

Satz 4a. *Der symmetrische, definite Tensor A 2-ter Stufe hat auch im Raum indefiniter Metrik (mindestens) n aufeinander senkrechte Eigenvektoren:*

$$A\mathbf{s}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

Mit Hilfe dieser kann man A folgenderweise ausdrücken:

$$A = \frac{\lambda_1}{\mathbf{s}_1^2}\mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_1 + \frac{\lambda_2}{\mathbf{s}_2^2}\mathbf{s}_2 \circ \mathbf{s}_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\mathbf{s}_n^2}\mathbf{s}_n \circ \mathbf{s}_n;$$

$$\mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{s}_\beta = 0, \quad \textit{für } \alpha \neq \beta.$$

Bemerkung. Da die gemischte Form von A gleich $A^i_{\cdot j} = g^{ik}A_{kj}$, bzw. $A_i^{\cdot j} = g_{ik}A^{kj}$ ist, und so bezüglich der Komponenten s^i_α, bzw. $s_{\alpha,i}$ des Eigenvektors $\mathbf{s}_\alpha$ $A^i{}_j s^j_\alpha \equiv g^{ik}A_{kj}s^j_\alpha = \lambda_\alpha s^i_\alpha$ bzw. $A_i^{\cdot j} s_{\alpha,j} \equiv g_{ik}A^{kj}s_{\alpha,j} = \lambda_\alpha s_{\alpha,i}$ gilt, ferner die reine kovariante, bzw. reine kontravariante Matrix des symmetrischen Tensors A symmetrisch ist, ist der Satz 4a mit dem folgenden Satz gleichwertig:

Eine Produktmatrix der symmetrischen und definit-symmetrischen Matrix ist in diagonale Form transformierbar.

Diesen Satz werden wir trotzdem beweisen, um den Beweis der folgenden Sätze vorzubereiten.

Beweis. Das Minimum des Ausdruckes: $\left|\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}\right| = \left|\frac{A_{ij}x^i x^j}{g_{ij}x^i x^j}\right|$ wird bei einem solchen Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{s}_1$ angenommen, bei welchem $\mathbf{s}_1^2 \neq 0$ [1]) ist. Wenn $\frac{\mathbf{s}_1 A \mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_1^2} = \lambda_1$ ist, dann wird wegen der Definität des Tensors A $\lambda_1 \neq 0$, so daß

$$\left|\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\lambda_1 \mathbf{x}^2}\right| \geqq 1$$

gilt. Ist $\mathbf{x}$ in der Umgebung des Vektors $\mathbf{s}_1$, d. h. $\mathbf{x} = \mathbf{s}_1 + \varepsilon \mathbf{t}$, wo $\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}_1 = 0$ und ε klein genug ist, dann stimmt das Vorzeichen von λ_1 und dasjenige von $\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$ überein, also ist

$$\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\lambda_1 \mathbf{x}^2} \geqq 1,$$

[1]) Es kann mehrere solche Vektoren geben; von diesen wählen wir einen aus, und dieser ist der Vektor $\mathbf{s}_1$.

d. h.

$$\frac{\mathbf{s}_1 A \mathbf{s}_1 + 2\varepsilon \mathbf{t} A \mathbf{s}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{t} A \mathbf{t}}{\lambda_1 (\mathbf{s}_1^2 + \varepsilon^2 \mathbf{t}^2)} \equiv \frac{1 + 2\varepsilon \dfrac{\mathbf{t} A \mathbf{s}_1}{\lambda_1 \mathbf{s}_1^2} + \varepsilon^2 \dfrac{\mathbf{t} A \mathbf{t}}{\lambda_1 \mathbf{s}_1^2}}{1 + \varepsilon^2 \dfrac{\mathbf{t}^2}{\mathbf{s}_1^2}} \geqq 1.$$

Bei genügend kleinem ε wird also:

$$1 + 2\varepsilon \frac{\mathbf{t} A \mathbf{s}_1}{\lambda_1 \mathbf{s}_1^2} + \varepsilon^2 \frac{\mathbf{t} A \mathbf{t}}{\lambda_1 \mathbf{s}_1^2} \geqq 1 + \varepsilon^2 \frac{\mathbf{t}^2}{\mathbf{s}_1^2}.$$

Das kann nur in jenem Falle für positive und negative Werte von ε in gleicher Weise gelten, wenn $\mathbf{t} A \mathbf{s}_1 = 0$ ist. So bestehen $\mathbf{t}\mathbf{s}_1 = 0$ und $\mathbf{t} A \mathbf{s}_1 = 0$ gleichzeitig für alle $\mathbf{t}$, deshalb ist $A\mathbf{s}_1 = \varkappa \mathbf{s}_1$. Durch skalare Multiplikation von $\mathbf{s}_1$, $\varkappa = \lambda_1$, bekommt man also

$$A\mathbf{s}_1 = \lambda_1 \mathbf{s}_1$$

So ist $\mathbf{s}_1$ ein Eigenvektor mit einem Eigenwert λ_1.

