Konstruktionen mit Lineal und Winkelübertrager in der hyperbolischen und euklidischen Ebene

Von WALTER BÖRNER (Jena)

Es soll hier die Frage beantwortet werden, ob Lineal mit Winkelübertrager und Lineal mit Streckenübertrager äquivalente Instrumente sind (vergl. [1]). Die Antwort auf diese Frage fällt unterschiedlich aus, je nachdem, ob man das Problem in der euklidischen oder hyperbolischen Ebene behandelt. Es zeigt sich, daß man in der hyperbolischen Ebene den Streckenübertrager durch den Winkelübertrager ersetzen kann, in der euklidischen Ebene jedoch nicht.

1. In der *absoluten Geometrie* lassen sich mit Lineal und Winkelübertrager folgende Konstruktionen ausführen:

a) Es soll eine auf der Geraden g gelegene Strecke AB halbiert werden.

Dazu zeichne man durch A eine Gerade h, die mit g den Winkel α einschließt. Diesen Winkel α trage man in A an g noch nach der anderen Seite von g und in B an g nach beiden Seiten von g an. Wenn α nicht zu groß gewählt wurde ($\alpha < \frac{\pi}{2}$ im euklidischen Fall, im hyperbolischen Fall je nach Länge der Strecke AB entsprechend kleiner), entstehen Schnittpunkte C und D, deren Verbindungsgerade senkrecht auf AB steht und AB halbiert, wie aus den Kongruenzsätzen folgt.

b) In einem gegebenen Punkt P einer Geraden g soll die Senkrechte errichtet werden.

Man trage einen gemäß *a)* konstruierten rechten Winkel in P an g an.

c) Ein Punkt P soll an einer Geraden g gespiegelt werden.

Man hat dazu zwei Geraden g_1 und g_2 zu zeichnen, die durch P gehen und g schneiden. Trägt man die entstehenden Winkel α und β nach der anderen Seite von g hin ab, dann schneiden sich die beiden so entstehenden Geraden im Spiegelpunkt P' von P. PP' ist das Lot von P auf g.

d) Eine Strecke AB auf einer Geraden g soll auf derselben Geraden g vom Punkte P aus abgetragen werden.

Das gelingt durch Spiegelung: man halbiere BP und spiegele A am Halbierungspunkt.

2. In der *hyperbolischen Ebene* kann man mit Lineal und Winkelübertrager außerdem noch die folgenden beiden Konstruktionsaufgaben lösen:

a) Gegeben sind zwei überparallele Geraden g_1 und g_2 mit dem gemeinsamen Lot F_1F_2 und auf g_1 eine Strecke AB. Diese Strecke soll auf g_2 von einem gegebenen Punkt C aus abgetragen werden.

Dazu konstruiere man auf g_1 den Punkt B', so daß F_1B' kongruent AB wird. Das ist nach 1. *d)* möglich. Man verbinde die Mitte M der Strecke F_1F_2 mit B'. Aus Symmetriegründen schneidet diese Gerade g_2 in einem Punkt B'' und es ist $B''F_2$ kongruent F_1B'. Nun kann man die Strecke $B''F_2$ längs g_2 verschieben, so daß C zu einem ihrer Endpunkte wird.

b) Es soll das gemeinsame Lot zweier überparalleler Geraden g und h konstruiert werden.

Hierzu verwendet man das von Hilbert in [2], S. 164 angegebene Konstruktionsverfahren. Dieses läßt sich nach dem Vorhergehenden offenbar so einrichten, daß es mit Lineal und Winkelübertrager ausführbar wird.

Nun kann man die allgemeine Aufgabe der Streckenübertragung lösen: Gegeben ist eine Strecke AB auf einer Geraden g_1 sowie eine Gerade g_2 und ein Punkt C auf g_2. Gesucht ist ein Punkt D auf g_2, so daß die Strecke CD kongruent AB ist.

Es gibt zwei Fälle:

1. g_1 und g_2 sind überparallel,
2. g_1 und g_2 schneiden sich oder sind parallel.

Im ersten Fall konstruiere man gemäß 2. *b)* ihr gemeinsames Lot und nehme dann gemäß 2. *a)* die Streckenübertragung vor. Im zweiten Fall zeichnet man eine Hilfsgerade h, die sowohl zu g_1 als auch zu g_2 überparallel ist. Eine solche Gerade ist immer zu finden. Man überträgt dann die Strecke AB zunächst auf die Gerade h und von h auf die Gerade g_2.

Es folgt also der Satz: *In der hyperbolischen Ebene kann man Lineal mit Streckenübertrager durch Lineal mit Winkelübertrager ersetzen.*

3. Es wird nun gezeigt, daß man in der euklidischen Ebene mit Lineal und Winkelübertrager nicht die Halbierende eines beliebigen Winkels konstruieren kann. Zum Beweis werde die Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen. Es seien die Punkte P_i mit den Koordinaten x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ gegeben, aus denen durch Ziehen von Geraden mit Hilfe des Lineals neue Punkte konstruiert werden. Deren Koordinaten sind rational durch die x_i, y_i ausdrückbar. Die neuen Punkte können wiederum durch Geraden verbunden werden, usf. Die Koordinaten der sämtlichen so konstruierbaren Punkte gehören dem von x_i, y_i erzeugten Rationalitätsbereich R an. Alle auftretenden Geraden haben ein Steigungsmaß aus R. Verwendet man den Winkelübertrager als weiteres Konstruktionshilfsmittel, so haben die mit dessen Hilfe neu konstruierten Geraden ebenfalls nur Steigungsmaße aus R: es seien g_1, g_2 und g nur mit Hilfe des Lineals konstruierte Geraden; sie mögen die Steigungsmaße $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ und $\operatorname{tg}\alpha$ haben. Schließen g_1 und g_2 den Winkel φ ein, so ist die Zahl

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

ein Element von R. Trägt man nun mit dem Winkelübertrager den Winkel φ an die Gerade g an, so erhält man eine Gerade h, deren Steigungsmaß $\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)$ ebenfalls ein Element aus R ist. Haben zwei sich schneidende Geraden ein Steigungsmaß aus R, so hat die Halbierende des von ihnen gebildeten Winkels ein Steigungsmaß, das im allgemeinen nicht in R liegt, da es die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten aus R ist.

Da man jedoch mit Lineal und Streckenübertrager jeden Winkel halbieren kann (siehe [1]), so folgt aus dem soeben bewiesenen der Satz:

In der euklidischen Ebene sind Lineal mit Streckenübertrager und Lineal mit Winkelübertrager keine äquivalenten Instrumente.

Es ist insbesondere nicht möglich, mit Lineal und Winkelübertrager beliebig Strecken zu übertragen.

Literatur

[1] S. Guber, Strecken- und Winkelübertragung mit Lineal und Eichmaß in der absoluten Geometrie, *S. B. Math. -Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.* (1960), 251–261.

[2] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, *Leipzig* und *Berlin*, 1930.

(Eingegangen am 8, Dezember 1962.)