# Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind

Von J. ACZÉL und Z. DARÓCZY (Debrecen)

## § 1. Einleitung

Es ist auf zwei Arten möglich, die quasiarithmetischen Mittelwerte

$$M_\varphi(x_i) = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)/n\right] \tag{1. 1}$$

der Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_i \in \langle A, B\rangle,\ i=1, 2, \ldots, n)$, die mit dem gewöhnlichen arithmetischen Mittel isomorph sind (mit in $\langle A, B\rangle$ streng monotonen und stetigen Funktionen $\varphi$) zu gewichteten Mittelwerten zu verallgemeinern. Als erste Möglichkeit bieten sich die mit gegebenen konstanten Gewichten $p_i > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ gebildeten *nicht-symmetrischen* quasilinearen Mittelwerte

$$\mathfrak{M}_\varphi(x_i, p_i) = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i\right]. \tag{1. 2}$$

Mit diesen beschäftigt sich eine ausgedehnte Literatur (vgl. etwa [14], [1]) und dieser Typus erfaßt einen weiten Kreis der in der Praxis vorkommenden Mittelwerten. Es kommen jedoch auch unter den elementaren Mittelwerten solche vor, die nicht zum Typus (1. 2) gehören, z. B. das antiharmonische Mittel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

das aber auch selbst doch als eine Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels zu einem gewichteten Mittel aufgefaßt werden kann. Im allgemeinen besteht die zweite Verallgemeinerungsmöglichkeit darin, daß wir in $\langle A, B\rangle$ eine (auf keinem Teilintervall positiver Länge verschwindende) nicht-negative stetige Gewichtsfunktion $f$ angeben und mit ihr den *symmetrischen* Mittelwert

$$M_\varphi(x_i, f) = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \tag{1. 3}$$

bilden. Man sieht gleich, daß das antiharmonische Mittel eben der Spezialfall $\varphi(x) = f(x) = x$ von (1. 3) ist. Die von E. F. BECKENBACH [9] eingehend untersuchte

Klasse der verallgemeinerten antiharmonischen Mittel

$$N_\alpha(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}$$

lassen sich auch in (1. 3) mit $\varphi(x)=x$, $f(x)=x^{\alpha-1}$ einreihen.

Bis jetzt wurden unseres Wissens nur vereinzelte Untersuchungen bezüglich Mittelwerte des Typus (1. 3) geführt und auch diese bestanden hauptsächlich aus Untersuchungen spezieller Fälle, die sich bei Behandlung anderer Gegenstände ergeben haben (vgl. außer den eben erwähnten Aufsatz [9] u. a. die Arbeiten [2], [4], [5], [6], [10], [13], [22] usw.). Als Gegenstand allgemeiner Untersuchungen betrachtete unseres Wissens zuerst M. BAJRAKTAREVIČ [7] die Mittelwerte (1. 3), der unter Differenzierbarkeitsbedingungen das Problem der Gleichheit von Mittelwerten des Typus (1. 3)

$$M_\varphi(x_i, f) = M_\psi(x_i, g) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

bei fixen $n \geqq 3$ gelöst hat.

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß dieses *Gleichheitsproblem* der Mittelwerte, d. h. die Angabe aller Transformationen der bestimmenden Funktionen, die das Mittel ungeändert lassen, in der Theorie der Mittelwerte eines der fundamentalen Fragestellungen ist, das bei den quasiarithmetischen und quasilinearen Mitteln (1. 1), (1. 2) eingehend behandelt und gelöst wurde (vgl. etwa [17], [16] und [14] Satz 83). Es wurde bewiesen, daß

$$\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{M}_\psi$$

bei beliebigen $x_i$ und $p_i$ dann und nur dann besteht, wenn

$$\psi(x) = a\varphi(x)+b \qquad (a \neq 0,\ b \text{ beliebige Konstante})$$

ist, d. h. ausschließlich bei linear ganzer Transformation der bestimmenden Funktion.

Unter den quasilinearen Mittelwerten (1. 2) haben bekanntlich die Potenzmittel

$$\mathfrak{M}_\alpha(x_i, p_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^\alpha \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{1/\alpha} \qquad (x_i > 0,\ \alpha \neq 0)$$

und ihr Grenzwert, das geometrische Mittel

$$\mathfrak{M}_0(x_i, p_i) = \lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{M}_\alpha(x_i, p_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \log x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \qquad (x_i > 0)$$

in Theorie und Anwendungen die größte Bedeutung. — Ein anderes fundamentales Ergebnis der Theorie der Mittelwerte der Typen (1. 1) und (1. 2) ist eben, daß diese wichtigste Mittelwertklasse dadurch charakterisiert wird, daß der *Homogenitätsgleichung*

$$\mathfrak{M}_\varphi(tx_i, p_i) = t\,\mathfrak{M}_\varphi(x_i, p_i) \qquad (t > 0)$$

allein diese genugtun (vgl. etwa [20], [12], [15] und [14] Satz 84) d. h. diese sind die einzigen homogenen Mittel.

In Analogie zu diesen Ergebnissen drängen sich die Probleme der Gleichheit und Homogenität von Mittelwerten des Typus (1. 3) von sich selbst auf. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir diese beiden Probleme ohne weitere Regularitätsbedingungen.

Im § 2 beweisen wir das Ergebnis von BAJRAKTAREVIĆ [7] bezüglich des Gleichheitsproblems ohne Differenzierbarkeitsbedingungen, aber unter Voraussetzung der Gleichheit für beliebige $n$ (und nicht nur für fixe). Im § 3 führen wir auf Grund der Ergebnisse des § 2 das Homogenitätsproblem auf die Lösung einer Vektor-Matrix-Funktionalgleichung zurück, die wir im § 4 lösen. Endlich werden im § 5 alle homogene Mittelwerte des Typus' (1. 3) bestimmt, während im § 6 auf Anwendungsmöglichkeiten u. a. in der Informationstheorie und auf weitere Problemen hingewiesen wird.

## § 2. Über die Gleichheit von Mittelwerten

M. BAJRAKTAREVIČ hat in [7] unter Voraussetzung der zweimaligen Differenzierbarkeit der in der Gleichung

$$M_\varphi(x_i, f) = M_\psi(x_i, g) \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\, n \geqq 3) \tag{2. 1}$$

enthaltenen Funktionen bewiesen, daß diese Gleichheit dann und nur dann besteht, falls

$$\psi(x) = \big(a\varphi(x)+b\big)/\big(c\varphi(x)+d\big), \quad g(x) = kf(x)\big(c\varphi(x)+d\big) \tag{2. 2}$$

ist, wo $a, b, c, d, k$ sonst beliebige Konstanten mit der Einschränkung

$$k(c^2+d^2)(ad-bc) \neq 0 \tag{2. 3}$$

sind. Wir setzen hier (2. 1) für alle $n \geqq 2$ gleichzeitig voraus, erhalten aber dieselbe Formeln (2. 2), (2. 3) ohne irgendwelchen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, wir beweisen nämlich den folgenden

**Satz 1.** *Es seien $\varphi$ und $\psi$ stetige und streng monotone, $f$ und $g \not\equiv 0$ nichtnegative Funktionen im Intervall $\langle A, B\rangle$ und $f(x) \neq 0$ in je einer Umgebung von $A$ und $B$. Dann besteht die Gleichheit*

$$\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] = \psi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\psi(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right] \tag{2. 4}$$

*bei beliebigen $x_i \in \langle A, B\rangle$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ und bei beliebigen ganzen $n \geqq 2$ dann und nur dann, falls*

$$\psi(x) = \big(a\varphi(x)+b\big)/\big(c\varphi(x)+d\big), \quad g(x) = kf(x)\big(c\varphi(x)+d\big) \tag{2. 2}$$

*ist, wo die Konstanten $a, b, c, d, k$ der Bedingung*

$$k(c^2+d^2)(ad-bc) \neq 0 \tag{2. 3}$$

*genugtun, sonst aber beliebig sind.*

BEMERKUNG 1. Falls $c=0$ ist, so folgt aus (2. 3) $a \neq 0$, $d \neq 0$. Falls dagegen $c \neq 0$ ist, so ergibt die Umformung

$$\psi(x) - a/c = -(ad-bc)/\big(c^2\varphi(x)+dc\big)$$

von (2. 2) wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, sowie wegen (2. 3), daß $-d/c$ nicht im Vorrat der auf $\langle A, B\rangle$ aufgenommen Werten von $\varphi$, während $a/c$ nicht in dem von $\psi$ liegen kann.

