Über die Darstellung von universellen Algebren durch Funktionenalgebren

Von WILFRIED NÖBAUER (Wien)

In den letzten Jahren sind einige Arbeiten erschienen, in denen das Problem der Darstellung einer gegebenen Algebra durch eine Funktionenalgebra zur Sprache kommt. Es handelt sich bei diesem Problem um folgendes: Geht man von einer Algebra A vom Typus $\langle n_1, n_2, \dots \rangle$ aus und bildet die Menge aller k-stelligen Funktionen (mit einem festen $k \geqq 1$) auf A, überträgt man auf diese Menge alle Operationen von A in der üblichen Weise und nimmt man als weitere Operation noch die Funktionenkomposition dazu (das ist also eine $k+1$-stellige Operation), so erhält man eine neue Algebra $\mathfrak{F}_k(A)$ vom Typus $\langle n_1, n_2, \dots, k+1 \rangle$, die „$k$-dimensionale Funktionenalgebra über A". Die Frage lautet nun: Unter welchen Bedingungen ist eine gegebene Algebra U isomorph zu einer Teilalgebra einer Funktionenalgebra $\mathfrak{F}_k(A)$ über einer geeignet gewählten Algebra A? Während in den Arbeiten [3] und [5] die Darstellbarkeit halbgeordneter Halbgruppen mit gewissen Eigenschaften durch Funktionen auf Teilmengen einer Menge studiert wird, behandelt die Arbeit [1] die Darstellung von Algebren vom Typus $\langle 2, 2 \dots 2 \rangle$ durch Funktionen auf einer geeignet gewählten Algebra A. Wir wollen hier den Hauptsatz dieser Arbeit auf beliebige Algebren verallgemeinern.

Es sei A eine universelle Algebra mit den Operationen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots,$ dabei sei ϑ_i jeweils eine n_i-stellige Operation (n_i nicht negative ganze Zahl), der Typus von A ist also $\langle n_1, n_2, n_3, \dots \rangle$. Es bedeutet also ϑ_i für $n_i > 0$ eine eindeutige Abbildung des Mengenproduktes von n_i Faktoren A in sich, für $n_i = 0$ aber ein festes Element von A. Wir definieren den Begriff „Wort über A" induktiv folgendermaßen:

Ein Wort der Stufe 0 sei entweder eine nullstellige Operation ϑ_i oder ein unbestimmtes Symbol x_j. Ein Wort der Stufe $\leqq k$ sei ein Gebilde

$$\vartheta_\nu(w_1, w_2, \dots, w_{n_\nu}) \tag{1}$$

wobei $w_1, w_2, \dots, w_{n_\nu}$ Worte von einer Stufe $< k$ sind.

Unter einem Gesetz in A verstehen wir[1]) ein Paar von Worten (W_1, W_2) mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man die in W_1 und W_2 vorkommenden unbestimmten Symbole auf irgendeine Weise durch Elemente von A, so gilt für die dadurch erhaltenen Elemente $\overline{W}_1$ und $\overline{W}_2$ von A stets $\overline{W}_1 = \overline{W}_2$.

Wie man sogleich sieht, gilt jedes Gesetz, das in A gilt, auch in jeder Teilalgebra von A (unter einer Teilalgebra verstehen wir dabei wie üblich eine Teilmenge von A,

[1]) Wir folgen der Definition in der fundamentalen Arbeit von G. BIRKHOFF [2].

die gegen alle Operationen von A, also auch gegen die nullstelligen Operationen, abgeschlossen ist), in jedem homomorphen Bild von A und in jedem direkten Produkt beliebig vieler Exemplare von A, auch in einem uneingeschränkten direkten Produkt unendlich vieler Exemplare von A.

