Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, III*

Von E. VINCZE (Miskolc)

Bei den vorigen Funktionalgleichungen (2. 1) und (3. 1), bzw. (4. 1) und (5. 1) hat der Umstand die Lösung wesentlich vereinfacht, daß diese Funktionalgleichungen *auch bekannte Funktionen*, bzw. *nur zwei unbekannte Funktionen* enthielten. Einerseits mußten wir wenigere Fallunterscheidungen machen, andererseits konnten wir viele Vereinfachungen durchführen.

Jetzt wollen wir weitere Funktionalgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen und ohne bekannte Funktionen als Anwendungsbeispielen für die vorher schon skizzierte Methode vorführen, die aber, unserer Meinung nach, unabhängig von dieser Determinantenmethode auch selbst Interesse haben.

§ 6. Eine Verallgemeinerung der trigonometrischen und verwandten Funktionalgleichungen

Eine in Verglich zu den vorigen „wesentlich schwierigere" Funktionalgleichung ist

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1)\,H(z_2) + K(z_1)\,L(z_2), \tag{6. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\; F(z), G(z), H(z), K(z), L(z)\colon Q_0 \to Q],$$

trotzdem, daß auch diese Gleichung „nur" fünf unbekannte Funktionen enthält und zu demselben Type gehört wie z. B. (2. 1). *Hierbei ist Q_0 eine beliebige Abelsche Gruppe und Q bezeichnet eine Menge der komplexen Zahlen.*

Die oben erwähnte „Schwierigkeit" ergibt sich daraus, daß die später aufzuschreibenden, aus Funktionendeterminanten bestehenden Gleichungen *keine bekannten Funktionen* enthalten.

Die Funktionalgleichung (6. 1) ist eine wichtige gemeinsame Verallgemeinerung mehrerer gutbekannter Funktionalgleichungen. So enthält die Gleichung (6. 1) z. B. im Falle $F(z) \equiv G(z) \equiv L(z) \equiv \varphi(z)$ und $H(z) \equiv K(z) \equiv 1$ die Cauchysche Gleichung (2. 2); im Falle $F(z) \equiv G(z) \equiv H(z) \equiv \psi(z)$ und $K(z_1)\,L(z_2) \equiv 0$ die andere Cauchysche Gleichung (2. 3). Weiter enthält sie *die trigonometrischen und hyper-*

---

* Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der in *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 149—163 und 314—323 erschienenen Mitteilungen. Die Numerierung der Formeln, Sätzen und Literaturangaben ist fortlaufend. Die Hinweise beziehen sich auf die Literaturverzeichnisse der obigen zwei Artikeln.

bolischen Funktionalgleichungen, z. B.

$$S_1(z_1+z_2) = S_1(z_1)\,C_1(z_2)+C_1(z_1)\,S_1(z_2),$$

bzw.

$$C_2(z_1+z_2) = C_2(z_1)\,C_2(z_2)+S_2(z_1)\,S_2(z_2)$$

im Falle $F(z)\equiv G(z)\equiv L(z)\equiv S_1(z)$ und $H(z)\equiv K(z)\equiv C_1(z)$, bzw. im Falle $F(z)\equiv G(z)\equiv H(z)\equiv C_2(z)$ und $K(z)\equiv L(z)\equiv S_2(z)$, wobei noch $z_1 * z_2 = z_1+z_2$ ist (vgl. auch §§ 4., 5.), usw.

Es sei noch bemerkt, daß wir die Funktionalgleichung

$$F(u+v) = G(u)\,H(v)+K(u)\,L(v)$$

schon in [18] behandelt haben. Gleichzeitig haben wir dort alle wesentliche Literaturangaben bezüglich dieser Gleichung aufgezählt (vgl. [5], [8], [11], [15], [16], [19]).