BEMERKUNG 2. Im Satze haben wir keine Voraussetzung bezüglich der Abgeschlossenheit oder Offenheit (oder Halboffenheit) bzw. Endlichkeit des Grundintervalles getroffen. Den Beweis werden wir doch für abgeschlossene Intervalle $[A, B]$ führen, ist nämlich $\langle A, B\rangle$ nicht geschlossen, so gibt es eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[A_n, B_n]$ derart, daß $A_n \searrow A$, $B_n \nearrow B$. Die Werte von $a, b, c, d, k$ sind offenbar auf allen $[A_n, B_n]$ dieselbe (da $[A_{n-1}, B_{n-1}]\subset[A_n, B_n]$ ist), und da jeder Punkt von $\langle A, B\rangle$ auch in einem $[A_n, B_n]$ liegt, gilt der Satz durch Grenzübergang auch für $\langle A, B\rangle$. Es sei noch bemerkt, daß wir in Satz 1 auch *die Stetigkeit von $f, g$ nicht voraussetzen* auch in dem obigen Gedankengang nicht.

*Statt des Nichtverschwindens in einer Umgebung von $A$ genügt es $f(A)\neq 0$ vorauszusetzen, falls $A\in\langle A, B\rangle$, bzw. $f(A_n)\neq 0$ für eine Folge $A_n\to A$, falls $A\notin\langle A, B\rangle$ und ähnlich für $B$.*

BEWEIS. Man sieht durch Einsetzen, daß (2. 4) durch (2. 2) erfüllt ist (vgl. auch den Beweis von Satz 1 in [7]). Deshalb genügt es zu zeigen, daß (2. 2) und (2. 3) aus (2. 4) (mit stetigen, streng monotonen $\varphi, \psi$ und nichtnegativen $f, g$) folgen.

Wir setzen voraus (s. oben, Bemerkung 2), daß das Intervall $[A, B]$ geschlossen ist. Die Funktion $\varphi$ bilde $[A, B]$ in $[A', B']$ ab, und führen wir die Bezeichnungen

$$\varphi(x_i)=t_i\in[A', B'] \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\psi(\varphi^{-1}(t))=\Psi(t),\quad g(\varphi^{-1}(t))=G(t),\quad f(\varphi^{-1}(t))=F(t) \tag{2. 5}$$

ein, so wird aus (2. 4)

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{n} F(t_i)t_i\Big/\sum_{i=1}^{n} F(t_i)\right)=\sum_{i=1}^{n} G(t_i)\Psi(t_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} G(t_i). \tag{2. 6}$$

Es sei nun in (2. 6) $n=n_1m_2+n_2m_1$, wo $n_i$ und $m_i$ $(i=1, 2)$ beliebige natürliche Zahlen sind und weiter seien $t_i=u$ $(i=1, 2, \ldots, n_1m_2)$, $t_j=v$ $(j=n_1m_2+1, \ldots \ldots, n_1m_2+n_2m_1=n)$, dann ergibt sich

$$\Psi\left[\frac{n_1m_2F(u)u+n_2m_1F(v)v}{n_1m_2F(u)+n_2m_1F(v)}\right]=\frac{n_1m_2G(u)\Psi(u)+n_2m_1G(v)\Psi(v)}{n_1m_2G(u)+n_2m_1G(v)}$$

für alle $u, v\in[A', B']$. Es sei $\xi=n_1/n_2$, $\eta=m_1/m_2$, dann sehen wir — da $n_1, n_2, m_1, m_2$ beliebige natürliche Zahlen sind, — daß für beliebige positive rationale Zahlen $\xi$ und $\eta$

$$\Psi\left[\frac{\xi F(u)u+\eta F(v)v}{\xi F(u)+\eta F(v)}\right]=\frac{\xi G(u)\Psi(u)+\eta G(v)\Psi(v)}{\xi G(u)+\eta G(v)} \tag{2. 7}$$

gilt. Da aber laut (2. 5) mit $\varphi$ und $\psi$ auch $\Psi$ stetig ist, bleibt (2. 7) auch für beliebige positive reelle $\xi, \eta$ gültig.

Wählen wir nun in (2. 7) $u=A'$, $v=B'$, dann erhalten wir mit den Bezeichnungen $\xi F(A')=p$, $\eta F(B')=q$ ($p$ und $q$ sind beliebige nichtnegative reelle Zahlen, da $F(t)$

laut (2. 5) zusammen mit $f$ nichtnegativ ist und $F(A')=f(A)\neq 0$, $F(B')=f(B)\neq 0$ — vgl. Bemerkung 2) die Gleichung

$$(2.8)\qquad \Psi\left(\frac{pA'+qB'}{p+q}\right)=\frac{pF(A')^{-1}G(A')\Psi(A')+qF(B')^{-1}G(B')\Psi(B')}{pF(A')^{-1}G(A')+qF(B')^{-1}G(B')}.$$

Führen wir nun die neue Veränderliche $t=(pA'+qB')/(p+q)$ ein, die das ganze Intervall $[A', B']$ einläuft wenn $p$ und $q$ die nichtnegativen reellen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir wegen

$$p/(p+q)=(t-B')/(A'-B'),\quad q/(p+q)=1-(t-B')/(A'-B')$$

aus der rechten Seite von (2. 8) durch Dividieren des Zählers und des Nenners mit $(p+q)$ eine linear gebrochene Funktion von $t$, also gilt

$$(2.9)\qquad \Psi(t)=(at+b)/(ct+d)$$

wo

$$(2.10)\qquad c^2+d^2>0,\quad ad-bc\neq 0,$$

da sonst $\Psi$ nirgends endlich bzw. überall konstant wäre, was (2. 5) widerspricht (mit $\varphi$ und $\psi$ ist auch $\Psi$ stetig und streng monoton).

Wenn wir andererseits in (2. 7) $\xi=1/F(u)$, $\eta=1/F(v)$ und

$$(2.11)\qquad H(u)=G(u)/F(u)$$

wählen, so übergeht sie in

$$(2.12)\qquad \Psi\left[\frac{1}{2}(u+v)\right]=\big(H(u)\Psi(u)+H(v)\Psi(v)\big)/\big(H(u)+H(v)\big).$$

Da aber $\Psi(t)$ die Gestalt (2. 9) hat, wird aus (2. 12)

$$H(u)/H(v)=\left[\Psi(v)-\Psi\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)\right]\Big/\left[\Psi\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)-\Psi(u)\right]=\frac{cu+d}{cv+d},$$

wovon

$$(2.13)\qquad H(t)=k(ct+d),$$

und zwar wegen $g(x)\not\equiv 0$ mit

$$(2.14)\qquad k\neq 0$$

folgt. Nun folgen aus (2. 5) und (2. 9)

$$(2.15)\qquad \psi(x)=\Psi(\varphi(x))=\frac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)+d}$$

und aus (2. 5), (2. 11) und (2. 13)

$$(2.16)\qquad g(x)=G(\varphi(x))=F(\varphi(x))\cdot H(\varphi(x))=f(x)\,k\big(c\varphi(x)+d\big).$$

(2. 15) und (2. 16) wurden in (2. 2), während (2. 10) und (2. 14) in (2. 3) zusammengefaßt. Diese Relationen und somit den Satz 1 haben wir also vollständig bewiesen.

BEMERKUNG 3. Die mit $u=x+y$, $v=x-y$ erhaltbare Variante

$$\Psi(x+y)\,H(x+y)+\Psi(x-y)\,H(x-y) = \Psi(x)[H(x+y)+H(x-y)] \tag{2. 17}$$

von (2. 12) wurde von mehreren Verfassern untersucht (D. POMPEIU [22], T. ANGHELUȚA [6], M. GHERMANESCU [13], usw.). Sie fanden

$$H(x) = c\sin\alpha x+d\cos\alpha x, \tag{2. 18}$$
$$\Psi(x) = (a\sin\alpha x+b\cos\alpha x)/(c\sin\alpha x+d\cos\alpha x),$$

$$H(x) = c\,\mathrm{sh}\,\alpha x+d\,\mathrm{ch}\,\alpha x, \tag{2. 19}$$
$$\Psi(x) = (a\,\mathrm{sh}\,\alpha x+b\,\mathrm{ch}\,\alpha x)/(c\,\mathrm{sh}\,\alpha x+d\,\mathrm{ch}\,\alpha x)$$

und

$$H(x) = cx+d, \quad \Psi(x) = (ax+b)/(cx+d) \tag{2. 20}$$

als allgemeinste meßbare Lösungen von (2. 17). Es ist interessant, daß bei uns nur die Lösung (2. 20) eine Rolle spielt.

