Grundeigenschaften des Dreieckes mit imaginären Winkeln

Von ENDRE NÉMETH (Budapest)

Ein wohlbekannter Lehrsatz der euklidischen Geometrie sagt aus, daß jede Seite eines ebenen Dreieckes kleiner ist, als die Summe der beiden anderen. Es ist daher unmöglich, aus drei gegebenen Strecken, von denen eine größer ist als die Summe der beiden anderen, ein Dreieck zu konstruieren.

Dieser Lehrsatz, welcher mit der Erfahrung in vollkommenem Einklang ist, läßt sich auf Grund einer mit imaginären Größen erweiterten geometrischen Anschauung folgendermaßen verallgemeinern:

Man kann ohne Beschränkung, d. h. mit beliebigen gegebenen Seitenlängen Dreiecke konstruieren; wenn keine der gegebenen Längen größer ist, als die Summe der beiden anderen, dann sind sämtliche Ecken und Winkeln des Dreieckes reell, im entgegensetzen Falle ist aber die der größten Seite gegenüberliegende Ecke und alle drei Winkel imaginär.

Nächtsfolgend wird an Hand einer Methode, die zur Veranschaulichung gewisser, mit imaginären Eigenschaften behafteter Größen geeignet ist, gezeigt, daß auch der soeben verallgemeinerte Lehrsatz mit der Erfahrung in einwandfreie Übereinstimmung gebracht werden kann. Die Winkelsumme ergibt im Falle von imaginären Winkeln $i\pi$. Übrigens gelten alle Eigentümlichkeiten des reellen Dreieckes auch für jene mit imaginären Winkeln.

Die Möglichkeit, imaginäre geometrische Größen in anschaulicher Gestalt darzustellen, ist in der eindeutigen Entsprechung geboten, die zwischen der Gesamtheit der Kreise der Ebene einerseits und der Gesamtheit der Punkte des Raumes andererseits errichtet werden kann. Die Gesamtheit aller Kreise der Ebene und die Gesamtheit aller Punkte des Raumes bilden nämlich jede für sich ein dreifach unendliches, homogenes und isotropes Kontinuum, und einem Element des ersten Kontinuums entspricht im zweiten ein und nur ein Element.

Viele hervorragende Bahnbrecher der Geometrie u. a. CHASLES, MÖBIUS, CAYLEY, DARBOUX, LIE, haben diese ein-eindeutige Beziehung ausgenützt, jedoch erst FIEDLER ([1]) hatte sie zu einem einheitlichen geometrischen System entwickelt. Leider hat die Zyklographie von FIEDLER, die später von MÜLLER [3] weiterentwickelt wurde, den Nachteil, daß sie für die Übertragung von metrischen Beziehungen ungeeignet ist, da das gewählte Abbildungsverfahren keine von den metrischen Grundbegriffen, Länge und Winkel, definieren läßt.

Wie der Verfasser in zwei früher veröffentlichten Aufsätzen [2], [4] gezeigt hat, gelang es ihm der Gesamtheit aller Kreise der Ebene im Rahmen der obgenannten Wechselbeziehung solche Deutung zuzuweisen, auf Grund welcher es möglich geworden ist, alle geometrischen Grundbegriffe, einschließlich Länge und Winkel, im Kreissystem zu definieren und für die Erkenntnis des rechten Winkels ein einfaches Kriterium abzuleiten. So zeigte es sich offensichtlich, daß die Gesamtheit aller Kreise der Ebene — der wir im folgenden *zyklischen Raum* nennen werden — für ein duales Kontinuum des wirklichen Raumes betrachtet werden kann. Bezüglich dieser zwei Kontinua ist daher das *Prinzip der Dualität* anwendbar, kraft welches zu jedem, im wirklichen Raume gemäß irgendwelchem Verfahren erzeugtem geometrischen Gebilde — sei es eine Linie oder eine Fläche — im zyklischen Raume ein analoges Gebilde gehört, und für beide Gebilde dieselbe Sätze gelten.

Die Bedeutung dieser zyklischen Dualität stellt sich heraus, wenn man bedenkt, daß die Kreise in dieser Beziehung zweierlei Rolle spielen: sie sind Kreise der Ebene und gleichzeitig Punkte des zyklischen Raumes. Betrachten wir nun ein Gebilde im wirklichen Raume, für welches ein bestimmter Satz gilt. Dieser Satz wird dann auch für das analoge Gebilde des zyklischen Raumes gültig sein, wovon durch Ersetzung der zyklischen Punkte durch die entsprechenden Kreise — als Umwertung des ursprünglichen Satzes — ein Satz über Kreise der Ebene erhalten wird. Meistens drückt dieser Satz neue, bisher unbekannte Beziehungen aus, führt aber manchmal zu einfacher Verifikation von bekannten Sätze. Mit Hilfe der zyklischen Dualität kann man auch für Konstruktionszwecke einfache und systematische Verfahren ableiten.

Um das Problem des Dreieckes mit imaginären Winkeln behandeln zu können ist es notwendig, zuerst die Definitionen der Grundbegriffe des zyklischen Raumes klarzulegen.

Definition der Grundgebilden, Punkt, Gerade, Ebene

Dem Begriff „Punkt" des wirklichen Raumes entspricht im zyklischen Raume der Kreis als Grundelement, dessen Rolle sich folgendermaßen erklären läßt.

Man kann die Ebene der Kreise als Durchdrängungsfläche des wirklichen Raumes mit dem zyklischen Raume vorstellen, da jeder Punkt gleichzeitig als ein Kreis vom Halbmesser Zero betrachtet werden kann. Wir benützen diese Ebene — die wir im Folgenden *Grundebene* benennen — als Bezugsfläche für die Bestimmung der Lage der Punkte des zyklischen Raumes.

