Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen

Von A. MOÓR (Szeged)

§ 1. Einleitung

Ein allgemeiner metrischer Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ in der durch einen metrischen Grundtensor $g_{ij}(x, v)$ eine Metrik definiert ist. Der Tensor $g_{ij}(x, v)$ ist in i, j symmetrisch und in den v^i homogen von nullter Dimension. Ferner wollen wir noch annehmen, daß die quadratische Form

$$g_{ij}(x, v) X^i X^j$$

in den Hilfsveränderlichen x^i positiv-definit ist.

Die Übertragung der Vektoren $\xi^i(x, v)$ ist durch ein invariantes Differential von der Form

$$D\xi^i = d\xi^i + M_j{}^i{}_k \xi^j dv^k + L_j{}^i{}_k \xi^j dx^k \tag{1. 1}$$

festgelegt, wo die Übertragungsparameter $M_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$ so bestimmt werden sollen, daß das invariante Differential des metrischen Grundtensors g_{ij} identisch verschwinde, d. h.:

$$Dg_{ij} \equiv dg_{ij} - 2M_{(ij)k}\, dv^k - 2L_{(ij)k}\, dx^k \equiv 0 \tag{1. 2}$$

gültig sei[1]).

Die Entwicklung einer Geometrie eines derartigen Raumes haben wir in unserer Arbeit [1] begründet und später hat aus der Bedingungsgleichung (1. 2) Herr J. R. VANSTONE die allgemeinste Form der Übertragungsparameter bestimmt (vgl. [2] §§ 1—5). Bei der Herleitung wurde die Bedingung

$$\bar{M}_o{}^j{}_t \bar{M}_o{}^t{}_k = 0\,, \quad \bar{M}_o{}^j{}_t \overset{\text{def}}{=} F M_o{}^j{}_t, \tag{1. 3}$$

$$F \equiv F(x, v) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ij}(x, v) v^i v^j},$$

bzw. die mit (1. 3) äquivalente Bedingung

$$(\delta^j_t + \bar{M}_o{}^j{}_t)(\delta^t_k - \bar{M}_o{}^t{}_k) = \delta^j_k \tag{1. 4}$$

benützt.

---

[1]) $M_{(ij)k}$ bedeutet nach der SCHOUTENschen Symbolik den in i, j symmetrischen Teil von M_{ijk}. Ähnliches gilt für $L_{(ij)k}$.

Die Bedingung (1. 3) ist eine wesentliche Beschränkung für den Tensor $\bar{M}_o{}^j{}_k$ und ist in vielen Spezialfällen nicht erfüllt. Eben deshalb wollen wir im folgenden die explizite Form des invarianten Differentials ohne die beschränkende Bedingung (1. 3) herleiten; statt (1. 3) werden wir eine viel schwächere Bedingung stellen (vgl. unsere Bedingungsgleichung (2. 4)).

Dementsprechend wollen wir in § 2 die Grundrelationen der Theorie des invarianten Differentials entwickeln, genauer: wir werden das nicht-vektorielle Glied dv^k in (1. 1) mittels Dl^k ausdrücken, wo l^k den Einheitsvektor in der Richtung von v^k bedeutet, und dann — in § 3 — bestimmen wir die zum invarianten Differential (1. 1) gehörigen kovarianten Ableitungen und die explizite Form der Übertragungsparameter.

§ 2. Bestimmung des metrischen invarianten Differentials

Die Formel (1. 1) bestimmt das invariante Differential des $\mathfrak{L}_n$-Raumes für die kontravarianten Vektoren. Für einen kovarianten Vektor η_i hat man:

(2. 1) $$D\eta_i = d\eta_i - M_i{}^j{}_k \eta_j \, dv^k - L_i{}^j{}_k \eta_j \, dx^k.$$

In gewöhnlicher Weise kann das invariante Differential auf beliebige Tensoren erweitert werden.

Wir werden jetzt die Formeln (1. 1) und (2. 1) in der Weise umformen, daß das nicht-vektorielle Glied dv^k durch das invariante Differential des Einheitsvektors

$$l^i \overset{\text{def}}{=} \frac{v^i}{F(x, v)}, \quad F(x, v) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ij}(x, v) v^i v^j}$$

ersetzt sei. Aus der Formel (1. 1) bekommt man unter der Bedingung

(2. 2) $$M_i{}^j{}_o \overset{\text{def}}{=} M_i{}^j{}_k l^k \equiv 0$$

die Relation:

(2. 3) $$Dl^i = (\delta^i_k + \bar{M}_o{}^i{}_k) \, dl^k + L_o{}^i{}_k \, dx^k.$$

Statt (1. 3), bzw. statt der mit (1. 3) äquivalenten Bedingung (1. 4), nehmen wir an, daß