BEMERKUNG 4. Es sei noch bemerkt, daß (2. 12) auch ein Spezialfall von (2. 1) ist, nämlich

$$M_\Psi(x_1, x_2;\, H) = \frac{x_1+x_2}{2}. \tag{2. 21}$$

Die Lösungen (2. 18) und (2. 19) zeigen, daß (2. 1) für $n=2$ allein betrachtet auch von (2. 2) verschiedene Lösungen besitzen kann. Vgl. diesbezüglich auch M. BAJRAKTAREVIČ [7] (Satz 4).

## § 3. Reduktion des Problems der homogenen Mittelwerten

Wir bezeichnen das Grundintervall $\langle A, B\rangle$ mit $I$, und schreiben für $x_i\in I$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ die Bedingung der Homogenität der Mittelwerte des Typus (1. 3) auf:

$$\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(tx_i)\varphi(tx_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} f(tx_i)\right]=t\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]. \tag{3. 1}$$

Üblicherweise pflegt man voraussetzen, daß die Homogenitätsgleichung für alle reelle (oder positive) $t$ mit $tx_i\in I\,(i=1, 2, \ldots, n)$ erfüllt ist. Wir setzen nur voraus, daß diese Gleichung für alle $t\in I$ mit $tx_i\in I$, $x_i\in I$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ erfüllt ist. Da $t=1$ der Gleichung (3. 1) trivialerweise genugtut, *ist es natürlich* $1\in I$ *voraussetzen.*

Führen wir — $t$ momentan fix gehalten — die Bezeichnungen

$$\psi(x)=\varphi(tx), \quad g(x)=f(tx) \tag{3. 2}$$

ein, so wird aus (3. 1) eben

$$\psi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\psi(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right]=\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$$

d. h. (2. 4) gilt in $I$ für alle $n \geqq 2$, also besteht laut Satz 1

$$\psi(x) = (a\varphi(x)+b)/(c\varphi(x)+d), \quad g(x) = kf(x)(c\varphi(x)+d), \qquad k(c^2+d^2)(ad-bc) \neq 0, \tag{3. 3}$$

wo die „Konstanten" $a, b, c, d$ und $k$ noch von dem bisher fix gehaltenen $t$ abhängen. Mit (3. 2) geht so (3. 3) in

$$\begin{cases} \varphi(tx) = (a(t)\varphi(x)+b(t))/(c(t)\varphi(x)+d(t)), \\ f(tx) = k(t)f(x)(c(t)\varphi(x)+d(t)), \\ k(t)(c(t)^2+d(t)^2)(a(t)d(t)-b(t)c(t)) \neq 0 \end{cases} \tag{3. 4}$$

über. Dies ist ein Funktionalgleichungssystem für $\varphi$ und $f$, das für alle $t, x, tx \in I$ erfüllt ist und wir setzen voraus, daß $\varphi$ und $f$ in $I$ stetig, weiter $\varphi$ ebenda streng monoton und $f$ nichnegativ ist, aber in keinem Teilintervall positiver Länge identisch verschwindet. (Davon folgt auch die Existenz zweier Folgen $A_n \to A$, $B_n \to B$ mit $f(A_n) \neq 0$, $f(B_n) \neq 0$, was zur Anwendung des Satzes 1 — vgl. Bemerkung 2 — nötig war. Da jetzt auch $f$ als stetig vorausgesetzt wurde, bleiben die Ergebnisse auch bei $f(A)=0$ oder $f(B)=0$ gültig.)

Wenn wir weiter

$$\begin{cases} f_1(x)=f(x)\varphi(x),\ f_2(x)=f(x), & \mathbf{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \\ a_{11}(t)=k(t)a(t),\ a_{12}(t)=k(t)b(t), & \\ a_{21}(t)=k(t)c(t),\ a_{22}(t)=k(t)d(t), & \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3. 5}$$

schreiben, so wird aus (3. 4) die Vektor-Matrixgleichung

$$\mathbf{f}(tx) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{f}(x) \qquad (t, x, tx \in I), \tag{3. 6}$$

wo die Bezeichnungen (3. 5) und die Bedingungen über $f$ und $\varphi$ mit sich bringen, daß $f_2(x)=f(x)$ stetig, nichtnegativ ist und auf keinem Teilintervall positiver Länge identisch verschwindet, $f_1(x)/f_2(x)=\varphi(x)$ (auch in Punkten wo $f_2(x)=0$) stetig und streng monoton ist, ferner wegen (3. 4) $\det \mathbf{A}(t) \neq 0$ (d. h. *die Matrix* $\mathbf{A}$ *ist* immer *regulär* in $I$).

So führen wir die folgende Funktionenklasse ein:

DEFINITION. *Die im Intervall I definierte zweidimensionale Vektorfunktion*

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

*gehört zur Klasse* $\mathsf{F}$, *falls für alle* $x \in I$

a) $\mathbf{f}(x)$ *stetig ist,*

b) *dort* $f_2(x) \geqq 0$ *gilt, aber* $f_2$ *auf keinen Teilintervall positiver Länge identisch verschwindet,*

c) $f_1(x)/f_2(x)$ *(für* $x_0$ *mit* $f_2(x_0)=0$ *durch den als existierend vorausgesetzten Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x)/f_2(x))$$

*definiert) auf I streng monoton ist.*

Mit dieser Definition reduziert sich das Problem der Homogenität der Mittelwerte von der Gestalt (1. 3) auf die Lösung der Vektor-Matrix-Funktionalgleichung (3. 6) bezüglich $\mathbf{f}$ von der Klasse $\mathsf{F}$ bei regulären Matrizen $\mathbf{A}(t)$.

## § 4. Untersuchung einer Vektor-Matrix-Funktionalgleichung

In diesem § beschäftigen wir uns mit der Lösung der Vektor-Matrixgleichung (3. 6) unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{f}\in\mathsf{F}$ und die Werte von $\mathbf{A}(t)$ reguläre Matrizen sind. Wir beginnen mit zwei Hilfssätzen, die vielleicht auch für sich interessant sind:

**Hilfssatz 1.** *Ist* $\mathbf{f}\in\mathsf{F}$ *und besteht die Funktionalgleichung*

$$\mathbf{f}(tx)=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{f}(x) \tag{4. 1}$$

*für alle* $t, x, tx\in I$, *wo das Intervall* $I$ *den Wert* 1 *enthält, so ist die Matrixfunktion* $\mathbf{A}(t)$ *im Innern* $(I)$ *von* $I$ *stetig.*

Bemerkung 5. Laut Voraussetzung ist $1\in I=\langle A, B\rangle$. Da aber $I$ nicht unbedingt offen ist, mag auch $A=1$ *oder* $B=1$ sein. Diese zwei Fälle sind offenbar ganz symmetrisch behandelbar, wir schließen z. B. die erste Möglichkeit aus, *setzen* also *im folgenden überall voraus, daß* $A<1$ *ist.*

Beweis. Schreiben wir die Gleichung (4. 1) ausführlich aus, und bedienen wir uns der Symmerie der linken Seiten in $t$ und $x$, dann erhalten wir die beiden Gleichungen

$$f_1(tx) = a_{11}(t)f_1(x)+a_{12}(t)f_2(x) = a_{11}(x)f_1(t)+a_{12}(x)f_2(t), \tag{4. 2}$$

$$f_2(tx) = a_{21}(t)f_1(x)+a_{22}(t)f_2(x) = a_{21}(x)f_1(t)+a_{22}(x)f_2(t), \tag{4. 3}$$

$$(t, x, tx\in I).$$

Laut der Definition von $\mathsf{F}$ b) und der Bemerkung 5 gibt es in $I$ *beliebig nahe zu* 1 zwei Werte $x_1<x_2<1$ derart, daß

$$f_2(x_1)\neq 0,\quad f_2(x_2)\neq 0.\qquad (1-\varepsilon<x_1<x_2<1,\ \varepsilon \text{ beliebig klein}). \tag{4. 4}$$

Wir halten diese Werte fest und setzen sie in (4. 2) bzw. (4. 3) ein, um festzustellen, daß für beliebige $t$ mit $t, t(1-\varepsilon)\in I$

$$\begin{cases} a_{11}(t)f_1(x_1)+a_{12}(t)f_2(x_1) = a_{11}(x_1)f_1(t)+a_{12}(x_1)f_2(t) \\ a_{11}(t)f_1(x_2)+a_{12}(t)f_2(x_2) = a_{11}(x_2)f_1(t)+a_{12}(x_2)f_2(t) \end{cases} \tag{4. 5}$$

bzw.

$$\begin{cases} a_{21}(t)f_1(x_1)+a_{22}(t)f_2(x_1) = a_{21}(x_1)f_1(t)+a_{22}(x_1)f_2(t) \\ a_{21}(t)f_1(x_2)+a_{22}(t)f_2(x_2) = a_{21}(x_2)f_1(t)+a_{22}(x_2)f_2(t) \end{cases} \tag{4. 6}$$

besteht. Wegen der Definition von $\mathsf{F}$ c) und wegen (4. 4) existieren die folgenden Ausdrücke und sie sind verschieden:

$$f_1(x_1)/f_2(x_1) \neq f_1(x_2)/f_2(x_2)$$

*d. h. die Vektoren* $\mathbf{f}(x_1)$ *und* $\mathbf{f}(x_2)$ *sind linear unabhängig*, so daß die Gleichungssysteme (4. 5) bzw. (4. 6) bezüglich $a_{1k}(t)$ bzw. $a_{2k}(t)$ $(k=1, 2)$ eindeutig auflösbar sind, und wir erhalten

$$a_{jk}(t) = c_{jk}^1 f_1(t) + c_{jk}^2 f_2(t) \qquad (j, k=1, 2;\ t, t(1-\varepsilon) \in I), \tag{4. 7}$$

wo die $c_{jk}^i$ $(i, j, k=1, 2)$ wegen der Fixierung von $x_1$, und $x_2$ konstant sind.