Jeder beliebige Kreis mit dem Mittelpunkt A_0 und mit dem Radius r bedeutet einen zyklischen Punkt $\mathbf{A}$, welcher eigentlich ein *imaginärer* Punkt ist, dessen Entfernung von der Grundebene *gleichfalls imaginär* und gleich ir ist. Um Zweideutigkeit zu vermeiden, sind die Kreise mit Umlaufsrichtung versehen, und wenn dieser mit dem dem Uhrzeigersinn übereinstimmt, so liegt der zyklischer Punkt über der Grundebene, im entgegensetzten Falle darunter. Da die Entfernung $\mathbf{r}$ des zyklischen Punktes imaginär ist, kann man sie auf keiner Geraden des wirklichen Raumes auftragen, nur der Endpunkt ist durch den Kreis mit dem Mittelpunkte A_0, und Radius r, bezeichnet. Zur Kennzeichnung, daß dieser Kreis jetzt nicht als eine Kreislinie, sondern als ein zyklischer Punkt zu betrachten ist, benützen wir in diesem Falle *fette* Buchstaben, welche rechts oben mit einem $+$ oder $-$ Zeichen versehen sind, die den Umlaufsinn zeigen. In dieser Hinsicht kann man die folgende Ausdrücke benützen: „Der zyklische Punkt $\mathbf{A}^+$, welcher den Mittelpunkt A_0, den Radius r und positives Vorzeichen hat, liegt *über* der Grundebene und zwar in der Entfernung $\mathbf{r}$; der zyklische Punkt $\mathbf{B}^-$ dagegen liegt *unter* der Grundebene in einem Abstand $\mathbf{r}_1$ (Abb. 1.)

Wir betonen, daß die zyklischen Punkte $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{B}^-$ sich *nicht im wirklichen Raume* befinden, und $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ imaginäre Größe sind, daher bei Rechnungen mit der imaginären Einheit zu multiplizieren sind:

$$\mathbf{r} = ri, \quad \mathbf{r}_1 = r_1 i$$

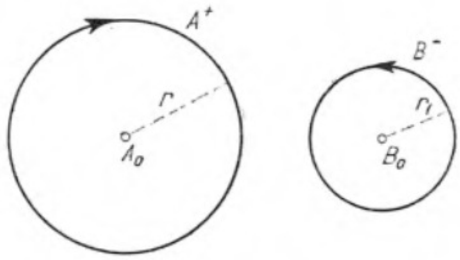

Abb. 1

Der *Geraden* des wirklichen Raumes entspricht im zyklischen Raume eine unendliche Reihe von Kreisen, deren Mittelpunkte auf derselben Geraden — auch *Achse* der zyklischen Geraden genannt — liegen und gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt, sowie gemeinsame Tangente haben (Abb. 2.). Bei zyklischen Punkten mit

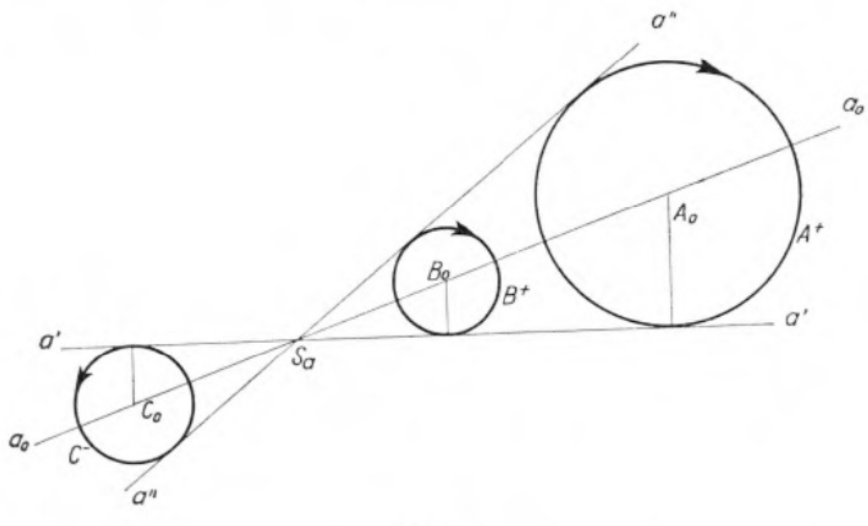

Abb. 2

gleichem Vorzeichen (d. h. gleichem Drehsinn) ist der *äußere Ähnlichkeitspunkt*, bei *verschiedenen Vorzeichen* der *innere Ähnlichkeitspunkt* maßgebend. Der maßgebende Ähnlichkeitspunkt wo die zyklische Gerade die Grundebene trifft, wird auch *Nullpunkt der zyklischen Geraden* genannt.

Zyklische Punkte mit gleichem Vorzeichen besitzen gemeinsame äußere, die mit verschiedenen Vorzeichen gemeinsame innere Tangenten, diese werden auch

Konturgeraden der zyklischen Geraden genannt. Der Öffnungswinkel der Konturgeraden bestimmt das Verhältnis, nach welchem sich die Größe des Halbmessers der zyklischen Punkte verändert. An Abb. 2 sind a' und a'' die Konturgeraden, a_0 die Achse, S_a der Nullpunkt der zyklischen Geraden **a**.