Sind $\varkappa_1 \ldots \varkappa_r$ gegebene Operationen von A, so bezeichnen wir ein Gesetz (W_1, W_2) von A als $(\varkappa_1 \ldots \varkappa_r)$-frei, wenn weder im Wort W_1, noch im Wort W_2 eines der $\varkappa_i$ vorkommt. Die $k+1$-stellige Operation $\varkappa$ in A $(k \geqq 0)$ nennen wir assoziativ an der ersten Stelle, wenn sie folgendes Gesetz erfüllt:

$$(2) \quad \varkappa[\varkappa(f, g_1, g_2 \ldots g_k), h_1, h_2 \ldots h_k] = \\ = \varkappa[f, \varkappa(g_1, h_1, h_2 \ldots h_k), \varkappa(g_2, h_1, h_2 \ldots h_k) \ldots \varkappa(g_k, h_1, h_2 \ldots h_k)].$$

Im Fall $k=1$ ergibt das Gesetz (2) ersichtlich das übliche Assoziativgesetz für zweistellige Operationen. Die $k+1$-stellige Operation $\varkappa$ in A $(k \geqq 0)$ nennen wir an der ersten Stelle distributiv bezüglich der n-stelligen Operation ϑ $(n \geqq 0)$, wenn folgendes Gesetz erfüllt ist:

$$(3) \quad \varkappa[\vartheta(f_1, f_2 \ldots f_n), g_1, g_2 \ldots g_k] = \\ = \vartheta[\varkappa(f_1, g_1, g_2 \ldots g_k), \varkappa(f_2, g_1, g_2 \ldots g_k), \ldots, \varkappa(f_n, g_1, g_2 \ldots g_k)].$$

Im Fall $k=1$, $n=2$ ergibt das Gesetz (3) ersichtlich das übliche Rechtsdistributivgesetz für zwei zweistellige Operationen. Wir nennen $\varkappa$ vollständig distributiv an der ersten Stelle, wenn es bezüglich jeder anderen Operation ϑ_i der Algebra an erster Stelle distributiv ist.

Sei nun eine beliebige Algebra A mit den Operationen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ der Stellenzahlen $n_1, n_2, \ldots$ gegeben. Unter einer k-stelligen Funktion auf A verstehen wir eine eindeutige Abbildung f des k-fachen Mengenproduktes $A \times A \times \ldots \times A$ in A. Wir setzen dabei $k \geqq 0$ voraus und verstehen unter einer 0-stelligen Funktion ein Element von A. Wir können die Menge $\mathfrak{F}_k(A)$ aller dieser k-stelligen Funktionen auffassen als uneingeschränktes direktes Produkt von mit den Elementen von $A \times A \times \ldots \times A$ indizierten Kopien von A, also $\mathfrak{F}_k(A)$ betrachten als Algebra mit den Operationen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots,$ die in komponentenweiser Ausführung der Operationen von A bestehen. Nach einer früher gemachten Bemerkung gelten also in $\mathfrak{F}_k(A)$ sämtliche in A gültigen Gesetze. Wir definieren eine weitere, $k+1$-stellige Operation $\varkappa$ (die „Komposition") in $\mathfrak{F}_k(A)$ durch[2])

$$(4) \qquad \varkappa(f, g_1 \ldots g_k)|(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k) = f|\big(g_1|(\alpha_1 \ldots \alpha_k), \ldots, g_k|(\alpha_1 \ldots \alpha_k)\big)$$

(Für $k=0$ bleibt also $\varkappa(f)=f$). Wie man leicht nachrechnet, ist $\varkappa$ an der ersten Stelle assoziativ und vollständig distributiv. Alle Teilalgebren von $\mathfrak{F}_k(A)$ erfüllen also sämtliche in A gültigen Gesetze und sind bezüglich $\varkappa$ assoziativ und vollständig distributiv an der ersten Stelle. Für die „iterierte Funktionenalgebra" $\mathfrak{F}_{k_r}\big(\mathfrak{F}_{k_{r-1}}(\mathfrak{F}_{k_{r-2}} \ldots \mathfrak{F}_{k_1}(A))\big)$ schreiben wir $\mathfrak{F}_{(k_1, k_2 \ldots k_r)}(A)$.

Wir zeigen nun, daß in Erweiterung des vorhin festgestellten Sachverhaltes folgendes gilt:

Nehmen wir alle Algebren A vom Typus $\langle n_1, n_2, \ldots \rangle$, die eine Menge von Gesetzen erfüllen, und bilden wir alle Teilalgebren aller Funktionenalgebren $\mathfrak{F}_k(A)$

---

[2]) Allgemein bezeichnen wir das Bild von $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k) \in A \times A \ldots \times A$ bei f mit $f|(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k)$.