Der Unterraum der zu $\mathbf{s}_1$ senkrechten Vektoren $\mathbf{x}$ ist der invariante Unterraum des Tensors A, da $\mathbf{s}_1 A \mathbf{x} = \mathbf{x} A \mathbf{s}_1 = \lambda_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_1 = 0$ ist; also fällt auch $A\mathbf{x}$ in diesen Unterraum. Hier können wir noch einmal das Minimum[2]) des Ausdruckes $\left| \dfrac{\mathbf{x} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} \right|$ suchen, usw. So erhalten wir $(n-1)$ Eigenvektoren. Der auf diese $(n-1)$ Vektoren senkrechte Vektor $\mathbf{s}_n$ ist gleichfalls Eigenvektor, weil

$$\mathbf{s}_\alpha A \mathbf{s}_n = \mathbf{s}_n A \mathbf{s}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gilt. Also ist auch $A\mathbf{s}_n$ senkrecht zu jedem $\mathbf{s}_\alpha$, und so

$$A\mathbf{s}_n = \lambda_n \mathbf{s}_n.$$

(ε^2 kann nicht 0 sein, weil dann $\mathbf{s}_n A \mathbf{s}_n = 0$, und A nicht definit wäre.)

Satz 4 b. *Im n-dimensionalen Raum indefiniter Metrik hat der indefinite symmetrische Tensor A zweiter Stufe (mindestens) $(n-2)$ Eigenvektoren. Mit diesen können wir den Tensor in der Form:*

$$A = \frac{\lambda_1}{\mathbf{s}_1^2} \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n-2}}{\mathbf{s}_{n-2}^2} \mathbf{s}_{n-2} \circ \mathbf{s}_{n-2} + K$$

aufschreiben, wo K die symmetrische Tensorkomitante 2-ter Stufe in dem zu den Eigenvektoren senkrechten 2-dimensionalen Raum bedeutet. In diesem Unterraum ist der Maßtensor ebenso indefinit.

Beweis. Betrachten wir jene 2-dimensionalen Unterräume („Ebenen") für deren Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^2 \neq 0$, gilt also $\mathbf{x}^2 > 0$ oder $\mathbf{x}^2 < 0$, d. h. $\mathbf{x}$ definit ist. Solche Ebenen existieren jedenfalls, denn wenn $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ solche Vektoren sind, für welche $\mathbf{x}_1^2 \neq 0$, $\mathbf{x}_2^2 \neq 0$, $\mathbf{x}_3^2 \neq 0$ ferner $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3 = 0$, $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = 0$ gilt, so sind unter diesen

[2]) Ein Minimum gibt es in allen Unterräumen, weil der Maßtensor — im Sinne der anfangs erwähnten Einschränkung — in keinem 2-dimensionalen und demzufolge auch in keinem Unterraum höherer Dimension entartet ist, so daß $\mathbf{x}^2 \equiv 0$ nicht gelten kann.

für zwei Vektoren, z. B. für $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1^2$ und $\mathbf{x}_2^2$ von gleichem Vorzeichen.[3]) Aber $\mathbf{x}^2$ ist von gleichem Vorzeichen für jeden Vektor $\mathbf{x}$ der durch die Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ aufgespannten Ebene, weil $\mathbf{x}^2 = (\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)^2 = \alpha^2\mathbf{x}_1^2+\beta^2\mathbf{x}_2^2$ ist.