(2. 4) $$\operatorname{Det}(\delta^i_k + \bar{M}_o{}^i{}_k) \neq 0$$

besteht, d. h. das Gleichungssystem

(2. 5) $$(\delta^t_j + \bar{M}_o{}^t{}_j) J^{*k}_t = \delta^k_j$$

ist auf J^{*k}_t eindeutig lösbar. Eine Überschiebung der Gleichung (2. 3) mit J^{*j}_i führt hiernach zur Relation:

(2. 6) $$dv^j \equiv d(Fl^j) = FJ^{*j}_t (Dl^t - L_o{}^t{}_k \, dx^k) + l^j \, dF.$$

Substituieren wir nun diesen Wert von dv^j in die Formel (1. 1), so wird wegen (2. 2) das invariante Differential des kontravarianten Vektors ξ^i die Form

(2. 7) $$D\xi^i = d\xi^i + M^{*}_j{}^i{}_k \xi^j \, Dl^k + L^{*}_j{}^i{}_k \xi^j \, dx^k$$

haben, wo

$$M^{*i}_{j\ k} \overset{\text{def}}{=} \overline{M}_{j\ t}^{\ i} J^{*t}_{k}, \tag{2. 7a}$$

$$L^{*i}_{j\ k} \overset{\text{def}}{=} L_{j\ k}^{\ i} - M^{*i}_{j\ m} L_{o\ k}^{\ m} \tag{2. 7b}$$

bedeuten.

Das invariante Differential (2. 7) geht in das invariante Differential der in den Arbeiten [1] und [2] entwickelten Theorie über, falls

$$J^{*k}_{t} = \delta^k_t - \overline{M}_{o\ t}^{\ k}$$

besteht, was aber im folgenden nicht bedingt werden soll. In unserem $\mathfrak{L}_n$-Raum bestimmen somit (2. 7a) und (2. 7b) die Übertragungsparameter des Raumes.

Die Formeln (2. 7a) und (2. 7b) drücken die Übertragungsparameter $M^{*i}_{j\ k}$ und $L^{*i}_{j\ k}$ durch die Übertragungsparameter $\overline{M}_{j\ k}^{\ i}$ und $L_{j\ k}^{\ i}$ aus. Aber auch aus $M^{*i}_{j\ k}$ und $L^{*i}_{j\ k}$ können $\overline{M}_{j\ k}^{\ i}$ und $L_{j\ k}^{\ i}$ bestimmt werden, wie wir das im folgenden zeigen wollen.

Aus (2. 5) folgt nach wohlbekannten Relationen der Tensoralgebra, daß mit (2. 5) auch

$$(\delta^i_t + \overline{M}_{o\ t}^{\ i}) J^{*t}_{k} = \delta^i_k \tag{2. 8}$$

gültig ist. Eine Überschiebung von (2. 7a) mit l^j gibt wegen (2. 8) nach der Elimination von $\overline{M}_{o\ t}^{\ i} J^{*t}_{k}$:

$$J^{*i}_{k} = \delta^i_k - M^{*i}_{o\ k} \tag{2. 9}$$

und aus (2. 7a) wird somit

$$M^{*i}_{j\ k} = \overline{M}_{j\ t}^{\ i} (\delta^t_k - M^{*t}_{o\ k}). \tag{2. 10}$$

Aus den Formeln (2. 4) und (2. 5) folgt nun in Hinsicht auf (2. 9), daß auch

$$\operatorname{Det}(\delta^i_k - M^{*i}_{o\ k}) \equiv \operatorname{Det}(J^{*i}_{k}) \neq 0$$

ist, somit folgt, daß

$$(\delta^i_k - M^{*i}_{o\ k}) \Phi^k_m = \delta^i_m \tag{2. 11}$$

auf Φ^k_m eindeutig lösbar ist; mit (2. 11) gilt auch

$$(\delta^t_k - M^{*t}_{o\ k}) \Phi^h_t = \delta^h_k. \tag{2. 11a}$$

Aus (2. 10) folgt nun nach einer Überschiebung mit Φ^k_m auf Grund von (2. 11):

$$\overline{M}_{j\ m}^{\ i} = M^{*i}_{j\ s} \Phi^s_m. \tag{2. 12a}$$

Eine Überschiebung von (2. 7b) mit $l^j \Phi^h_i$ gibt nach (2. 11a) die Formel:

$$L_{o\ k}^{\ h} = \Phi^h_t L^{*t}_{o\ k}.$$

Substituieren wir das in (2. 7b) so wird in Hinsicht auf (2. 12a)

$$L_{j\ k}^{\ i} = L^{*i}_{j\ k} + \overline{M}_{j\ m}^{\ i} L^{*m}_{o\ k}. \tag{2. 12b}$$