Der Zusammenhang (4. 7) zeigt, daß mit $f_1(t), f_2(t)$ auch die $a_{jk}(t)$ $(j, k=1, 2)$ für alle $t$ mit $t \in I$, $t(1-\varepsilon) \in I$ stetig sind. Ist nun $t$ mit $A < t \in I$ beliebig, so kann man $\varepsilon$ so klein wählen, daß auch $t(1-\varepsilon)$ in $I$ liege, also sind die $a_{ik}(t)$ im ganzen von unten offenen Intervall $(A, B\rangle$ und a fortiori in $(I)=(A, B)$ (in dem Inneren von $I$) stetig, w. z. b. w.

**Hilfssatz 2.** *Ist* $\mathbf{f} \in \mathsf{F}$ *und gilt die Funktionalgleichung* (4. 1), *so besteht für beliebige* $u, v, uv \in (I)$ *die Matrix-Funktionalgleichung*

$$\mathbf{A}(uv) = \mathbf{A}(u)\,\mathbf{A}(v). \tag{4. 8}$$

Beweis. Es seien $u, v, uv \in (I)$. Dann folgt für alle $t \in I$ mit $uvt \in I$ aus (4. 1)

$$\mathbf{A}(uv)\,\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(uvt) = \mathbf{A}(u)\,\mathbf{f}(vt) = \mathbf{A}(u)\,\mathbf{A}(v)\,\mathbf{f}(t). \tag{4. 9}$$

Bei gegebenen $u, v$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß mit $uv$ auch $uv(1-\varepsilon)$ in $(I)$ liegt, ferner, wie wir im Beweis des Hilfssatzes 1 gesehen haben, gibt es $x_1, x_2$ mit der Eigenschaft (4. 4) und derart, daß $\mathbf{f}(x_1)$ und $\mathbf{f}(x_2)$ linear unabhängig sind (und $uvx_1$, $uvx_2 \in I$). Da ein beliebiger zweidimensionaler Vektor $\mathbf{g}$ eine Linearkombination dieser zwei unabhängigen Vektoren ist:

$$\mathbf{g} = \alpha_1 \mathbf{f}(x_1) + \alpha_2 \mathbf{f}(x_2),$$

folgt aus (4. 9)

$$\mathbf{A}(uv)\mathbf{g} = \alpha_1 \mathbf{A}(uv)\mathbf{f}(x_1) + \alpha_2 \mathbf{A}(uv)\mathbf{f}(x_2) =$$
$$= \alpha_1 \mathbf{A}(u)\mathbf{A}(v)\mathbf{f}(x_1) + \alpha_2 \mathbf{A}(u)\mathbf{A}(v)\mathbf{f}(x_2) = \mathbf{A}(u)\mathbf{A}(v)\mathbf{g}$$

für alle $\mathbf{g}$, was nur dann möglich ist, wenn (4. 8) in $(I)$ erfüllt ist, w. z. b. w.

Die Hilfssätze 1 und 2 reduzierten das Lösungsproblem der Gleichung (4. 1) auf das Auffinden der im Innern von $I$ stetigen Lösungen der Matrix-Funktionalgleichung (4. 8), deren Werte reguläre Matrizen sind. Aus (4. 1) folgt nämlich mit $x=1$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{f}(1), \tag{4. 10}$$

womit $\mathbf{f}$ im Innern von $I$ bestimmt ist, und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit läßt sich $\mathbf{f}$ auch im eventuell zu $I$ gehörigen Endpunkt $A$ (bzw. $B$) durch Grenzübergang bestimmen.

Die stetigen Lösungen der Gleichung (4. 8) wurden aber von A. Balogh in [8] vollständig aufgezählt, allerdings unter der Voraussetzung daß (4. 8) für alle positive bzw. alle reelle $u, v$ erfüllt ist, während wir (4. 8) hier nur für $u, v, uv \in (I)$ vorausgesetzt haben. Dies bedeutet aber keinen wesentlichen Unterschied in den Lösungen, da (4 .8) in [8] auf die Cauchyschen Funktionalgleichungen

$$F(xy) = F(x)\,F(y), \tag{4. 11}$$

$$G(xy) = G(x) + G(y) \tag{4. 12}$$

und auf das Funktionalgleichungssystem

$$S(xy) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \quad C(xy) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \tag{4. 13}$$

zurückgeführt wurde und diese in einem Intervall, das den Wert 1 enthält, dieselben Lösungen haben, wie für beliebige (positive) reelle Zahlen (vgl. [3] bzw. [21]).

Wir können jene in [8] (Sätze 1, 2) aufgeführte stetige Lösungen, deren Werte reguläre Matrizen sind, für positive (nichtnegative) Veränderliche in drei Typen zusammenfassen:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} t^\alpha + \alpha_{11} t^\beta & \alpha_{12} t^\alpha + \beta_{12} t^\beta \\ \alpha_{21} t^\alpha + \beta_{21} t^\beta & \alpha_{22} t^\alpha + \beta_{22} t^\beta \end{pmatrix}, \tag{4. 14}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^\beta(\alpha_{11} \log t + \beta_{11}) & t^\beta(\alpha_{12} \log t + \beta_{12}) \\ t^\beta(\alpha_{21} \log t + \beta_{21}) & t^\beta(\alpha_{22} \log t + \beta_{22}) \end{pmatrix}, \tag{4. 15}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^\beta(\alpha_{11} \sin(\alpha \log t) + \beta_{11} \cos(\alpha \log t)) & t^\beta \alpha_{12} \sin(\alpha \log t) \\ t^\beta \alpha_{21} \sin(\alpha \log t) & t^\beta(\alpha_{22} \sin(\alpha \log t) + \beta_{22} \cos(\alpha \log t)) \end{pmatrix}. \tag{4. 16}$$

*Enthält $I$ auch negative Werte, so spaltet sich* (4. 14) *in weitere Lösungen mit* $|t|^\alpha$ *oder* $|t|^\alpha \operatorname{sign} t$ *statt* $t^\alpha$ *und mit* $|t|^\beta$ *oder* $|t|^\beta \operatorname{sign} t$ *statt* $t^\beta$. *In* (4. 15) *und* (4. 16) *werden in diesem Falle* $t^\beta$ *wieder durch* $|t|^\beta$ *oder* $|t|^\beta \operatorname{sign} t$ *während* $\log t$ *durch* $\log |t|$ *ersetzt.* (Zwischen den auftretenden Konstanten $\alpha_{jk}$, $\beta_{jk}$ $(j, k = 1, 2)$ bestehen noch gewisse Zusammenhänge, die in [8] auch auf Spaltung in noch mehr Typen führten, von denen wir aber hier nicht Gebrauch machen werden.)