Für die Vektoren einer solchen Ebene ist $\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$ von beiden Seiten beschränkt, also hat dieser Ausdruck einen minimalen und einen maximalen Wert. Wenn $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ zwei beliebige Vektoren dieser Ebene sind, so kann man solche Werte α und β finden, daß für $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_1+\alpha\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{x}_2+\beta\mathbf{x}_1$ $\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta=0$, und $\mathbf{x}_\alpha A\mathbf{x}_\beta=0$ sein soll. Wenn

$$(*) \qquad \frac{\mathbf{x}_\alpha A\mathbf{x}_\alpha}{\mathbf{x}_\alpha^2} \leq \frac{\mathbf{x}_\beta A\mathbf{x}_\beta}{\mathbf{x}_\beta^2},$$

dann ist $\frac{\mathbf{x}_\alpha A\mathbf{x}_\alpha}{\mathbf{x}_\alpha^2}$ das Minimum des Ausdruckes $\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$, hingegen ist $\frac{\mathbf{x}_\beta A\mathbf{x}_\beta}{\mathbf{x}_\alpha^2}$ das Maximum, während sich $\mathbf{x}$ auf der Ebene „bewegt"; nämlich für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha+\gamma\mathbf{x}_\beta$

$$\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{x}_\alpha A\mathbf{x}_\alpha+\gamma^2\mathbf{x}_\beta A\mathbf{x}_\beta}{\mathbf{x}_\alpha^2+\gamma^2\mathbf{x}_\beta^2}$$

gilt, und dieser ist bei $\gamma^2=0$ minimal, bei $\gamma^2\to\infty$ maximal.

Betrachten wir solche 2-dimensionale Unterräume, in welchen $\mathbf{x}^2\neq 0$ ist. Auf jeder solchen Ebene kann man $\mathbf{x}_\alpha$ (oder $\mathbf{x}_\beta$) ausrechnen. So erhält man eine Menge von Vektoren $\mathbf{x}_\alpha$ (oder $\mathbf{x}_\beta$). Wenn solche Ebenen existieren, für welche ($*$) in einer Gleichungsform gültig ist, so trennen wir diese von der Menge. [Wenn jede mit $\mathbf{x}^2\neq 0$ gekennzeichnete Ebene derart ist, daß ($*$) in Gleichungsform gültig ist, also, daß $\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$ entlang der Ebene konstant ist, dann ist auch die Ebene der nur die Bedingungen $\mathbf{x}_3^2\mathbf{x}_4^2>0$, und $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4=0$ befriedigenden, aber sonst beliebigen $\mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_4$ Vektoren ebenso, da $(\mathbf{x}_3+\delta\mathbf{x}_4)^2 = \mathbf{x}_3^2+\delta^2\mathbf{x}_4^2\neq 0$ ist; sodann $\frac{\mathbf{x}_3A\mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3^2}=\frac{\mathbf{x}_4A\mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_4^2}$. Wenn wir jetzt $\mathbf{x}_3$ festsetzen, und im $(n-1)$ dimensionalen Unterraum senkrecht zu $\mathbf{x}_3$ in einer genügend kleinen Umgebung des Vektors $\mathbf{x}_4$ einen, sonst beliebigen Vektor $\mathbf{y}$ annehmen, so wird dieser mit dem Vektor $\mathbf{x}_3$ eine solche Ebene bilden auf welcher $\mathbf{x}^2\neq 0$, weil $\mathbf{y}\mathbf{x}_3=0$, und $\mathbf{y}^2\mathbf{x}_3^2>0$ ist. So muß $\frac{\mathbf{y}A\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2}=\frac{\mathbf{x}_3A\mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3^2}=c$ sein, d. h. $A=cI$, also muß der untersuchte Tensor das vielfache des Maßtensors (Einheitstensors) sein. Da jeder Vektor in solchem Falle ein Eigenvektor ist, so ist die weitere Untersuchung überflüssig.] Über die nach der Abtrennung gebliebenen Menge werden wir beweisen, daß sie (mindestens stückweise) stetig ist. Zum $\mathbf{x}'_\alpha$, welches in der Umgebung des $\mathbf{x}_\alpha$ liegt, können wir nämlich im mindestens 3-dimensionalen Raum einen Vektor $\mathbf{x}'_\beta$ so wählen, daß $\mathbf{x}'_\beta\cdot\mathbf{x}'_\alpha=0$ und $\mathbf{x}'_\beta A\mathbf{x}'_\alpha=0$ gilt, ferner, daß $\mathbf{x}'_\beta$ in der Umgebung des $\mathbf{x}_\beta$ ist. (Im Falle der Dimension 3 ergibt sich wegen der Zusammenhänge $\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta=0$ und $\mathbf{x}_\alpha A\mathbf{x}_\beta=0$ der letztere von selbst.) Wenn $\mathbf{x}'_\alpha$ genügend

[3]) Die Bedingung der Existenz solcher $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ vektoren ist, daß der Maßtensor in keine 2-dimensionalen Unterraum entartet sein soll, was wir schon am Anfang des Abschnittes vorausgesetzt haben.