Im Falle, wo der gemeinsame Ähnlichkeitspunkt der zyklischen Geraden ins Innere der zyklischen Punkte fällt (Abb. 3), gibt es keine reelle Tangente. In solchen Fällen werden die Tangenten durch jene Geraden ersetzt, welche die End-

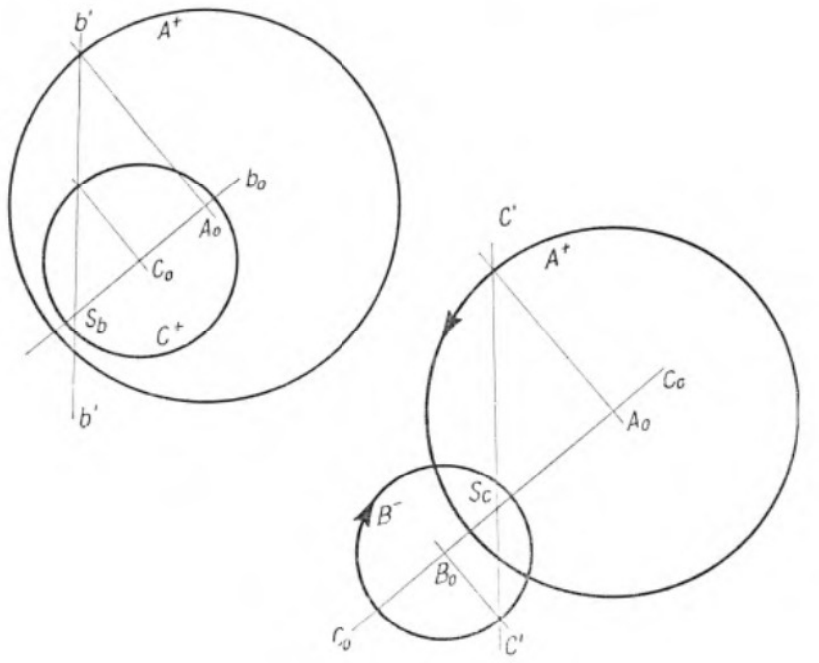

Abb. 3

punkte der auf die Achse der zyklischen Geraden senkrecht stehenden Radien verbinden. Man kann die zyklischen Geraden mit reellen Konturen in die Grundebene eindrehen, während die Eindrehung einer zyklischen Gerade ohne reellen Konturen unmöglich ist.

Eine zyklische Gerade, deren Nullpunkt sich im Unendlichen befindet, besteht aus lauter gleichgroßen zyklischen Punkten, und ist der Lage nach *parallel* mit der *Grundebene* (Abb. 4a). Infolge der Definition des zyklischen Punktes einer Kreisreihe, die aus *konzentrischen* Kreisen besteht (Abb. 4b), gibt es eine auf die Grundebene senkrechte zyklische Gerade, deren Projektion auf die Grundebene mit dem gemeinsamen Mittelpunkt zusammenfällt.

Die zyklische Gerade ist laut ihrer Definition durch zwei — mit Vorzeichen (d. h. mit Umlaufssinn) versehene — Punkte eindeutig bestimmt. Die Definition gibt gleichzeitig auch das Kriterium der Inzidenz — d. h. ob ein zyklischer Punkt auf der gegebenen zyklischen Geraden liegt, oder nicht, oder ob zwei zyklische Geraden sich schneiden oder nicht — an.

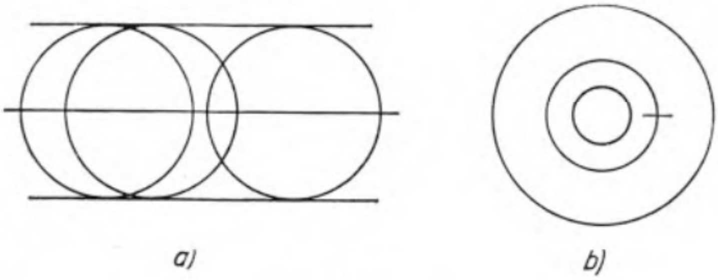

Abb. 4

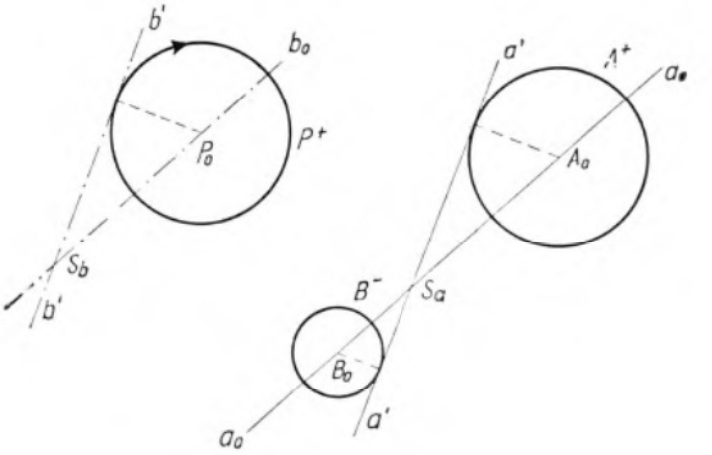

Abb. 5

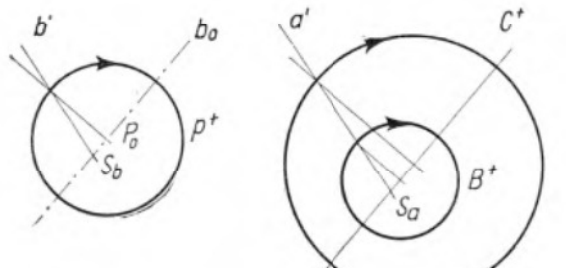

Abb. 6

Achsen und Konturgeraden (oder Ersatzlinien der letzteren) von parallelen zyklischen Geraden sind gleichfalls parallel. Diese Eigenschaft gibt Aufklärung darüber, wie man jene zyklische Gerade **b** herstellen kann, welche durch den zyklischen Punkt **P** geht und zu einer gegebenen zyklischen Geraden **a** parallel ist (Abb. 5., 6).