Jetzt wollen wir diese obengenannte Funktionalgleichung unter schwächeren Bedingungen und mit dieser Determinantenmethode *wesentlich einfacher* behandeln, und zwar beweisen wir den folgenden

Satz 6. *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf Q_0 geltenden Funktionalgleichung* (6. 1) *sind die folgenden Funktionen*:

(e_1) $F(z)\equiv H(z)\equiv L(z)\equiv 0$,
$G(z)$ und $K(z)$ beliebige komplexe Funktionen;
oder
$F(z)\equiv G(z)\equiv L(z)\equiv 0$,
$H(z)$ und $K(z)$ beliebige komplexe Funktionen;

(e_2) $F(z)=\alpha_1\alpha_2^2\psi(z)$,
$G(z)=\alpha_1\alpha_2\psi(z)$,
$H(z)=\alpha_2\psi(z)$,
$K(z)$ beliebige komplexe Funktion,
$L(z)\equiv 0$;

(e_3) $F(z)\equiv 0$,
$H(z)=\alpha_1 L(z)$,
$K(z) = -\alpha_1 G(z)$,
$G(z)$ und $L(z)$ beliebige komplexe Funktionen;

(e_4) $F(z) = \alpha_2\alpha_3^2\psi(z)$,
$H(z) = \alpha_1\alpha_3\psi(z)$,
$L(z) = \alpha_3\psi(z)$,
$K(z) = \alpha_2\alpha_3\psi(z)-\alpha_1 G(z)$,
$G(z)$ beliebige komplexe Funktion;

(e_5) $F(z) = \alpha_1\psi_1(z)+\alpha_2\psi_2(z)$,
$G(z) = \alpha_3\psi_1(z)+\alpha_4\psi_2(z)$,
$H(z) = \alpha_5\psi_1(z)+\alpha_6\psi_2(z)$,
$K(z) = \alpha_7\psi_1(z)+\alpha_8\psi_2(z)$,
$L(z) = \alpha_9\psi_1(z)+\alpha_{10}\psi_2(z)$,

$\alpha_3\alpha_6+\alpha_7\alpha_{10} = 0,\quad \alpha_4\alpha_5+\alpha_8\alpha_9 = 0,$
$\alpha_3\alpha_5+\alpha_7\alpha_9 = \alpha_1,\quad \alpha_4\alpha_6+\alpha_8\alpha_{10} = \alpha_2;$

$$(e_6)\qquad \begin{aligned} F(z) &= \psi(z)\left[\alpha_1\varphi(z)+\alpha_2\right],\\ G(z) &= \psi(z)\left[\alpha_3\varphi(z)+\alpha_4\right],\\ H(z) &= \psi(z)\left[\alpha_5\varphi(z)+\alpha_6\right],\\ K(z) &= \psi(z)\left[\alpha_7\varphi(z)+\alpha_8\right],\\ L(z) &= \psi(z)\left[\alpha_9\varphi(z)+\alpha_{10}\right],\end{aligned}$$

$$\alpha_3\alpha_5+\alpha_7\alpha_9 = 0,\quad \alpha_4\alpha_6+\alpha_8\alpha_{10} = \alpha_2,$$
$$\alpha_3\alpha_6+\alpha_7\alpha_{10} = \alpha_1,\quad \alpha_4\alpha_5+\alpha_8\alpha_9 = \alpha_1;$$

wobei $\varphi(z)$ *bzw.* $\psi(z), \psi_1(z), \psi_2(z)$ *den auf* Q_0 *geltenden Funktionalgleichungen*

$$(6.\,2)\qquad \varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1)+\varphi(z_2), \qquad [\text{vgl. } (2.\,2)]$$

$$(6.\,3)\qquad \psi(z_1 * z_2) = \psi(z_1)\,\psi(z_2), \qquad [\text{vgl. } (2.\,3)]$$

$$\left[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ \varphi(z), \psi(z), \psi_1(z), \psi_2(z)\colon Q_0 \to Q\right]$$

genügende, sonst aber beliebige komplexe Funktionen bezeichnen und α_ν $(\nu = 1, 2, \dots, 10)$ *beliebige komplexe Konstanten mit den bezüglichen Nebenbedingungen sind. Weitere Lösungen sind auch diejenige Funktionen* $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$, $L(z)$ *und* $F(z)$, *die aus den vorigen mit Vertauschung der Funktionen*

$$G(z)\leftrightarrow H(z) \ \ \textit{und}\ \ K(z)\leftrightarrow L(z),$$

oder

$$G(z)\leftrightarrow K(z) \ \ \textit{und}\ \ H(z)\leftrightarrow L(z),$$

oder

$$G(z)\leftrightarrow L(z) \ \ \textit{und}\ \ K(z)\leftrightarrow H(z)$$

entstehen. Es gibt keine andere Lösung.