nahe zu $\mathbf{x}_\alpha$, und $\mathbf{x}'_\beta$ genügend nahe zu $\mathbf{x}_\beta$ ist, dann stimmt auch das Vorzeichen des $\mathbf{x}'^2_\alpha$ und $\mathbf{x}'^2_\beta$ überein, ferner ist die Ungleichung $(*)$ auch für $\mathbf{x}'_\alpha$ und $\mathbf{x}'_\beta$ gültig. So ist beim Vektor $\mathbf{x}$ der Ebenen von $\mathbf{x}'_\alpha$ und $\mathbf{x}'_\beta$ $\mathbf{x}^2=0$, und das Minimum des $\frac{\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$ tritt bei $\mathbf{x}'_\alpha$, das Maximum bei $\mathbf{x}'_\beta$ auf; $\mathbf{x}'_\alpha$ gehört der Menge der $\mathbf{x}_\alpha$ Vektoren an, die Vektormenge ist also stetig (oder mindestens abschnittsweise stetig).

Zwischen den Vektoren $\mathbf{x}_\alpha$ dieser stetigen Menge suchen wir jenen aus,[4]) bei welchem $\frac{\mathbf{x}_\alpha A\mathbf{x}_\alpha}{\mathbf{x}_\alpha^2}$ einen maximalen wert hat. (Ebenso könnten wir jenen Vektor der Vektormenge $\mathbf{x}_\beta$ suchen, bei welchem $\frac{\mathbf{x}_\beta A\mathbf{x}_\beta}{\mathbf{x}_\beta^2}$ einen minimalen Wert hat.) Dieser Vektor sei $\mathbf{s}_1$. Mit dem Beweis des Satzes 4a übereinstimmend, kann man einsehen, daß $\mathbf{s}_1$ ein Eigenvektor ist: $A\mathbf{s}_1=\lambda_1\mathbf{s}_1$. Der auf $\mathbf{s}_1$ senkrechte Unterraum bildet einen invarianten Unterraum von A, so können wir in diesem wieder solche Ebenen aufnehmen, auf welche $\mathbf{x}^2\neq 0$, usw. gilt. Es ist offenbar, daß dieses Verfahren nur $(n-2)$-mal wiederholt werden kann, so ist es gewiß, daß $(n-2)$ Eigenvektoren existieren. Der restliche 2-dimensionale Unterraum ist ein invarianter Unterraum von A und der in diesen Unterraum fallende Teil des Tensors ist eben K.

Weil $\mathbf{s}_1$ irgendeiner der Vektoren $\mathbf{x}_\alpha$ ist, so fällt der zu diesem gehörende Vektor $\mathbf{x}_\beta=\mathbf{p}_1$ in den auf $\mathbf{s}_1$ senkrechten Unterraum, und $\mathbf{p}_1^2$ und $\mathbf{s}_1^2$ haben das gleiche Vorzeichen. Wenn $\mathbf{x}'$ ein beliebiger Vektor des auf $\mathbf{s}_1$ senkrechten Unterraumes ist, so ist im Falle $\mathbf{x}=\gamma\mathbf{s}_1+\delta\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}^2=\gamma^2\mathbf{s}_1^2+\delta^2\mathbf{x}'^2$. Weil $\mathbf{x}^2$ indefinit ist, könnte $\mathbf{x}'^2$ nur dann definit sein, wenn es kein solches $\mathbf{x}'$ gäbe, bei welchem $\mathbf{x}'^2$ und $\mathbf{s}_1^2$ dasselbe Vorzeichen haben. Da $\mathbf{p}_1$ ein solcher Vektor ist, so kann $\mathbf{x}'^2$ nicht definit sein, also ist er indefinit. (Semidefinit kann er nicht sein, da der Maßtensor nicht entartet ist.) Der auf $\mathbf{s}_1$ senkrechte Unterraum ist also von indefiniter Metrik. Ähnlicherweise kann man für den auf $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$, dann auf $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ und $\mathbf{s}_3$ senkrechten Unterraum, usw., endlich auch für den Unterraum des Tensors K einsehen daß sie von indefiniter Metrik sind.