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir — obwohl dies für unser Problem belanglos ist — daß drei zyklische Punkte, die nicht auf derselben zyklischen Geraden liegen, eine zyklische Ebene bestimmen, deren Schnittgerade mit der Grundebene der Ähnlichkeitsgeraden der drei zyklischen Punkte identisch ist (Abb. 7).

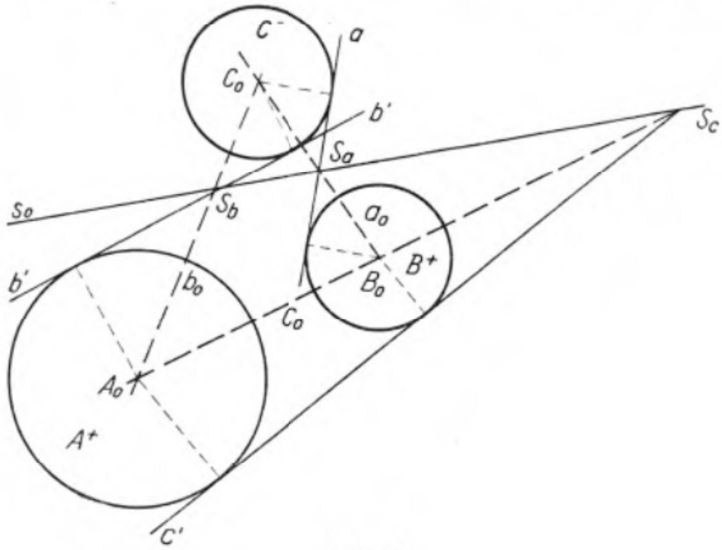

Abb. 7

Definition der Länge

Da die Projektion der zyklischen Punkte **A** und **B** an der Grundebene mit ihren Mittelpunkten A_0 und B_0 identisch sind, und dabei ihre Höhen über der Grundebene durch das Produkt der Halbmesser mit der imaginären Einheit definiert sind, d. h.:

$$\mathbf{A}A_0 = ir_1,$$

$$\mathbf{B}B_0 = ir_2,$$

ergibt sich ihre Entfernung, gemäß einer mit der üblichen analogen Anschauung, als

$$\mathbf{d} = \overline{\mathbf{AB}} = \sqrt{\overline{A_0B_0^2} + (\overline{\mathbf{A}A_0} - \overline{\mathbf{B}B_0})^2} = \sqrt{d_0^2 + (r_1 i - r_2 i)^2} = \sqrt{d_0^2 - (r_1 - r_2)^2}.$$

Diese Definition der Entfernung (oder Länge) bedeutet in Worten, daß die Länge einer Strecke zwischen zwei zyklischen Punkten, zyklische Entfernung genannt, reell oder imaginär sein kann, je nachdem ob der maßgebende Ähnlichkeitspunkt der Strecke außerhalb der zyklischen Punkte liegt oder in dessen Inneren. Die möglichen Fälle sind wie folgt:

1. der maßgebende Ähnlichkeitspunkt liegt außerhalb der zyklischen Punkte: die Länge der zyklischen Strecke ist reell und ist zwischen den Berüruhrungspunkten der gemeinsamen Tangente der zyklischen Endpunkte zu messen, und zwar

a) falls die zyklischen Punkte gleiche Vorzeichen haben, so ist die zyklische Entfernung zwischen den Berührungspunkten der äußeren gemeinsamen Tangenten zu messen (Abb. 8.);

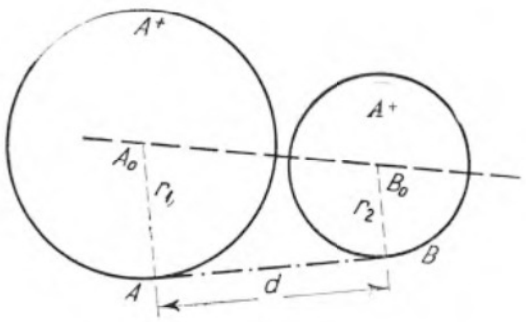

Abb. 8

b) falls die zyklischen Punkte verschiedene Vorzeichen haben, so ist die zyklische Entfernung zwischen den Berührungspunkten der inneren gemeinsamen Tangenten zu messen (Abb. 9.);

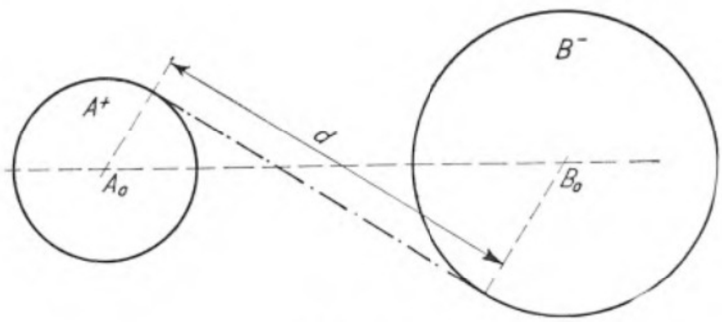

Abb. 9

2. der maßgebende Ähnlichkeitspunkt fällt in das Innere der zyklischen Punkte: dann ist die Länge der zyklischen Strecke imaginär und gleich der *algebraischen* Summe der auf die Achse der Strecke senkrechten Halbsegmente, und zwar

a) falls die zyklischen Punkte gleiche Vorzeichen haben, so ist die Entfernung gleich der Differenz der Halbsegmente (Abb. 10.);

b) falls die zyklischen Punkte verschiedene Vorzeichen haben, so ist die Entfernung gleich der Summe der Halbsegmente (Abb. 11.).