über diesen Algebren, so erhalten wir (bis auf Isomorphie) sämtliche Algebren vom Typus $\langle n_1, n_2, \ldots, k+1\rangle$ mit an der ersten Stelle assoziativem und vollständig distributiven $\varkappa$, welche bezüglich der übrigen Operationen die gegebene Menge von Gesetzen erfüllen. Es gilt nämlich folgender

Satz. *In der Algebra U vom Typus $\langle n_1, n_2, \ldots, k+1\rangle$ und mit den Operationen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \varkappa$ (wobei $k \geqq 1$) sei das $\varkappa$ assoziativ und vollständig distributiv an der ersten Stelle. Dann ist U isomorph zu einer Teilalgebra der k-dimensionalen Funktionenalgebra $\mathfrak{F}_k(A)$ über einer Algebra A vom Typus $\langle n_1, n_2, \ldots\rangle$, in der alle $\varkappa$-freien Gesetze von U erfüllt sind.*

Beweis. Wir können natürlich annehmen, daß U mindestens zwei Elemente enthält. Wir gehen aus von der Algebra U, bilden die Menge aller 1-stelligen Funktionen auf U und betrachten sie als uneingeschränktes direktes Produkt von mit den Elementen von U indizierten Kopien von U. Die so erhaltene Algebra A_1 ist wieder vom Typus $\langle n_1, n_2 \ldots k+1\rangle$ und es sind in ihr sämtliche Gesetze von U erfüllt. Ordnen wir jedem Element $\alpha \in U$ die konstante Funktion mit dem Wert α zu, so erhalten wir einen Isomorphismus von U in A_1, wir können daher annehmen, daß $A_1 \supseteqq U$. Für die Kardinalzahlen von A_1 und U gilt: $|A_1| = |U|^{|U|} \geqq 2^{|U|} > |U|$, es gibt also mindestens ein $\alpha \in A_1$ mit $\alpha \notin U$.

Läßt man nun in A_1 das $\varkappa$ weg, so erhält man eine Algebra A vom Typus $\langle n_1, n_2, \ldots\rangle$, in der alle $\varkappa$-freien Gesetze von U erfüllt sind; diese besteht natürlich aus den selben Elementen wie A_1. Wir definieren nun eine eindeutige Abbildung Θ von U in $\mathfrak{F}_k(A)$ durch

$$\text{(5a)} \qquad \Theta\varrho|\alpha(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k) = \varkappa(\varrho, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k), \text{ wenn alle } \alpha_i \in U,$$

$$\text{(5b)} \qquad \Theta\varrho|(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k) = \varrho \text{ sonst.}$$

Wegen (5b) ist Θ eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Wir zeigen, daß Θ ein Isomorphismus von U in $\mathfrak{F}_k(A)$ ist:

$$\text{(6)} \qquad \Theta[\vartheta_i(\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_{n_i})] = \vartheta_i[\Theta\varrho_1, \Theta\varrho_2 \ldots \Theta\varrho_{n_i}].$$

Denn beide Seiten haben für jedes k-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ den gleichen Wert, wie man unter Benützung von (3) leicht erkennt, und zwar gilt das auch für $n_i = 0$.

$$\text{(7)} \qquad \Theta[\varkappa(\sigma, \varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_k)] = \hat{\varkappa}(\Theta\sigma, \Theta\varrho_1, \ldots, \Theta\varrho_k)$$

wo $\hat{\varkappa}$ die Komposition in $\mathfrak{F}_k(A)$ bezeichnet. Denn auch hier haben beide Seiten für jedes k-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ den gleichen Wert, wie man unter Benützung von (2) leicht erkennt.

Im Fall $k = 0$ ist die durch (5a) definierte Abbildung von U in A wohl ein Homomorphismus von U in $\mathfrak{F}_0(A)$, jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus, und zwar gilt dies — wie leicht zu erkennen ist — immer, außer in dem trivialen Fall $\varkappa(U) = U$.