Satz 4c. *Alle symmetrischen Tensoren 2-ter Stufe des 2-dimensionalen Raumes indefiniter Metrik haben entweder (mindestens) zwei zueinander senkrechte Eigenvektoren, (z. B. dann, wenn der Tensor definit ist, aber nicht nur dann!) und in diesem Falle ist*

$$K=\lambda_1\frac{\mathbf{s}_1\circ\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_1^2}+\lambda_2\frac{\mathbf{s}_2\circ\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}\quad\text{und}\quad \mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2=0$$

oder keinen Eigenvektor, und dann ist die folgende Zerlegung möglich:

$$K=\nu\left(\frac{\mathbf{s}_1\circ\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_1^2}+\frac{\mathbf{s}_2\circ\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}\right)+\varkappa(\mathbf{s}_1^0\circ\mathbf{s}_2^0+\mathbf{s}_2^0\circ\mathbf{s}_1^0)\tag{10}$$

$$\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2=0\quad\text{und}\quad \mathbf{s}_1^0=\frac{\mathbf{s}_1}{\underset{+}{\sqrt{|\mathbf{s}_1^2|}}};\quad \mathbf{s}_2^0=\frac{\mathbf{s}_2}{\underset{+}{\sqrt{|\mathbf{s}_2^2|}}}$$

hier sind $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$ Komitantenvektoren, aber keine Eigenvektoren.

[4]) Wenn es mehrere gibt, dann einen von denen.

BEWEIS. Der Ausdruck $\frac{\mathbf{x}\boldsymbol{K}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$ hat entweder Extremwerte und dann ist laut der bekannten Methode beweisbar, daß er über zueinender senkrechte Eigenvektoren verfügt, oder hat er keine, dann kann er aber wegen der Indefinität von $\mathbf{x}^2$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ alle Werte annehmen. Sei $\mathbf{s}_1$ ein Vektor, für welchen

$$\frac{\mathbf{s}_1\boldsymbol{K}\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_1^2}=\nu=\frac{1}{2}\,i_1(\boldsymbol{K})$$

gilt, wo $i_1(\boldsymbol{K})$ die erste Invariante des Tensors $\boldsymbol{K}$ ist.

Der Vektor $\mathbf{s}_2=\boldsymbol{K}\mathbf{s}_1-\nu\mathbf{s}_1$ ist senkrecht zu $\mathbf{s}_1$, der Vektor $\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2-\frac{\mathbf{s}_2\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}\mathbf{s}_2$ ist hingegen senkrecht zu $\mathbf{s}_2$, also (wegen den zwei Diemensionen), ist er parallel zu $\mathbf{s}_1$:

$$\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2-\frac{\mathbf{s}_2\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}\mathbf{s}_2=\varphi\mathbf{s}_1$$

Schließlich gilt

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{K}\mathbf{s}_1&=\nu\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2\\ \boldsymbol{K}\mathbf{s}_2&=\varphi\mathbf{s}_1+\frac{\mathbf{s}_2\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}\mathbf{s}_2\end{aligned}\right\}\quad\text{und}\quad \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2=0.$$

Da auf Grund der Definition der ersten Invarianten: $2\nu\equiv i_1=\nu+\frac{\mathbf{s}_2\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}$, und darum $\frac{\mathbf{s}_2\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2^2}=\nu$ ist, ferner, wegen $\mathbf{s}_2\boldsymbol{K}\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_1\boldsymbol{K}\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_2^2=\varphi\mathbf{s}_1^2$ und $\varphi=\frac{\mathbf{s}_2^2}{\mathbf{s}_1^2}$ ist.

Also gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\mathbf{s}_1&=\nu\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2,\\ \boldsymbol{K}\mathbf{s}_2&=\left(\frac{1}{\mathbf{s}_1^2}\mathbf{s}_2^2\right)\mathbf{s}_1+\nu\mathbf{s}_2\end{aligned}$$

Dieses entspricht aber der Zerlegung (10) nach Einsetzung von

$$\varkappa=\frac{1}{\mathbf{s}_1^2}\sqrt[+]{|\mathbf{s}_1^2\mathbf{s}_2^2|}.$$

Die Sätze 4a, 4b und 4c zusammenfassend:

Satz 4. *In einem Raum indefiniter Metrik, dessen Maßtensor in keinem einzigen Unterraum mit Dimension größer als* 1 *entartet ist, haben alle symmetrischen Tensoren* $\boldsymbol{A}$ 2*-ter Stufe entweder (mindestens) n zueinander senkrechte Eigenvektoren — und dann sind die Gleichungen* (1) *und* (2) *des Satzes I unverändert gültig, — oder nur* $(n-2)$ *zueinander senkrechte Eigenvektoren, dann wird die Gleichung* (2) *folgenderweise abgeändert:*