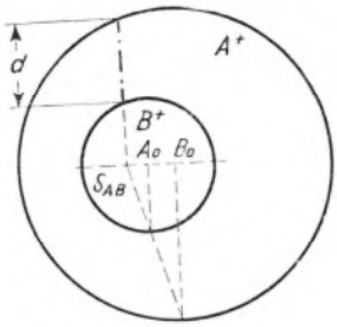

Abb. 10

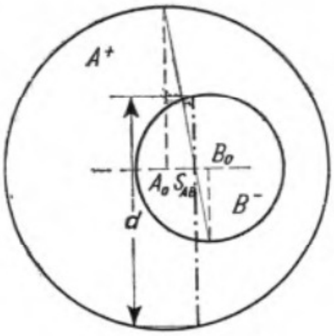

Abb. 11

Definition des Winkels

Schneiden sich die zyklischen Geraden **a** und **b** im zyklischen Punkte **C** (Abb. 12.), und bezeichnen wir die Entfernung des Nullpunktes A_0 der zyklischen Geraden **a** von dem zyklischen Punkte **C** mit t_a, und ebenso die Entfernung des Nullpunktes B_0 der zyklischen Gerades **b** von dem zyklischen Punkte **C** mit t_b. Konstruieren wir ein Dreieck mit den Seitenlängen A_0B_0, t_a, t_b: so bestimmt der Winkel, welcher der Seite A_0B_0 gegenüber liegt, den Winkel der zyklischen Geraden **a** und **b**. Die zwei anderen Winkel geben das Maß der Winkel, die die Nullgerade c mit den zyklischen Geraden **a** und **b** bildet. Falls

$$t_a + t_b < c$$

gilt, so ist es unmöglich, ein solches reelles Dreieck zu konstruieren; das bedeutet aber nicht, daß der Winkel (**a**, **b**) nicht existiert, sondern nur, daß dieser Winkel imaginär ist! Im folgenden werden wir den absoluten Wert solcher imaginären Winkel bestimmen. Erst erklären wir aber, wie man erkennen kann, daß zwei zyklische Geraden senkrecht aufeinander sind.

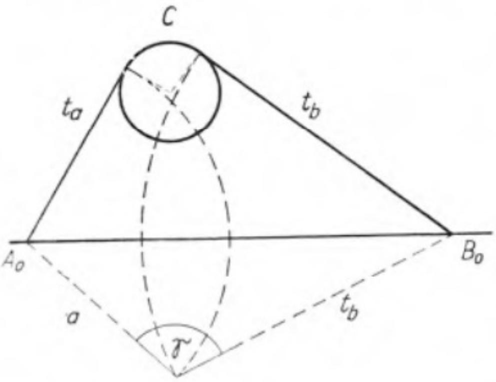

Abb. 12

Zu diesem Zwecke konstruieren wir ein solches gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis **AB** auf der zyklischen Geraden **g** liegt, die Spitze H_0 befindet sich aber in der Grundebene und ist daher ein Nullpunkt (Abb. 13.). Da wir ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren wollen, so muß

$$\mathbf{A}H_0 = \mathbf{B}H_0$$

gelten, d. h. aus dem Punkte H_0 müßen zu den Kreisen die die zyklischen Punkte

A und **B** darstellen, gleichlange Tangenten geführt werden können. Der Punkt H_0 soll dementsprechend auf die Potenzachse der erwähnten Kreise fallen. Ein Punkt dieser Potenzachse läßt sich leicht finden, wenn man die Strecke zwischen den Berührungspunkten $A'B'$ der gemeinsamen Tangenten halbiert. Der Halbierungspunkt K' bestimmt gleichzeitig den Mittelpunkt **K** der zyklischen Strecke **AB**. Die durch den Punkt K' und senkrecht zur Achse A_0B_0 der zyklischen Strecke **g** geführte