Es besteht also der

Satz 1. *Die Formeln* (2. 7*a*), (2. 7*b*) *bzw.* (2. 12*a*), (2. 12*b*) *zeigen, daß die Übertragungsparameter* $L_j{}^i{}_k$ *und* $\overline{M}_j{}^i{}_k$ *mit* $L^*_j{}^i{}_k$ *und* $M^*_j{}^i{}_k$ *vollständig gleichberechtigt sind.*

Wollen wir also die charakteristischen Größen des invarianten Differentials (1. 1) aus der Bedingung (1. 2) bestimmen, dann ist es hinreichend die Größen $\overline{M}_j{}^i{}_k$ und $L^*_j{}^i{}_k$ von den Grundgrößen des $\mathfrak{L}_n$-Raumes abzuleiten. Dies wollen wir auf Grund der kovarianten Ableitungen durchführen.

BEMERKUNG 1. Auch der Tensor J^{*k}_t kann nach (2. 5) und (2. 9) durch $\overline{M}_o{}^i{}_k$ und auch durch $M^*_o{}^i{}_k$ berechnet werden.

§ 3. Die kovarianten Ableitungen des $\mathfrak{L}_n$-Raumes

Nehmen wir an, daß der Vektor $\xi^i(x, v)$ in den v^i homogen von nullter Dimension ist. Drücken wir jetzt in (2. 6) die Größe $L_o{}^t{}_k$ nach (2. 12b) mittels $L^*_o{}^t{}_k$ aus, beachten wir dann die Identität (2. 5), so wird:

$$dv^j = FJ^{*j}_t Dl^t - FL^*_o{}^j{}_k\, dx^k + l^j\, dF. \tag{3. 1}$$

Auf Grund der Homogenität nullter Dimension von $\xi^i(x, v)$ in den v^i wird nun nach (3. 1)

$$d\xi^i = \partial_k \xi^i\, dx^k + \xi^i\|_j (J^{*j}_k Dl^k - L^*_o{}^j{}_k\, dx^k)$$

wo

$$\xi^i\|_j \overset{\text{def}}{=} F\partial_{vj}\xi^i \tag{3. 2}$$

bedeutet. Setzen wir nun $d\xi^i$ in (2. 7) ein, so wird das invariante Differential von ξ^i die Form

$$D\xi^i = \nabla_k \xi^i\, dx^k + \overset{*}{\nabla}_k \xi^i\, Dl^k \tag{3. 3}$$

haben, wo

$$\nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i\|_j L^*_o{}^j{}_k + L^*_j{}^i{}_k \xi^j, \tag{3. 4a}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \xi^i\|_j J^{*j}_k + M^*_j{}^i{}_k \xi^j \equiv (\xi^i\|_t + \overline{M}_j{}^i{}_t \xi^j) J^{*t}_k \tag{3. 4b}$$

die beiden kovarianten Ableitungen des $\mathfrak{L}_n$-Raumes sind.

Die kovarianten Ableitungen eines kovarianten Vektors η_i sind:

$$\nabla_k \eta_i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \eta_i - \eta_i\|_j L^*_o{}^j{}_k - L^*_i{}^j{}_k \eta_j, \tag{3. 5a}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k \eta_i \overset{\text{def}}{=} \eta_i\|_j J^{*j}_k - M^*_i{}^j{}_k \eta_j \equiv (\eta_i\|_t - \overline{M}_i{}^j{}_t \eta_j) J^{*t}_k, \tag{3. 5b}$$

während die Formel (3. 3) auch für die kovarianten Vektoren gültig ist, statt ξ^i soll aber selbstverständlich η_i gesetzt werden.

Um die vollständige Bestimmung des invarianten Differentials müssen wir noch $L^*_i{}^j{}_k$ und $M^*_i{}^j{}_k$ aus der Bedingung (1. 2) zu bestimmen. Schreiben wir jetzt

Dg_{ij} mittels der kovarianten Ableitung auf, so gibt die Bedingung (1. 2):

$$\nabla_k g_{ij} \equiv \partial_k g_{ij} - 2A_{ijr} L^{*r}_{o\ \ k} - 2L^*_{(ij)k} = 0, \tag{3. 6}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} \equiv (2A_{ijt} - 2\overline{M}_{(ij)t}) J^{*t}_k = 0, \quad A_{ijt} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g_{ij}\|_t. \tag{3. 7}$$

Aus der Formel (3. 6) bekommt man für L^*_{ijk} dieselbe Form, wie in den Arbeiten [1] und [2] (vgl. insb. die Formel (2. 24) von [1] bzw. die Formel (3. 6) von [2]). Für $\overline{M}_{ijk}$ erhält man aber auf Grund von (3. 7) eine einfachere und doch allgemeinere Lösung als in den genannten Arbeiten, da (1. 3) bzw. (1. 4) nicht gelten muß.