$$\text{(11)}\qquad \boldsymbol{A}=\frac{\lambda_1}{\mathbf{s}_1^2}\mathbf{s}_1\circ\mathbf{s}_1+\ldots+\frac{\lambda_{n-2}}{\mathbf{s}_{n-2}^2}\mathbf{s}_{n-2}\circ\mathbf{s}_{n-2}+\nu\left(\frac{\mathbf{s}_{n-1}\circ\mathbf{s}_{n-1}}{\mathbf{s}_{n-1}^2}+\frac{\mathbf{s}_n\circ\mathbf{s}_n}{\mathbf{s}_n^2}\right)+ \\ +\varkappa(\mathbf{s}_{n-1}^0\circ\mathbf{s}_n^0+\mathbf{s}_n^0\circ\mathbf{s}_{n-1}^0)$$

wo $\mathbf{s}_\alpha\cdot\mathbf{s}_\beta=0$, für $\alpha\neq\beta$ und $\mathbf{s}_{n-1}^0=\frac{\mathbf{s}_{n-1}}{\sqrt[+]{|\mathbf{s}_{n-1}^2|}}$; $\mathbf{s}_n^0=\frac{\mathbf{s}_n}{\sqrt[+]{|\mathbf{s}_n^2|}}$ gilt.

Der Satz 4 ist die Verallgemeinerung des Satzes I für einen Raum indefiniter Metrik. Dem Satz II entspricht also im Raum indefiniter Metrik:

Satz 5. *In einem solchen Raum indefiniter Metrik, dessen Maßtensor in keinem einzigen Unterraum mit Dimensionenzahl größer als* 1, *entartet ist, sind alle Tensoren* A *2-ter Stufe entweder gemäß der Gleichung* (3) *zerlegbar* (und zwar dann, wenn der symmetrische Tensor A^*A n zueinander senkrechte Eigenvektoren hat), *oder verändert sich die Zerlegung* (3) *folgendermaßen:*

$$A = \mu_1 \overset{0}{\mathbf{t}}_1 \circ \overset{0}{\mathbf{s}}_1 + \dots + \mu_{n-2} \overset{0}{\mathbf{t}}_{n-2} \circ \overset{0}{\mathbf{s}}_{n-2} + \psi (\overset{0}{\mathbf{t}}_{n-1} \circ \overset{0}{\mathbf{s}}_{n-1} + \overset{0}{\mathbf{t}}_n \circ \overset{0}{\mathbf{s}}_n) \tag{12}$$

wo

$$\overset{0}{\mathbf{s}}_\alpha \overset{0}{\mathbf{s}}_\beta = \begin{cases} 0, \textit{ für } \alpha \neq \beta \\ \pm 1, \textit{ für } \alpha = \beta \end{cases} \tag{12a}$$

$$\overset{0}{\mathbf{t}}_\alpha \overset{0}{\mathbf{t}}_\beta = \begin{cases} 0, \textit{ für } \alpha \neq \beta \textit{ mit Ausnahme des Falles } \alpha = n-1, \ \beta = n, \\ \pm 1, \textit{ für } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{12b}$$

Beweis. Es ist offenbar, daß wir nur jenen Fall beweisen müssen, wenn die Zerlegung der Gleichung (3) abweicht, also wenn A^*A nur $(n-2)$ Eigenvektoren hat. Der symmetrische Tensor A^*A ist in diesem Falle auf Grund von (11)

$$A^*A = \frac{\lambda_1}{\mathbf{s}_1^2} \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-2}}{\mathbf{s}_{n-2}^2} \mathbf{s}_{n-2} \circ \mathbf{s}_{n-2} + \nu \left(\frac{\mathbf{s}_{n-1} \circ \mathbf{s}_{n-1}}{\mathbf{s}_{n-1}^2} + \frac{\mathbf{s}_n \circ \mathbf{s}_n}{\mathbf{s}_n^2} \right) +$$
$$+ \varkappa (\overset{0}{\mathbf{s}}_{n-1} \circ \overset{0}{\mathbf{s}}_n + \overset{0}{\mathbf{s}}_n \circ \overset{0}{\mathbf{s}}_{n-1}).$$

Die hier auftretenden Vektoren $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ sind orthogonal und darum gilt

$$A = \frac{1}{\mathbf{s}_1^2} A\mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_1 + \dots + \frac{1}{\mathbf{s}_{n-2}^2} A\mathbf{s}_{n-2} \circ \mathbf{s}_{n-2} + \frac{1}{\mathbf{s}_{n-1}^2} A\mathbf{s}_{n-1} \circ \mathbf{s}_{n-1} + \frac{1}{\mathbf{s}_n^2} A\mathbf{s}_n \circ \mathbf{s}_n.$$