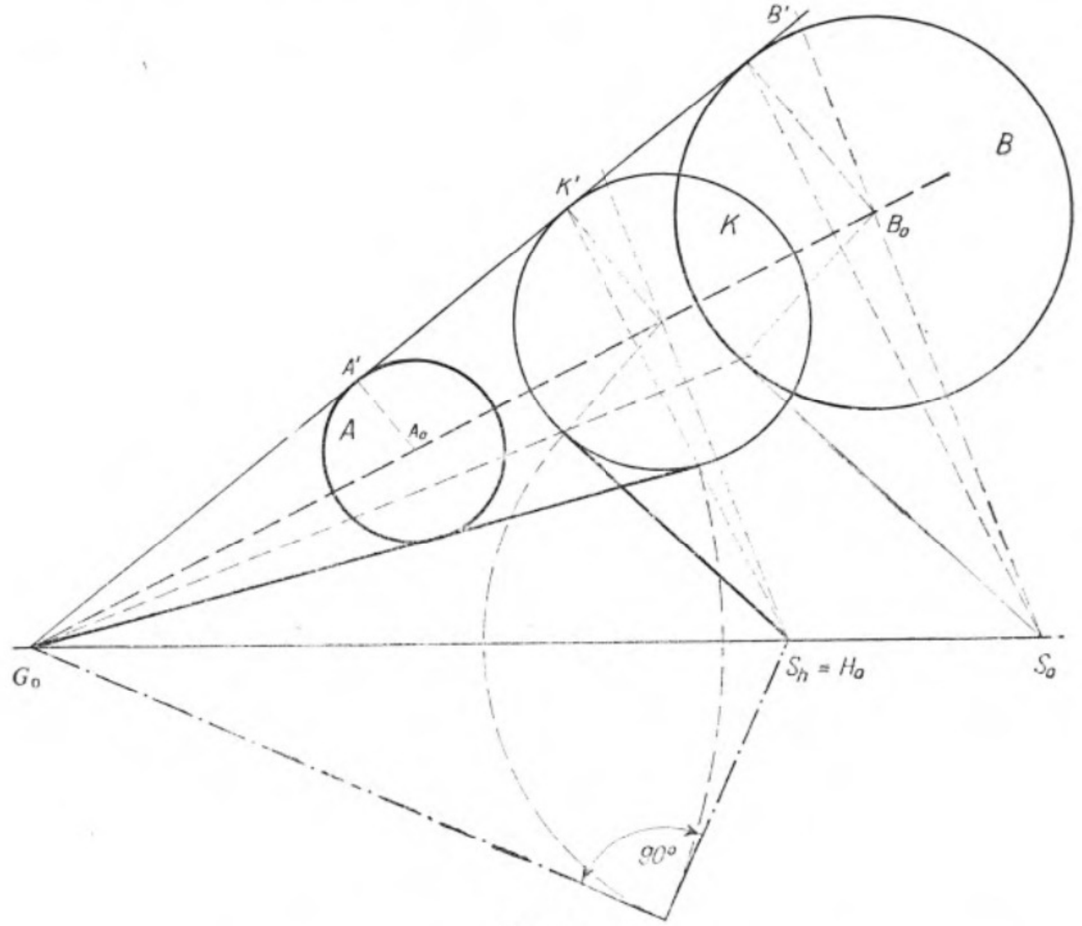

Abb. 13

Gerade ist die gesuchte Potenzachse. Es ist leicht einzusehen, daß diese Potenzachse identisch ist mit der Polaren des Nullpunktes G_0 der zyklischen Geraden **g** in Bezug auf den Kreis, welcher den zyklischen Punkt **K** darstellt. Wenn man den Punkt H_0 auf dieser Potenzachse (Polaren) irgendwo aufnimmt, dann wird das Dreieck $\mathbf{A}H_0\mathbf{B}$ gleichschenkelig sein. Dann aber bildet die Gerade $\mathbf{K}H_0$, welche die Basis halbiert, mit der Basis einen rechten Winkel, d. h. die zyklische Gerade $\mathbf{h} \equiv \mathbf{KH}_0$ steht senkrecht auf die zyklische Gerade $\mathbf{g} \equiv \mathbf{AB}$.

Auf Grund der soeben vollführten Analyse, kann das Kriterium dafür, daß zwei zyklische Geraden senkrecht aufeinander sind, folgendermaßen abgefaßt werden:

*Zwei zyklische Geraden (**g** und **h**) sind senkrecht aufeinander, wenn die Polare des Nullpunktes (G_0 resp. H_0) der einen in Bezug auf den Kreis, welcher ihren Schnittpunkt (**K**) darstellt durch den Nullpunkt (H_0 resp. G_0) der anderen geht.*

Das Dreieck mit imaginären Winkeln

Soll man ein solches Dreieck konstruieren, (Abb. 14.) dessen eine Seite $AB=c$ größer ist, als die Summe der zwei anderen (a und b), dann erweist sich das übliche Konstruktionsverfahren als unbrauchbar da der Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius b und jener mit dem Mittelpunkte B und dem Radius a keinen *reellen* Schnittpunkt haben; *imaginäre* Schnittpunkte existieren aber! Jeder Kreis,