Wir können den bewiesenen Satz leicht folgendermaßen verallgemeinern:

In der Algebra U vom Typus $\langle n_1, n_2, \ldots, k_1+1, k_2+1, \ldots, k_r+1\rangle$ mit den Operationen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ (wobei alle $k_i \geqq 1$) sei jedes $\varkappa_i$ assoziativ an erster Stelle und distributiv an erster Stelle bezüglich aller ϑ_i und bezüglich der $\varkappa_j$ mit $j < i$.

Dann ist U isomorph zu einer Teilalgebra der Algebra $\mathfrak{F}_{(k_1, k_2 \dots k_r)}(A)$ über einer Algebra A vom Typus $\langle n_1, n_2, \dots \rangle$ mit $|A| > |U|$, in der alle $(\varkappa_1 \dots \varkappa_r)$-freien Gesetze von U erfüllt sind.

Beweis. Wir wenden Induktion nach r an. Im Fall $r=1$ ist der Satz richtig, er sei daher mit $r-1 \geqq 1$ statt r schon bewiesen. Es ist daher die Algebra U_1, die man aus U durch Weglassen der Operation $\varkappa_r$ erhält, isomorph zu einer Teilalgebra von $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{(k_1, k_2 \dots k_{r-1})}(A)$, wobei in A alle $(\varkappa_1 \dots \varkappa_r)$-freien Gesetze von U erfüllt sind. Es sei η ein Isomorphismus von U_1 in $\mathfrak{F}$; mittels der umkehrbar eindeutigen Abbildung η definieren wir das $\varkappa_r$ auch in ηU_1 und definieren sodann die eindeutige Abbildung Θ dieses ηU_1 mit $\varkappa_r$ in $\mathfrak{F}_{k_r}(\mathfrak{F})$ durch

$$\Theta\varrho|(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{k_r}) = \varkappa_r(\varrho, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{k_r}), \text{ wenn alle } \alpha_i \in \eta U_1, \tag{8a}$$

$$\Theta\varrho|(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{k_r}) = \varrho \quad \text{sonst.} \tag{8b}$$

Das Θ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung wegen $|\mathfrak{F}| \geqq |A| > |U|$. Daß Θ ein Isomorphismus von ηU_1 in $\mathfrak{F}_{k_r}(\mathfrak{F})$ ist, erkennt man genau so wie beim vorgehenden Beweis. Also ist U isomorph zu einer Teilalgebra von $\mathfrak{F}_{(k_1, k_2 \dots k_r)}(A)$.

Mehrere Beispiele für die Anwendung unseres Satzes findet man in [1]. Wir geben zur Illustration des Satzes hier ebenfalls einige einfache Beispiele:

1. Jede Halbgruppe ist isomorph zu einer Halbgruppe aus eindimensionalen Funktionen auf einer Menge.
2. Jeder Fastring ist isomorph zu einer Teilalgebra der eindimensionalen Funktionenalgebra über einer Gruppe.
3. Jeder Ring ist isomorph zu einer Teilalgebra der eindimensionalen Funktionenalgebra über einer abelschen Gruppe.
4. Jede tri-operational Algebra (vgl. [4]) ist isomorph zu einer Teilalgebra der eindimensionalen Funktionenalgebra über einem Ring, und isomorph zu einer Teilalgebra der Funktionenalgebra $\mathfrak{F}_{(1,1)}(A)$ über einer abelschen Gruppe A.
5. Jeder distributive Verband ist isomorph zu einer Teilalgebra der eindimensionalen Funktionenalgebra über einer idempotenten, kommutativen Halbgruppe.

Literatur

[1] G. Berman and R. J. Silverman, Embedding of Algebraic Systems, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 777—786.

[2] G. Birkhoff, On the Structure of Abstract Algebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31** (1935), 433—454.

[3] H. H. Johnson, Realizations of Abstract Algebras of Functions, *Math. Ann.* **142** (1961), 317—321.

[4] K. Menger, General Algebra of Analysis, *Rep. Math. Colloquium* (2) **7** (1946), 46—60.

[5] B. Schweizer and A. Sklar, The Algebra of Functions II., *Math. Ann.* **143** (1961), 440—447.

(Eingegangen am 29. Dezember 1962.)