Jetzt können wir mittels (4. 10) auch $\mathbf{f}(t)$ bestimmen:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} at^\alpha + bt^\beta \\ ct^\alpha + dt^\beta \end{pmatrix}, \tag{4. 17}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t^\beta(a \log t + b) \\ t^\beta(c \log t + d) \end{pmatrix}, \tag{4. 18}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t^\beta(a \sin(\alpha \log t) + b \cos(\alpha \log t)) \\ t^\beta(c \sin(\alpha \log t) + d \cos(\alpha \log t)) \end{pmatrix} \tag{4. 19}$$

für positive (nichtnegative) $t$. Falls $I$ auch negative Werte enthält, so werden (4. 17)—(4. 19) in demselben Sinne modifiziert, wie oben (4. 14)—(4. 16). Damit ist $\mathbf{f}(t)$ im Innern von $I$ bestimmt. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit gelten dieselben Formeln für $\mathbf{f}(t)$ im ganzen Intervall $I$. So haben wir den

**Satz 2.** *Ist* $\mathbf{f} \in \mathsf{F}$, *sind die Matrizen* $\mathbf{A}(t)$ *regulär und besteht in* $\langle A, B \rangle$ *die Funktionalgleichung*

$$\mathbf{f}(tx) = \mathbf{A}(t)\mathbf{f}(x), \tag{4. 1}$$

*so kann* $\mathbf{f}$ *nur von einer der Gestalten* (4. 17), (4. 18), (4. 19) *sein in dem Sinne, daß* $t^\alpha$ *durch* $|t|^\alpha$ *oder* $|t|^\alpha \operatorname{sign} t$, $t^\beta$ *durch* $|t|^\beta$ *oder* $|t|^\beta \operatorname{sign} t$, *und* $\log t$ *durch* $\log |t|$ *ersetzt wird, falls* $A < 0$ *ist.*

Bemerkung 6. Auch umgekehrt gehört im wesentlichen zu jedem $\mathbf{f}$ der im Satz 2 angegebenen Gestalten je ein $\mathbf{A}$ derart, daß (4. 1) erfüllt sei. — (4. 1) bestimmt sogar außer $\mathbf{f}(t)$ auch die andere ihr in figurierende Funktion $\mathbf{A}(t)$ mit den Formeln (4. 14) bzw. (4. 15) bzw. (4. 16), wo allerdings zwischen den $\alpha_{jk}, \beta_{jk}$ $(j, k=1, 2)$, $a, b, c, d$ noch gewisse Zusammenhänge bestehen, die aber für unsere Zwecke nicht wichtig sind und andererseits durch Einsetzen in (4. 1) leicht ableitbar sind.

Ja, wir haben $\mathbf{f}(t)$ eben auf dem Wege bestimmt, daß wir zuerst $\mathbf{A}(t)$ ausgerechnet haben. Das bedeutet aber nicht, als ob $\mathbf{f}$ etwa nicht ohne explizite Angabe von $\mathbf{A}$ bestimmt werden könnte. Wenn wir nämlich die bei dem Beweise des Hilfssatzes 1 bewiesene Formel (4. 7) in (4. 2) und in (4. 3) zurücksetzen, erhalten wir ein Funktionalgleichungssystem der Gestalt

$$f_i(tx) = \sum_{j,k=1}^{2} d_i^{jk} f_j(t) f_k(x) \qquad (i=1, 2) \tag{4. 20}$$

wo die $d_i^{jk}$ $(i, j, k=1, 2)$ Konstanten sind. (Übrigens sind auch (4. 11)–(4. 13) Spezialfälle von (4. 20).) Die Lösung dieses Funktionalgleichungssystems (4. 20) wäre die andere Möglichkeit $\mathbf{f}(t)$ zu bestimmen. Für differenzierbare Lösungen von Gleichungen der Gestalt (4. 20) vgl. die Arbeit [11] von W. Eichhorn (vgl. auch die allgemeinerer Arbeiten [18], [19] von G. Maltese und der Aufsatz [25] von G. N. Sakowitsch). Übrigens ist auch (4. 20) von der Gestalt (4. 2) –(4. 3), (d. h. (4. 1)), so daß wir im wesentlichen auch (4. 20) gelöst haben.

Bemerkung 7. In den obigen Lösungswegen von (4. 1) war es wesentlich, daß $\mathbf{f}(x)$ in der Ebene zwei linear unabhängige Vektorwerte aufnimmt. Die Lösungen von (4. 1) können auch dann leicht bestimmt werden, wenn $\mathbf{f}(x)$ in der Ebene gar keine zwei linear unabhängige Vektorwerte aufnimmt. Dann ist nämlich

$$\mathbf{f}(x) = \lambda(x)\mathbf{c}, \tag{4. 21}$$

wo $\lambda(x)$ eine skaläre Funktion ist, und $\mathbf{c}$ ein konstanter Vektor. Ist $\lambda(x)\equiv 0$ oder $\mathbf{c}=0$, so ist $\mathbf{f}(x)\equiv 0$ und (4. 1) mit beliebigem $\mathbf{A}(t)$ erfüllt. Deshalb setzen wir $\lambda(x)\not\equiv 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ voraus. Offenbar kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\lambda(1) = 1 \tag{4. 22}$$

nehmen. Wenn wir (4. 1) mit (4. 21) ausführlich ausschreiben, dann erhalten wir

$$\lambda(tx)c_1 = a_{11}(t)\lambda(x)c_1 + a_{12}(t)\lambda(x)c_2, \tag{4. 23}$$

$$\lambda(tx)c_2 = a_{21}(t)\lambda(x)c_1 + a_{22}(t)\lambda(x)c_2 \tag{4. 24}$$

mit

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{z. B.} \quad c_1 \neq 0.$$

Schreiben wir

$$\mu(t) = a_{11}(t) + a_{12}(t)\frac{c_2}{c_1}, \tag{4. 25}$$

so geht (4. 23) in

$$\lambda(tx) = \mu(t)\lambda(x) \tag{4. 26}$$

über, was eine sogen. Pexidersche Funktionalgleichung ist (vgl. [2], § 3. 1. 1). Mit

$x=1$ erhalten wir wegen (4. 22)

$$\mu(t)=\lambda(t)\not\equiv 0, \tag{4. 27}$$

d. h. wegen (4. 26) ist $\mu(t)$ multiplikativ:

$$\mu(tx)=\mu(t)\mu(x). \tag{4. 28}$$

Aus (4. 21) und (4. 27) folgt

$$\mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix}\mu(x)c_1\\ \mu(x)c_2\end{pmatrix}. \tag{4. 29}$$

Jetzt bestimmen wir $\mathbf{A}(t)$: Aus (4. 25) folgt

$$a_{11}(t)=\mu(t)-a_{12}(t)\frac{c_2}{c_1},$$

sowie aus (4. 24), (4. 27) und (4. 28)

$$\mu(t)\mu(x)c_2=a_{21}(t)\mu(x)c_1+a_{22}(t)\mu(x)c_2,$$

d. h.

$$a_{21}(t)=\mu(t)\frac{c_2}{c_1}-a_{22}(t)\frac{c_2}{c_1},$$

so daß

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix}\mu(t)-a_{12}(t)\dfrac{c_2}{c_1} & a_{12}(t)\\ \big(\mu(t)-a_{22}(t)\big)\dfrac{c_2}{c_1} & a_{22}(t)\end{pmatrix} \tag{4. 30}$$

ist, wo $\mu(t)$ eine beliebige multiplikative Funktion und $a_{12}(t)$, $a_{22}(t)$ beliebige Funktionen sind. (4. 29) und (4. 30) erfüllen auch immer die Gleichung (4. 1). — Ist insbesondere $\mu(t)$ stetig, so ist (s. z. B. [2] § 2. 1. 2)

$$\mu(t)=t^\alpha \qquad (t>0)$$

bzw.

$$\mu(t)\equiv 1 \text{ oder } \mu(t)=|t|^\alpha \text{ oder } \mu(t)=|t|^\alpha \operatorname{sign} t \qquad (\alpha>0).$$

Damit haben wir (4. 1) auch in diesem Falle vollständig gelöst.

## § 5. Bestimmung aller homogener quasilinearer Mittel mit Gewichtsfunktionen

Im § 3 haben wir gezeigt, daß das Problem der Bestimmung aller homogener Mittelwerte der Gestalt (1. 3) mit der Lösung des Funktionalgleichungssystems (3. 4) äquivalent ist, und genauer gesagt mit der Angabe aller Lösungen $\mathbf{f}\in F$ der Vektor-Matrix-Funktionalgleichung (3. 6), wo $\mathbf{A}$ eine Funktion mit regulären Matrixwerten ist. Im vorigen § haben wir gefunden, daß diese Lösungen mit den Formeln (4. 17)—(4. 19) angegeben sind, und so unterscheiden wir auch weiter drei Fälle:

**A.** (4. 17) und (3. 5) ergeben

$$\varphi(t)=\frac{f_1(t)}{f_2(t)}=\frac{at^\alpha+bt^\beta}{ct^\alpha+dt^\beta}=\frac{at^{\alpha-\beta}+b}{ct^{\alpha-\beta}+d}=\frac{a+bt^{\beta-\alpha}}{c+dt^{\beta-\alpha}} \tag{5. 1}$$

und

$$f(t)=f_2(t)=ct^\alpha+dt^\beta=t^\beta(ct^{\alpha-\beta}+d)=t^\alpha(c+dt^{\beta-\alpha}). \tag{5. 2}$$

Da laut Satz 1 die Mittelwerte der Gestalt (1. 3) gegenüber einer Transformation der Gestalt (2. 2) invariant sind, erzeugen

$$\tilde{\varphi}(t)=t^{\alpha-\beta},\quad \tilde{f}(t)=t^\beta, \tag{5. 3}$$

bzw.