Wenn wir nun die Vektoren $\mathbf{s}_\alpha$ und $\dfrac{A\mathbf{s}_\alpha}{\mathbf{s}_\alpha^2}$ normieren und in Betracht ziehen, daß

im Falle $\alpha \neq \beta$ und $\beta < n-1$ $(A\mathbf{s}_\alpha)(A\mathbf{s}_\beta) = \mathbf{s}_\alpha A^* A\mathbf{s}_\beta = \lambda_\beta \mathbf{s}_\alpha \mathbf{s}_\beta = 0$

und im Falle $\alpha = n-1, \beta = n, (A\mathbf{s}_{n-1})(A\mathbf{s}_n) = \mathbf{s}_{n-1} A^* A\mathbf{s}_n \neq 0$ (allgemein)

ferner $(A\mathbf{s}_{n-1})^2 = \mathbf{s}_{n-1} A^* A\mathbf{s}_{n-1} = \nu \mathbf{s}_{n-1}^2$ und $(A\mathbf{s}_n)^2 = \nu \mathbf{s}_n^2$, dann bekommen wir eben die Zusammenhänge (12), (12a) und (12b). Mit wenigen Rechnen ergibt es sich für die im Zusammenhang (12) vorkommenden μ_α und ψ, daß

$$\mu_\alpha = \underset{+}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}} \quad \text{und} \quad \psi = \underset{+}{\sqrt{|\nu|}} \quad \text{ist.}$$

Wie wir aus den für die Tensoren 2-ter Stufe des Raumes definiter Metrik gültigen Sätzen I und II die auf die Tensoren höherer Stufe sich beziehenden Sätze 1 und 2 abgeleitet hatten, ebenso kann man aus den auf die Tensoren 2-ter Stufe des Raumes indefiniter Metrik gültigen Sätzen 4 und 5 die den Sätzen 1 und 2 entsprechenden Sätze bezüglich Tensoren höherer Stufe im Raum indefiniter Metrik ableiten. Den Beweis dieser Sätze können wir also übergehen, weil wir im Wesentlichen mit den Beweis der Sätze 1 und 2 übereinstimmend handeln müssen, nur die Abweichungen der Sätze 4 und 5 von den Sätzen I und II müssen wir in Betracht nehmen.

Satz 6. *In einem Raum indefiniter Metrik, dessen Maßtensor in keinem einzigen Unterraum von Dimension größer als* 1 *entartet ist, hat der Tensor* $\overset{p+p}{A}$ *mit Symmetrie* (4) *entweder (mindestens)* n^p *Eigentensoren und dann ist die Zerlegung* (6) *unverändert gültig, oder (nur)* (n^p-2) *Eigentensoren und dann gilt*

$$(13)\qquad \overset{p+p}{A} = \frac{\lambda_1}{\overset{p}{S}{}_1^2}\overset{p}{S}_1 \circ \overset{p}{S}_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n^p-2}}{\overset{p}{S}{}_{n^p-2}^2} S_{n^p-2} \circ S_{n^p-2} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\overset{p}{S}_{n^p-1} \circ \overset{p}{S}_{n^p-1}}{\overset{p}{S}{}_{n^p-1}^2} + \frac{\overset{p}{S}_{n^p} \circ \overset{p}{S}_{n^p}}{\overset{p}{S}{}_{n^p}^2}\right) + \varkappa\left(\overset{p}{S}{}_{n^p-1}^0 \circ \overset{p}{S}{}_{n^p}^0 + \overset{p}{S}{}_{n^p}^0 \circ \overset{p}{S}{}_{n^p-1}^0\right)$$

wo $\overset{p}{S}_\alpha \overset{(p)}{\cdot} \overset{p}{S}_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und $\overset{p}{S}{}_{n^p-1}^0 = \dfrac{\overset{p}{S}_{n^p-1}}{\sqrt[+]{\left|\overset{p}{S}{}_{n^q-1}^2\right|}}$; $\overset{p}{S}{}_{n^p}^0 = \dfrac{\overset{p}{S}_{n^p}}{\sqrt[+]{\left|\overset{p}{S}{}_{n^p}^2\right|}}$ ist.