Aus (2. 9) und (2. 11) folgt, daß

$$J^{*i}_k \Phi^k_m = \delta^i_m$$

ist. Eine Überschiebung von (3. 7) mit Φ^k_m gibt somit:

$$A_{ijm} - \overline{M}_{(ij)m} = 0. \tag{3. 8}$$

Beachten wir jetzt die Identität

$$\overline{M}_{ijm} \equiv \overline{M}_{(ij)m} + \mu_{ijm}, \quad \mu_{ijm} \overset{\text{def}}{=} \overline{M}_{[ij]m},$$

so wird nach (3. 8)

$$\overline{M}_{ijm} = A_{ijm} + \mu_{ijm}, \quad A_{ijm} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g_{ij}\|_m. \tag{3. 9}$$

Da diese Form von $\overline{M}_{ijm}$ der Gleichung (3. 7) offenbar genügt, ist der folgende Satz gültig.

Satz 2. (3. 9) *ist die allgemeinste Form der metrischen Übertragungsparameter* $\overline{M}_{ijm}$, *wenn darin* μ_{ijm} *einen beliebigen in* i, j *schiefsymmetrischen und in den* v^i *von nullter Dimension homogenen Tensor bedeutet, für den noch* $\mu_{ijo} = 0$ *ist.*

Mittels der Gleichungen (2. 5) und (2. 7a) kann jetzt J^{*t}_k und $M^{*i}_{j\ \ k}$ bestimmt werden.

Bemerkung 2. Wir haben im vorigen die allgemeinste Form von $\overline{M}_{ijk}$ bestimmt und somit kann schon $M^{*j}_{i\ \ k}$ bestimmt werden. Mittels der kovarianten Ableitung $\overset{*}{\nabla}_k$ kann man aber auch unmittelbar ein Gleichungssystem für $M^{*j}_{i\ \ k}$ bekommen, denn es ist in Hinsicht auf (2.9)

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 2A_{ijr}(\delta^r_k - M^{*r}_{o\ \ k}) - 2M^*_{(ij)k} = 0. \tag{3. 10}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (2. 11) unserer Arbeit [1] überein, doch ist jetzt die Relation

$$M^{*i}_{o\ \ t} M^{*t}_{o\ \ k} = 0$$

nicht bedingt. Die unmittelbare Lösung von (3. 10) wäre etwas komplizierter als die von (3. 8) und könnte mit der Methode von J. R. Vanstone durchgeführt werden (vgl. [2] § 2).

BEMERKUNG 3. Fordern wir daß L^*_{ijk} in i, k und $\bar{M}_{ijk}$ in i, j symmetrisch sei, so erhält man aus (3. 6) und (3. 9) die unmittelbare Verallgemeinerung der CARTANschen Übertragung der Finslerräume. Die Cartansche Übertragung entsteht, falls der metrische Fundamentaltensor der Relation

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \partial v^j}$$

genügt.

Im allgemeinen Fall sind die symmetrischen Übertragungsparameter, die die unmittelbare Verallgemeinerung der Cartanschen Übertragung geben:

$$\bar{M}_{ijk} = A_{ijk} \tag{3. 11a}$$

und

$$\Gamma^*_{ijk} = [ijk] - A_{ijr}\Gamma^{*r}_{o\ k} - A_{jkr}\Gamma^{*r}_{o\ i} + A_{ikr}\Gamma^{*r}_{o\ j}, \tag{3. 11b}$$

wo

$$[ijk] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}), \quad \Gamma^*_{ori} = [opq] K^{pq}{}_{ri}$$

und $K^{pq}{}_{ri}$ der inverse Tensor von

$$H^{ts}{}_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^t_p \delta^s_q + A_{op}{}^t \delta^s_q + A_{pq}{}^t l^s - A_{oq}{}^t \delta^s_p$$

ist, d. h.

$$H^{ts}{}_{pq} K^{pq}{}_{ri} = \delta^t_r \delta^s_i$$

(vgl. [1] (2. 18)—(2. 21)). Statt (2. 5) hat man jetzt nach (3. 11a) für die Bestimmung des Tensors J^{*t}_k

$$(\delta^t_j + A_o{}^t{}_j) J^{*k}_t = \delta^k_j$$

und statt (2. 7a) wird jetzt:

$$M^{*i}_{j\ k} = A_j{}^i{}_t J^{*t}_k \tag{3. 12}$$

bestehen.

Literatur

[1] A. MOÓR, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956), 85—120.

[2] J. R. VANSTONE, A generalization of Finsler Geometry, *Canad. J. Math.* **14** (1962), 87—112.

(Eingegangen am 19. Dezember 1962.)