$$\tilde{\varphi}(t)=t^{\beta-\alpha},\quad \tilde{f}(t)=t^\alpha \tag{5. 4}$$

denselben Mittelwert, wie (5. 1) und (5. 2). Wegen der strengen Monotonie von $\varphi(t)$ und damit $\tilde{\varphi}(t)$ muß $\alpha\neq\beta$ sein und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\alpha>\beta$$

und (5. 3) nehmen, da die Fälle $\beta<\alpha$ bzw. (5. 4) davon nur in Bezeichnung abweichen würden. So erhalten wir als homogenen Mittelwert der Gestalt (1. 3)

$$M_\varphi(x_i,f)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\Big/\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^{1/(\alpha-\beta)}\qquad(\alpha>\beta), \tag{5. 5}$$

falls $I$ nur positive Zahlen enthält. Maximal kann

$$I=(0,\ \infty)$$

sein. (Falls auch der Grenzpunkt 0 zu $I$ gehörte, müßte wegen der Stetigkeit auch $\beta\geqq 0$ vorausgesetzt werden, diesbezüglich s. die folgenden Ausführungen.) Im Falle $\beta=0$ erhalten wir eben *die gewöhnlichen Potenzmittel*

$$M_\alpha(x_i)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\Big/n\right)^{1/\alpha}\qquad(\alpha\neq 0),$$

im Falle $\beta=\alpha-1$ *die Beckenbachschen Mittelwerte*

$$N_\alpha(x_i)=\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\Big/\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}.$$

Enthält $I$ auch nichtpositive Werte, so können, wie wir im Satz 2 gesehen haben, $t^\alpha$ und $t^\beta$ von einander unabhängig durch $|t|^\alpha$ oder $|t|^\alpha\operatorname{sign} t$ bzw. durch $|t|^\beta$ oder $|t|^\beta\operatorname{sign} t$ ersetzt werden. Untersuchen wir, in welchen Fällen $\tilde{\varphi}$ (und damit $\varphi$) streng monoton bleibt, so finden wir aber nur die folgenden zwei:

*α) $t^\alpha$ wird durch $|t|^\alpha\operatorname{sign} t$, während $t^\beta$ durch $|t|^\beta$ ersetzt.* $\tilde{\varphi}(t)=|t|^{\alpha-\beta}\operatorname{sign} t$ und damit

$$\varphi(t)=(a|t|^{\alpha-\beta}\operatorname{sign} t+b)/(c|t|^{\alpha-\beta}\operatorname{sign} t+d)$$

bleiben streng monoton, falls noch

$$\alpha > \beta$$

erfüllt ist (und nur in diesem Falle).

*β) $t^\beta$ wird durch $|t|^\beta \operatorname{sign} t$, während $t^\alpha$ durch $|t|^\alpha$ ersetzt.* $\tilde{\varphi}(t) = |t|^{\beta-\alpha} \operatorname{sign} t$ und damit

$$\varphi(t) = (b|t|^{\beta-\alpha} \operatorname{sign} t + a)/(d|t|^{\beta-\alpha} \operatorname{sign} t + c)$$

bleiben streng monoton, falls noch

$$\beta > \alpha$$

erfüllt ist. — In den übrigen Fällen ist $\varphi$ nicht mehr streng monoton.

In beiden Fällen ergeben sich $\tilde{f}(t) = |t|^\beta$ bzw. $\tilde{f}(t) = |t|^\alpha$ von selbst als nichtnegativ, sie sind *auch in dem* 0-*Punkt stetig dann und nur dann, falls*

$$\beta \geqq 0$$

(bzw. $\alpha \geqq 0$) ist. — Die beiden Fälle übergehen ineinander, wie wir jetzt schon sehen, wieder durch Ersetzen von $a, b, c, d, \alpha, \beta$ der Reihe nach durch $b, a, d, c, \beta, \alpha$. Wir nehmen also im folgenden den Fall *α)*.

Da $t = \tilde{\varphi}^{-1}(x) = |x|^{1/(\alpha-\beta)} \operatorname{sign} x$ die inverse Funktion von $x = \tilde{\varphi}(t) = |t|^{\alpha-\beta} \operatorname{sign} t$ ist, und $\tilde{f}(t) = |t|^\beta$, erhalten wir aus (1. 3) den homogenen Mittelwert

$$M_\varphi(x_i, f) = \left( \left| \sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha \operatorname{sign} x_i \right| \Big/ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^\beta \right)^{1/(\alpha-\beta)} \operatorname{sign}\left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha \operatorname{sign} x_i \right) \tag{5. 6}$$

$$(\alpha > \beta \geqq 0)$$

als Verallgemeinerung von (5. 5) auf auch nichtpositive Werte enthaltende Intervalle $I$. Maximal kann auch

$$I = (-\infty, \infty)$$

sein.

**B.** (4. 18) und (3. 5) ergeben

$$\varphi(t) = (a \log t + b)/(c \log t + d), \quad f(t) = t^\beta (c \log t + d)$$

und daher (vgl. (2. 2))

$$\tilde{\varphi}(t) = \log t, \quad \tilde{f}(t) = t^\beta.$$

Hier wäre bei Zulassen nichtpositiver $t$ die an Stelle von $\log t$ tretende Funktion $\log |t|$ und damit weder $\tilde{\varphi}(t)$ noch $\varphi(t)$ streng monoton, so daß wir uns auf positive $t$ beschränken müssen. So erhalten wir als homogenen Mittelwert der Gestalt (1. 3)

$$M_\varphi(x_i, f) = \exp\left( \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta \log x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta \right). \tag{5. 7}$$

Das Grundintervall $I$ kann maximal

$$I = (0, \infty)$$

(d. h. *höchstens nach rechts unendlich*) sein. Im Falle $\beta = 0$ erhalten wir eben *das gewöhnliche geometrische Mittel.*

**C.** Endlich ergeben (4. 19) und (3. 5)

$$\varphi(t) = \bigl(a \operatorname{tg}(\alpha \log t)+b\bigr)/\bigl(c \operatorname{tg}(\alpha \log t)+d\bigr),$$
$$f(t) = t^\beta \cos(\alpha \log t)\bigl(c \operatorname{tg}(\alpha \log t)+d\bigr),$$

wovon

$$\tilde{\varphi}(t) = \operatorname{tg}(\alpha \log t)$$

(bzw. $\operatorname{tg}(\alpha \log |t|)$) nur bei positiven $t$ undzwar höchstens im *endlichen* Intervall

$$I = (e^{-\pi/2\alpha}, e^{\pi/2\alpha})$$

streng monoton ist (wegen $1 \in I$ kommen $(e^{(k-1)\pi/2\alpha}, e^{(k+1)\pi/2\alpha})$ für $k \neq 0$ nicht in Frage), und nur wenn

$$\alpha \neq 0$$

ist. Dann ist aber auch

$$\tilde{f}(t) = t^\beta \cos(\alpha \log t)$$

nichtnegativ. So ergibt sich als letzter homogener Mittelwert der Gestalt (1. 3)

$$\text{(5. 8)} \quad M_\varphi(x_i, f) = \exp\left\{\frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \sin(\alpha \log x_i) \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^\beta \cos(\alpha \log x_i)\right]\right\}$$
$$(\alpha \neq 0).$$

Andererseits erfüllen auch die Mittelwerte (5. 5), (5. 6), (5. 7) und (5. 8) die Homogenitätsgleichung (3. 1), also gilt der folgende

**Satz 3.** *Falls der verallgemeinerte quasilineare Mittelwert*

$$\text{(1. 3)} \qquad M_\varphi(x_i, f) = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) f(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^n f(x_i)\right]$$

*die Homogenitätsgleichung*

$$\text{(5. 9)} \qquad M_\varphi(t x_i, f) = t M_\varphi(x_i, f)$$

*für alle* $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *in einem (offenen, halboffenen oder abgeschlossenen) Intervall* $\langle A, B\rangle$, *das den Wert* 1 *enthält, erfüllt, falls dort* $\varphi$ *stetig und strengmonoton.* $f$ *stetig und nichtnegativ (aber in keinem Teilintervall positiver Länge identisch verschwindend) ist, dann hat* $M_\varphi$ *eine der Gestalten*

$$\text{(5. 6)} \quad M_\varphi(x_i, f) = \left(\left|\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha \operatorname{sign} x_i\right| \Big/ \sum_{i=1}^n |x_i|^\beta\right)^{1/(\alpha-\beta)} \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha \operatorname{sign} x_i\right)$$
$$(\alpha > \beta \geqq 0),$$

$$\text{(5. 7)} \qquad M_\varphi(x_i, f) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log x_i \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^\beta\right),$$

$$\text{(5. 8)} \quad M_\varphi(x_i, f) = \exp\left\{\frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \sin(\alpha \log x_i) \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^\beta \cos(\alpha \log x_i)\right]\right\}$$
$$(\alpha \neq 0),$$