Satz 7. *In einem Raum indefiniter Metrik, dessen Maßtensor in keinem einzigen, höher als* 1*-dimensionalen Unterraum entartet ist, können wir den beliebigen Tensor* $\overset{p}{A}$ *p-ter Stufe entweder laut* (8) *in Komitantentensoren* $(p-q)$*-ter und q-ter Stufe zerlegen* (und zwar dann, wenn der Tensor $\overset{p}{A}{}^* \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p}{A}$ mit der Symmetrie (4) n^q orthogonale Eigentensoren hat)*oder die Zerlegung* (8) *verändert sich folgendermaßen:*

$$(14)\qquad \overset{p}{A} = \mu_1 \overset{p-q}{T}{}_1^0 \circ \overset{q}{S}{}_1^0 + \ldots + \mu_{n^q-2} \overset{p-q}{T}{}_{n^q-2}^0 \circ \overset{q}{S}{}_{n^q-2}^0 + \psi\left(\overset{p-q}{T}{}_{n^q-1}^0 \circ \overset{q}{S}{}_{n^q-1}^0 + \overset{p-q}{T}{}_{n^q}^0 \circ \overset{q}{S}{}_{n^q}^0\right)$$

$$(14\text{a})\qquad \overset{q}{S}{}_\alpha^0 \overset{(q)}{\cdot} \overset{q}{S}{}_\beta^0 = \begin{cases} 0, & \textit{für } \alpha \neq \beta \\ \pm 1, & \textit{für } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$(14\text{b})\qquad \overset{p-q}{T}{}_\alpha^0 \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p-q}{T}{}_\beta^0 = \begin{cases} 0, & \textit{für } \alpha \neq \beta \quad \textit{mit Ausnahme des Falles } \alpha = n^q - 1,\ \beta = n^q. \\ \pm 1, & \textit{für } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Wir können die Gleichung (14) auf eine der Gleichung (9) ähnliche Form bringen:

$$(15)\qquad \overset{p}{A} = \overset{p-q}{T}_1 \circ \overset{q}{S}{}_1^0 + \ldots + \overset{p-q}{T}_{n^q-2} \circ \overset{q}{S}{}_{n^q-2}^0 + \psi\left(\overset{p-q}{T}{}_{n^q-1}^0 \circ \overset{q}{S}{}_{n^q-1}^0 + \overset{p-q}{T}{}_{n^q}^0 \circ \overset{q}{S}{}_{n^q}^0\right)$$

wo $\overset{p-q}{T}_\alpha \overset{(p-q)}{\cdot} \overset{p-q}{T}_\beta = 0$, für $\alpha \neq \beta$ ist (mit Ausnahme des Falles $\alpha = n^q - 1$, $\beta = n^q$). Im Falle $q = 1$ ist entweder die Gleichung (9a) gültig oder können wir aus (15)

$$(15\text{a})\qquad \overset{p}{A} = \overset{p-1}{T}_1 \circ \mathbf{s}_1^0 + \ldots + \overset{p-1}{T}_{n-2} \circ \mathbf{s}_{n-2}^0 + \psi\left(\overset{p-1}{T}{}_{n-1}^0 \circ \mathbf{s}_{n-1}^0 + \overset{p-1}{T}{}_n^0 \circ \mathbf{s}_n^0\right)$$

gewinnen, wo die letzten zwei Tensoren zu einander nicht orthogonal sind. Daraus folgt dann, daß der Satz 3, auch in Räumen indefiniter Metrik gültig ist, und zwar entweder ohne Änderungen, oder (15a) entsprechend so, daß wir von den Komponenten $\overset{p-1}{T}{}_{n-1}^0$ und $\overset{p-1}{T}{}_n^0$ in gleicher Weise $(n-1)$ Stücke weglassen müssen, da sie zueinander nicht orthogonal, aber normiert sind.

Schließlich erwähnen wir, daß sich alle unsere Sätze auf den reellen Raum beziehen, jedoch sind sie offenbar auch für die komplexen Räume des Hermiteschen Maßtensors gültig, nur müßen wir statt der symmetrischen Tensoren der Sätze I, 1, 4 und 6 auf Hermitescher Tensoren übergehen.

Die Form der Gleichungen weicht nur insofern von den Vorigen ab, daß stellenweise die konjugierten Werte der Vektoren und Tensoren auftreten.

Literatur

[1] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, *Москва—Ленинград*, 1951.
[2] Pach Zs. Pálné—Frey Tamás, Vektor és tensoranalízis, *Budapest*, 1960.
[3] J. A. Schouten, Ricci-Calculus, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.
[4] Szentmártony Tibor, Vektor és tenzorszámítás, *Budapest*, 1948.

(Eingegangen am 28. Juni 1962.)