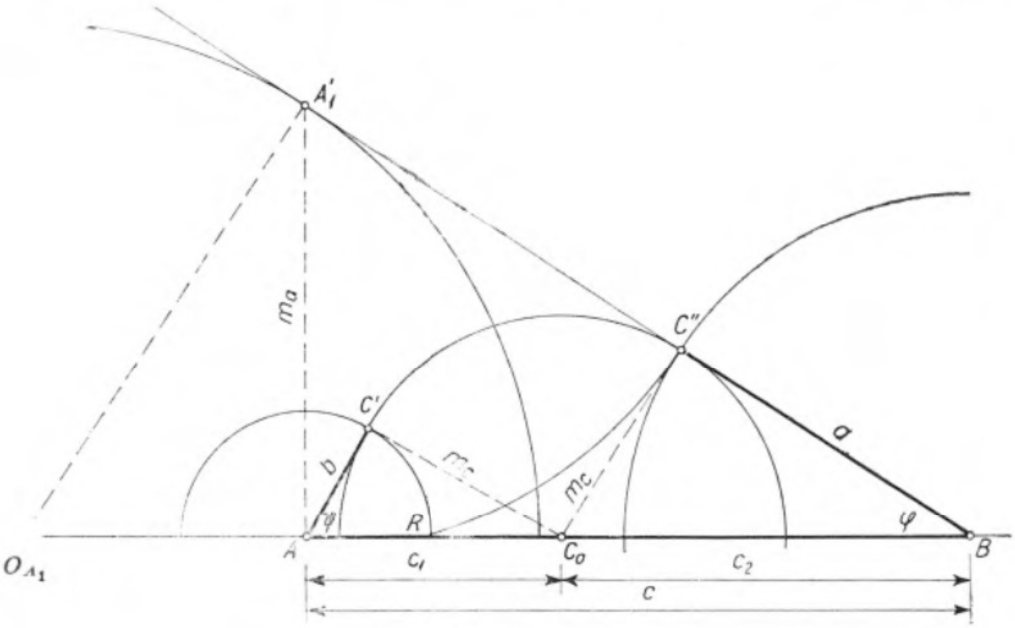

Abb. 14

für den die Länge der Tangente gezogen vom Punkte A gleich b, vom Punkte B gleich a ist, stellt einen imaginären Schnittpunkt (**C**) im zyklischen Raume dar, welcher dem gesuchten imaginären Eckpunkt des Dreieckes identisch ist.

Die Zahl solcher imaginärer Eckpunkte **C** ist unendlich, so wie auch im Falle, wo reelle Eckpunkte im wirklichen Raume existieren, die alle auf einem Kreis liegen, den man durch Drehung des Dreieckes um die Seite AB erzeugen kann. Da alle diese unendlich viele Dreiecke kongruent sind, genügt die Analyse eines einzigen Dreiecks. Wir behandeln den Fall, wo der Mittelpunkt C_0 des Kreises, welcher den zyklischen Eckpunkt **C** repräsentiert, auf der Strecke AB liegt. Aus der Definition des zyklischen Punktes **C** folgt, daß die Längen der Tangenten gezogen von dem Punkte C_0 zu den Kreisen mit den Mittelpunkten A resp. B und den Radien b resp. a, gleich lang sein müssen, da beide Halbmesser m_c desselben Kreises sind (der den zyklischen Punkt **C** darstellt). Dieser Radius m_c gibt gleichzeitig die

Höhe des imaginären Punktes **C** über der Grundebene, ist daher Maß jener Höhe des Dreieckes, welche zur Seite c gehört.

Die Winkel eines solchen Dreieckes sind imaginär: $\alpha i, \beta i, \gamma i$, wo die Größen α, β, γ reell sind. Gemäß der Bezeihnungen der Abb. 14.

$$\sin \alpha i = \frac{i m_c}{b},$$

d. h.

$$\frac{1}{i} \sin \alpha i = \frac{m_c}{b} = \operatorname{sh} \alpha,$$

oder in anderer Form

$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{m_c}{b} = \operatorname{tg} \psi.$$

Aus dieser bekommt man die quadratische Gleichung

$$e^{2\alpha} - 2 \operatorname{tg} \psi \cdot e^{\alpha} - 1 = 0,$$

deren Wurzeln

$$e^{\alpha} = \operatorname{tg} \psi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + 1},$$

oder in logarithmischer Form

$$\alpha = \ln \left(\operatorname{tg} \psi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + 1}\right).$$

Da α eine reelle Zahl ist, kann in den Klammern nur das positive Vorzeichen gültig sein, so schreibt man

$$\alpha = \ln \left(\operatorname{tg} \psi + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + 1}\right) = \ln \left(\operatorname{tg} \psi + \frac{1}{\cos \psi}\right).$$

Wir drücken nun die goniometrischen Funktionen $\operatorname{tg} \psi$ und $\cos \psi$ mit den Daten der Abb. 14. aus, und so bekommen wir

$$\text{(I)} \qquad \alpha = \ln \left(\frac{m_c}{b} + \frac{c_1}{b}\right),$$

$$\text{(II)} \qquad \beta = \ln \left(\frac{m_c}{a} + \frac{c_2}{a}\right).$$

Die größte Seite des Dreieckes heißt c, an der gegenüberliegenden imaginären Ecke (**C**) ist der imaginäre Winkel γi. Um den Sinus dieses Winkels zu bestimmen, stellen wir die durch die Ecke A gehende und auf die imaginäre Seite **BC** senkrechte Höhe ($\mathbf{m}_a$) des Dreieckes her. Schneidet die im Punkte A auf die Gerade AB errichtete Senkrechte die Konturgerade der zyklischen Geraden BC'' im Punkte A_1', dann muß der Kreis, welcher den zyklischen Fußpunkt der gesuchten Höhe darstellt, die Gerade BC'' im Punkte A_1' berühren, und sein Mittelpunkt O_{A_1} muß auf der Geraden AB liegen.

In diesem Falle liegt nämlich der zyklische Punkt $\mathbf{A}_1$ auf der zyklischen Geraden $\mathbf{BC}$, da sein darstellender Kreis die Konturgerade BC'' der zyklischen Geraden $\mathbf{BC}$ berührt, und sein Mittelpunkt O_{A_1} auf der Achse der zyklischen Geraden AB liegt. Andererseits steht die zyklische Gerade $A\mathbf{A}_1$ senkrecht auf die zyklische Gerade $\mathbf{BC}$, da laut der Konstruktion des zyklischen Punktes $\mathbf{A}_1$ die Polare AA_1' des Punktes B in Bezug auf den Kreis, welcher den zyklischen Schnittpunkt $\mathbf{A}_1$ darstellt, durch den Nullpunkt der zyklischen Geraden $\mathbf{m}_a$ geht. Es ist daher bewiesen, daß die zyklische Strecke $A\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{m}_a$ mit der auf die Seite BC senkrechten Höhe identisch ist. Von den Endpunkten A und $\mathbf{A}_1$ erfüllt der Nullpunkt A gleichzeitig die Rolle des maßgebenden Ähnlichkeitspunktes, und da er in das Innere des den anderen Endpunkt darstellenden Kreises fällt, ist die Länge dieser Strecke dem halben Segmente AA_1' gleich, aber imaginäre, d. h.