*wo* $\alpha, \beta$ *(abgesehen von den angegebenen Größenrelationen) beliebige Konstanten sind.*

*Im Falle* (5. 8) *ist das Grundintervall* $\langle A, B\rangle$ *höchstens* $(e^{-\pi/2\alpha}, e^{\pi/2\alpha})$, *im Falle* (5. 7) *höchstens* $(0, \infty)$ *während im Falle* (5. 6) *auch* $\langle A, B\rangle = (-\infty, \infty)$ *möglich ist. Wenn man bei* (5. 6) *die Stetigkeit von* $f(t)$ *im* 0-*Punkt nicht fordert, so erübrigt sich die Bedingung* $\beta \geqq 0$ *und es bleibt nur* $\alpha > \beta$. *Falls* $\langle A, B\rangle$ *nur positive Zahlen enthält, so vereinfacht sich* (5. 6) *zu*

$$M_\varphi(x_i, f) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta\right)^{1/(\alpha-\beta)} \qquad (\alpha > \beta). \tag{5. 5}$$

## § 6. Weitere Bemerkungen und Probleme

Bemerkung 8. Die Mittelwerte (5. 6) (bzw. (5. 5)), (5. 7) und (5. 8) erfüllen — wie man durch Einsetzen leicht sieht — nicht nur die Homogenitätsgleichung (5. 9) sondern auch ihre Verallgemeinerung

$$M_\varphi(x_i y_j, f) = M_\varphi(x_i, f)\, M_\varphi(y_j, f) \tag{6. 1}$$

oder ausführlich ausgeschrieben:

$$\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i y_j) f(x_i y_j) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i y_j)\right] =$$
$$= \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) f(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \varphi^{-1}\left[\sum_{j=1}^{m} \varphi(y_j) f(y_j) \Big/ \sum_{j=1}^{m} f(y_j)\right],$$

was im Spezialfalle $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = t$ tatsächlich mit (3. 1) d. h. (5. 9) zusammenfällt.

Daraus folgt, daß die (negativen) Logarithmen der Mittelwerte (5. 5)—(5. 8) (statt (5. 6) schreiben wir der Einfachheit und des speziellen Anwendungsgebietes halber die Formel (5. 5))

$$I_{\alpha,\beta}(x_i) = \frac{1}{\beta-\alpha} \log\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta\right) \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{6. 2}$$

$$I_{\beta,\beta}(x_i) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta \log x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta, \tag{6. 3}$$

$$I_\beta^\alpha(x_i) = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta \sin(\alpha \log x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta \cos(\alpha \log x_i)\right] \qquad (\alpha \neq 0), \tag{6. 4}$$

die aus (6. 1) durch Logarithmieren entstandene Gleichung

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) \tag{6. 5}$$

erfüllen. — Nun ist die Gleichung (6. 5) eine wichtige Eigenschaft — *die „Additivität"* *der* informationstheoretischen *Entropie*. Die zwei bisher benützen Arten von solchen Entropien (vgl. etwa [23], [24])

$$I_\alpha(x_i) = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^n x_i^\alpha \Big/ \sum_{i=1}^n x_i\right) \qquad (\alpha \neq 1), \tag{6. 6}$$

$$I_1(x_i) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i \Big/ \sum_{i=1}^n x_i \tag{6. 7}$$

sind eben die Spezialfälle $\beta = 1$ von (6. 2) und (6. 3):

$$I_\alpha(x_i) = I_{\alpha,1}(x_i), \quad I_1(x_i) = I_{1,1}(x_i). \tag{6. 8}$$

Auch andere Zusammenhänge zwischen (6. 6), (6. 7) und (6. 2), (6. 3) sind leicht festzustellen:

$$I_{\alpha,\beta}(x_i) = (1/\beta) I_{\alpha/\beta}(x_i^\beta), \quad I_{\beta,\beta}(x_i) = (1/\beta) I_1(x_i^\beta),$$

was auch (6. 8) enthält. Ferner gilt

$$I_{\alpha,\beta}(x_i) = \left[(1-\alpha)I_\alpha(x_i) + (\beta-1)I_\beta(x_i)\right]/(\beta-\alpha) \qquad (\alpha \neq \beta),$$

(also $I_{\alpha,\beta}(x_i)$ ist auch selbst ein „Mittelwert mit den Gewichten $1-\alpha, \beta-1$" von $I_\alpha(x_i)$ und $I_\beta(x_i)$). Auch die Grenzwertrelation

$$\lim_{\alpha\to\beta} \{[(1-\alpha)I_\alpha(x_i) + (\beta-1)I_\beta(x_i)]/(\beta-\alpha)\} = I_{\beta,\beta}(x_i)$$

gilt, da — wie man gleich sieht —

$$\lim_{\alpha\to\beta} I_{\alpha,\beta}(x_i) = -\lim_{\alpha\to\beta} \frac{\log \sum_{i=1}^n x_i^\alpha - \log \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\alpha-\beta} =$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left(\log \sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right)_{\alpha=\beta} = -\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log x_i \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^\beta = I_{\beta,\beta}(x_i)$$

besteht. (Dies zeigt zugleich, daß auch (5. 7) *aus* (5. 5) *durch den Grenzübergang* $\alpha \to \beta$ *entsteht.*) — Für (6. 3) vgl. auch [24].

Es scheint kein so einfacher Zusammenhang zwischen den bisher benützen Entropien (6. 6), (6. 7) und der neuen „Entropie" (6. 4) $I_\beta^\alpha(x_i)$ zu sein.

Die Entropien (6. 6) und (6. 7) wurden in [10] von einem der Verff. dadurch charakterisiert, daß sie die einzigen der Gestalt

$$I(x_i) = \Phi^{-1}\left[\sum_{i=1}^n x_i \Phi(-\log x_i) \Big/ \sum_{i=1}^n x_i\right] \tag{6. 9}$$

sind, die die Additivitätseigenschaft (6. 5) besitzen. Da wir die Formeln (6. 2)—(6. 4) aus Mittelwerten der Gestalt (1. 3) durch (negatives) Logarithmieren erhalten haben, ist hier

$$I(x_i) = -\log \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\varphi(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^n f(x_i)\right] = \tag{6. 10}$$

$$= \Phi^{-1}\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\Phi(-\log x_i) \Big/ \sum_{i=1}^n f(x_i)\right]$$

(wo $\varphi(x) = \Phi(-\log x)$ geschrieben wurde). Dies bedeutet, daß die Entropien (6. 9) als verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte der Entropien $(-\log x_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ der einzelnen Ereignisse mit der Gewichtsfunktion $x$ während (6. 10) als solche mit der Gewichtsfunktion $f(x)$ entstanden. In beiden Fällen wurde die Additivitätseigenschaft (6. 5) beobachtet. Obzwar die mit (6. 5) äquivalente Multiplikativitätsrelation (6. 1) die Homogenitätseigenschaft (5. 9) zur Folge hat, beweist unser Satz 3 nicht, daß (6. 2)—(6. 4) die alleinigen additiven informationstheoretischen Entropien sind, da in der Informationstheorie die $x_i, y_j$ als Wahrscheinlichkeiten im Intervall (0, 1] liegen und auch

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j \leqq 1 \tag{6. 11}$$

bestehen muß, während wir bei (5. 9) im Satz 3 keine solche Einschränkung machten. — (6. 11) gilt im Falle nicht unbedingt vollständiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Bei vollständigen Verteilungen gilt die noch stärkere Einschränkung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1. \tag{6. 12}$$

In [4] haben wir unter einer weiteren Voraussetzung, daß nämlich die Funktion $F(x) = x\Phi\ (-\log x)\ (x \neq 0)$, $F(0)=0$ in [0, 1] konvex sei, bewiesen, daß (6. 6) und (6. 7) auch bei der Einschränkung (6. 12) die alleinigen Entropien der Gestalt (6. 9) sind, die die Additivitätsgleichung (6. 5) erfüllen.

Das *Problem der Bestimmung aller Entropien der Gestalt* (6. 10), *die additiv sind, d. h.* (6. 5) *mit* (6. 11) *bzw.* (6. 12) *erfüllen,* führt auf *das Gleichheits- und Homogenitätsproblem unter den Einschränkungen*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1, \ mt \leqq 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ mt = 1, \tag{6. 13}$$

d. h. auf das Problem der *Lösung der nur für solche Variablen vorausgesetzten Gleichungen* (2. 4) *und* (3. 1) *die diesen Einschränkungen unterliegen.* Im zweiten Falle von (6. 13) geht auch das grundlegende Gleichungssystem (3. 4) in

$$\begin{cases} \varphi(x/m) = \big(a(1/m)\varphi(x) + b(1/m)\big)/\big(c(1/m)\varphi(x) + d(1/m)\big), \\ f(x/m) = k(1/m)f(x)\big(c(1/m)\varphi(x) + d(1/m)\big), \\ k(1/m)\big(c(1/m)^2 + d(1/m)^2\big)\big(a(1/m)d(1/m) - b(1/m)c(1/m)\big) \neq 0, \end{cases}$$

d. h. (4. 1) in

$$\mathbf{f}(x/m) = \mathbf{A}(1/m)\,\mathbf{f}(x)$$

$(x \in (0, 1]$, $m$ durchläuft die positive ganze Zahlen) über. — In beiden Fällen haben wir in [4] und [10] zuerst das Gleichheitsproblem (2. 4) (im Spezialfalle $f(x) = kg(x)$ d. h. $c=0, d=1$) gelöst und das dem Satze 1 entsprechende (aber daraus nicht folgende) Ergebnis $\psi(x) = a\varphi(x) + b$ erhalten (in [4] unter der obigen Konvexitätsvoraussetzung). Die oben erwähnten Resultate bezüglich der Charakterisierung von (6. 6) und (6. 7) entsprechen eben der Lösung des Homogenitätsproblems unter den Einschränkungen (6. 13) in demselben Spezialfall.

Jedenfalls genügen die von uns vorgeschlagenen neuen Entropieformeln (6. 2), (6. 3) auch in (0, 1], (6. 4) in $(e^{-\pi/2\pi}, 1]$ der Additivitätsgleichung (6. 5) (natürlich auch unter den Einschränkungen (6. 11) bzw. (6. 12)). Die Praxis mag es zeigen, ob sie in der Informationstheorie nützlich sind. (Allerdings kann (6. 4) nur bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit positiver unterer Schränke für die Wahrscheinlichkeiten in Frage kommen.)

BEMERKUNG 9. Es ist natürlich a priori auch möglich, daß für die Informationstheorie additive Entropien von noch anderer Gestalt als (6. 9) oder (6. 10) Bedeutung haben werden.

Dies wirft andererseits das Problem auf, — da so eine noch natürlichere Charakterisierung der Entropien (6. 6), (6. 7) bzw. (6. 2), (6. 3), (6. 4) zu erhoffen wäre — *welche Eigenschaften Mittelwerte* (6. 9) und allgemeiner (6. 10) oder, was dasselbe ist, (1. 3) *charakterisieren?* Diese Frage wurde bei den quasiarithmetischen und quasilinearen Mitteln (1. 1), (1. 2) schon lange her gelöst (s. etwa [1]) undzwar (bei (1. 2)) für gegebene und auch für unbekannte Gewichte und (bei (1. 1) und (1. 2)) für beliebige Zahlen $n$ ebenso wir für eine fixe Zahl $n_0$, doch kennen wir keine ähnlichen Untersuchungen für den Mittelwerttypus (1. 3).

BEMERKUNG 10. Dies führt zurück auf das schon gestreifte Problem der *Lösung des Gleichheits- und Homogenitätsproblem für eine fixe Anzahl von Veränderlichen*, d. h. der *Lösung der nur für ein fixes $n=n_0$ vorausgesetzten Gleichungen* (2. 4) *und* (3. 1). — Es sei bemerkt, daß wir nur in den Betrachtungen des § 2 die Gliederzahl $n$ über verschiedene (positive ganze) Werte durchlaufen lassen mußten.

Im § 2 haben wir schon ein Beispiel (2. 21) gesehen, wo bei fixem $n=2$ auch andere Lösungen möglich sind, als bei Zulassen beliebiger $n$. Dagegen folgt im Spezialfall $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=f(x)$, $g(x)=k$ aus Satz 1 $k=g(x) = kf(x)(cx+d)$ d. h.

$$f(x) = 1/(cx+d)$$

als allgemeine (stetige, streng monotone) Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Big/ n\right]$$

für beliebige $n$, und — wie in [5] gezeigt wurde (vgl. auch [2] § 2. 3. 3) — hat auch die nur für $n=2$ vorausgesetzte Gleichung

$$\big(f(x_1)x_1+f(x_2)x_2\big)/\big(f(x_1)+f(x_2)\big) = f^{-1}\big[\big(f(x_1)+f(x_2)\big)/2\big]$$

eben dieselbe allgemeine (stetige, streng monotone) Lösung.

Ebenfalls enthalten unsere Ergebnisse die bezüglichen bekannten Sätze (vgl. [14], [2] § 3. 1. 3) für die quasiarithmetischen Mittelwerte (1. 1), insbesondere hat

$$\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Big/ n\right] = \psi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\Big/ n\right]$$

wegen Satz 1 $\big(f(x)=kg(x)=1,\ c\varphi(x)+d = 1,\ c=0,\ d=1\big)$ $\psi(x) = a\varphi(x)+b$ als allgemeine (stetige, streng monotone) Lösung, während die Homogenitätsgleichung

$$\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(tx_i)\Big/ n\right] = t\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Big/ n\right]$$

laut Satz 3 ($f(x)\equiv 1$) nur $\varphi(x) = ax^\alpha + b$ ($\alpha \neq 0$) (bzw. $a|x|^\alpha \operatorname{sign} x + b$, $\alpha > 0$) und $\varphi(x) = a \log x + b$ ($x > 0$) als stetige streng monotone Lösungen besitzt, was auch für fixe $n = n_0$ in gleicher Gestalt gültig und bekannt ist.

Damit sind wir zu unserem Ausgangspunkt der quasiarithmetischen Mittelwerte (1. 1) zurückgelangt.

## Literatur

[1] J. Aczél, О теории средних, *Colloq. Math.* **4** (1956), 33—55.

[2] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel, Stuttgart* und *Berlin*, 1961.

[3] J. Aczél, Über die Begründung der Additions- und Multiplikationsformeln von bedingten Wahrscheinlichkeiten, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961), 111—121.

[4] J. Aczél—Z. Daróczy, Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 95—121.

[5] J. Aczél—I. Fenyő, On fields of forces in which centres of gravity can be defined, *Hungarica Acta Math.* **1** (1946—1949), 53—60.

[6] T. Angheluţa, Sur une équation fonctionnelle, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932), 420—422.

[7] M. Bajraktarevič, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes, *Glasnik Mat.-Fiz. i Astr.* **13** (1958), 243—248.

[8] A. Balogh, On the determination of geometric objects with special transformation formulae, *Mathematica Cluj*, **1 (24)** (1959), 199—219.

[9] E. F. Beckenbach, A class of mean value functions, *Amer. Math. Monthly* **57** (1950), 1—6.

[10] Z. Daróczy, Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von Rényi, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **1** (1963), 381—388.

[11] W. Eichhorn, Lösung einer Klasse von Funktionalgleichungssysteme, *Arch. Math* **14** (1963), 266-270.

[12] B. de Finetti Sul concetto di media, *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **2** (1931), 369—396.

[13] M. Ghermanescu, Sur quelques équations fonctionnelles de M. D. Pompeiu, *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* **26** (1943—1944), 582—585.

[14] G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, Inequalities, 2nd ed., *Cambridge*, 1952.

[15] B. Jessen, Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels, *Acta Sci. Math. Szeged*, **5** (1931), 108—116.

[16] B. Jessen, Bemaerkinger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier I., *Mat. Tidsskrift B* (1931), 17—28.

[17] K. Knopp, Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern. I., *Math. Z.* **30** (1929), 387—413.

[18] G. Maltese, Spectral Representations for Abstract Functional Equations, *Amer. Math. Soc. Notices* **7** (1960), 384.

[19] G. Maltese, Spectral Representations for Solutions of Certain Abstract Functional Equations, *Compositio Math.* **15** (1962), 1—22.

[20] M. Nagumo, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Jap. J. Math.* **7** (1930), 71—79.

[21] W. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. I., *Leipzig*, 1907.

[22] D. Pompeiu, Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris* **190** (1930), 1107—1109.

[23] A. Rényi, On measures of entropy and information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability 1960. I.* Berkeley, 1961, 547—561.

[24] A. Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Anhang: Einführung in die Informationstheorie, *Berlin*, 1962.

[25] Г. Н. Сакович, Функуиональные уравнения для сумм экспоненциалов, (unter Druck).

*(Eingegangen am 16. Januar 1963.)*