$$\mathbf{m}_a = im_a = iAA_1'$$

Man darf aber nicht außer Acht lassen, daß der Fußpunkt $\mathbf{A}_1$ der Höhe $\mathbf{m}_a$ immer auf die Verlängerung der Seite $\mathbf{a}$ fällt, daher der Winkel γi immer ein stumpfer Winkel ist. In anderen Worten: das rechtwinklige Dreieck $A\mathbf{A}_1\mathbf{C}$ enthält immer den äußeren Winkel $(\pi-\gamma)i$, so kann man jenem Verfahren ähnlich, welches wir bei der Bestimmung der Winkel αi und βi befolgten, schreiben:

$$\frac{1}{i}\sin(\pi-\gamma)i = \frac{m_a}{b} = \operatorname{sh}(\pi-\gamma).$$

Aus der Abbildung ist es aber wahrnehmbar, daß

$$m_a = c\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\cdot m_c}{a}.$$

Es ergibt sich aus diesen Gleichungen, daß

$$\operatorname{sh}(\pi-\gamma) = \frac{c\cdot m_c}{ab}.$$

Auf Grund dieses Zusammenhanges gelangen wir durch Wiederholung des früher angewandten Verfahres zum Ergebnisse

$$\text{(III)}\qquad \pi-\gamma = \ln\frac{cm_c+\sqrt{c^2m_c^2+a^2b^2}}{ab}.$$

Nun beweisen wir, daß die Summe der rechten Seiten der Gleichungen (I) und (II) der rechten Seite der Gleichung (III) gleich ist, d. h.

$$\left(\frac{m_c}{b}+\frac{c_1}{b}\right)\left(\frac{m_c}{a}+\frac{c_2}{a}\right) = \frac{cm_c+\sqrt{c^2m_c^2+a^2b^2}}{ab}.$$

Nach Durchführung der Operationen:

$$m_c^2+(c_1+c_2)m_c+c_1c_2 = cm_c+\sqrt{c^2m_c^2+a^2b^2},$$

aus diesem, mit Rücksicht auf $c_1+c_2 = c$, folgt:

$$m_c^2+c_1c_2 = \sqrt{c^2m_c^2+a^2b^2}\,.$$

Durch Quadrieren folgt:

$$m_c^4+2c_1c_2m_c^2+c_1^2c_2^2 = c^2m_c^2+a^2b^2 =$$
$$= (c_1+c_2)^2m_c^2+a^2b^2 = (c_1^2+c_2^2)m_c^2+2c_1c_2m_c^2+a^2b^2.$$

Nach Vereinfachung und Neuordnung:

$$m_c^4+c_1^2c_2^2 = m_c^2(c_1^2+c_2^2)+a^2b^2.$$

Aus Abb. 14. ist es wahrnehmbar, daß

$$c_1^2 = m_c^2+b^2,$$
$$c_2^2 = m_c^2+a^2,$$

diese in unsere letzte Gleichung eingesetzt, geht jene in die folgende Identität über:

$$m_c^4+(m_c^2+a^2)(m_c^2+b^2) = m_c^2(a^2+b^2+2m_c^2)+a^2b^2;$$

damit ist unsere Behauptung bewiesen.

So muss auch die Summe der linken Seiten der Gleichungen (I) und (II) mit der linken Seite der Gleichung (III) gleich sein, d. h.

$$\alpha+\beta = \pi-\gamma, \qquad \alpha+\beta+\gamma = \pi.$$

Dieses Endergebnis drückt aus, daß die Darstellung der Punkte eines zyklischen — mit anderem Worte imaginären — Raumes durch die Gesamtheit aller Kreise der Ebene Möglichkeit gibt dem Begriffe des Dreieckes auch in solchen Fällen eine sinnvolle Deutung zu geben, wo eine Seite größer ist, als die Summe der beiden anderen. Die zahlenmäßigen Werte der Winkel eines so definierten Dreieckes sind bestimmbar, und für diese gilt der aus dem fünften Postulate von Euklid hergeleitete Zusammenhang, jedoch in imaginärer Form:

$$\alpha i+\beta i+\gamma i = \pi i$$

Wir möchten noch bemerken, daß die Zahlenwerte der imaginären Winkel αi, βi, γi mit Benützung der Abkürzung

$$2s = a+b+c$$

ohne jeder Konstruktion bestimmbar sind, z. B.:

$$\text{(IV)} \qquad \sin\alpha i = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Die eingehende Behandlungsweise wurde gewählt, um die Analogie des Dreieckes mit imaginären Winkeln mit dem reellen Dreiecke in allen Einzelheiten vorführen zu können. Übrigens das in der Abb. 14. gezeigte Konstruktion keinesfalls schwieriger oder mit größeren Fehlern behaftet scheint, als der Formel (IV).

Literatur

[1] W. Fiedler, Zyklographie, *Leipzig*, 1882.

[2] E. Németh, Ciklikus és sphaerikus pontrendszerek és azok alkalmazási körökre és gömbökre vonatkozó feladatok megoldásánál, *Budapest*, 1927.

[3] E. Müller, Vorlesungen über Darstellende Geometrie. II. Bd. *Leipzig* und *Wien*, 1929.

[4] E. Németh, Geometry of Circle Agregates, *Műegyetemi Közlemények* **1** (1948), 57—88.

(Eingegangen am 12. Dezember 1962.)