Bemerkung. Bei dem folgenden Beweis des ausgeschprochenen Satzes brauchen wir auch die Lösungen der Funktionalgleichungen

$$(6.\,4)\qquad C_1(z_1 * z_2) = C_1(z_1)\,C_1(z_2) - S_1(z_1)\,S_1(z_2), \qquad [\text{vgl. } (4.\,1)]$$

$$(6.\,5)\qquad S_2(z_1 * z_2) = S_2(z_1)\,C_2(z_2) + S_2(z_2)\,C_2(z_1), \qquad [\text{vgl. } (5.\,1)]$$

$$\left[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ C_1(z), S_1(z), S_2(z), C_2(z)\colon\ Q_0 \to Q\right]$$

deren Lösungen in den Sätzen 4. und 5. aufgezählt wurden (vgl. § 4. und § 5.).

Beweis. Vor allem bemerken wir, daß die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ bzw. $K(z)$ und $L(z)$, weiter $G(z)$ und $K(z)$ bzw. $H(z)$ und $L(z)$ folglich auch $G(z)$ und $L(z)$ bzw. $K(z)$ und $H(z)$ wegen der Symmetrie gleichzeitig vertauschbar sind. Dadurch können wir auf Grund eines Lösungssystems weitere drei Lösungssysteme angeben. Diese Bemerkung wird auch die Lösung wesentlich vereinfachen.

Wir setzen voraus, daß mindestens zwei nicht identisch konstante Funktionen von $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$, $L(z)$ existieren. Gegenfalls, wie man gleich sieht, sind sämtliche Funktionen in (6. 1) konstant. Die Lösungssysteme $(e_1 - e_3)$ enthalten auch diese Fälle.

Vertauschen wir in (6. 1) die Veränderlichen z_1 und z_2, dann folgt

$$G(z_1)\,H(z_2)+K(z_1)\,L(z_2) = G(z_2)\,H(z_1)+K(z_2)\,L(z_1),$$

d. h.

(6. 6) $$\Delta(G, H)+\Delta(K, L) = 0.$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit L, dann ergibt sich die Gleichung

$$\Delta(G, H, L)+\Delta(K, L, L) = \Delta(G, H, L) = 0,$$

die nur in den folgenden Fällen erfüllt ist:

A.

(6. 7) $$L(z) \equiv 0,$$

B.

(6. 8) $$H(z)=\beta_1 L(z),$$

C.

(6. 9) $$G(z) = \beta_1 H(z)+\beta_2 L(z)$$

$(\beta_1, \beta_2 = konst.)$.

A. Im Falle (6. 7) bekommen wir aus (6. 1) die Pexidersche Gleichung (vgl. die Fußnote 1 des I. Teiles dieser Notenfolge)

(6. 10) $$F(z_1 * z_2) = G(z_1)\,H(z_2).$$

Wie bekannt, sind die Lösungen dieser Gleichung die folgenden Funktionen:

A. 1. $F(z)\equiv H(z)\equiv 0$, $G(z)$ *eine beliebige komplexe Funktion;*

A. 2. $F(z)\equiv G(z)\equiv 0$, $H(z)$ *eine beliebige komplexe Funktion;*

A. 3. $F(z)=\beta_1\gamma_1^2\psi(z)$, $G(z)=\beta_1\gamma_1\psi(z)$, $H(z)=\gamma_1\psi(z)$ $(\beta_1, \gamma_1 = konst.)$;

wobei $\psi(z)$ der Gleichung (6. 3) genügt.

A. 1.—A. 2. Die Fälle $F(z)\equiv H(z)\equiv L(z)\equiv 0$ und $F(z)\equiv G(z)\equiv L(z)\equiv 0$ liefern eben (e_1).

Im folgenden schließen wir diese trivialen Fälle aus.

A. 3. Die Funktionen **A. 3.** genügen der Gleichung (6. 1), wobei noch $L(z)\equiv 0$ und $K(z)$ beliebige komplexe Funktionen sind. Dieses Lösungssystem ist eben (e_2).

Damit ist der Fall **A.** erledigt, und da die Lösungen (e_1) und (e_2), wegen dem erwähnten Rollenwelchsel, alle die Fälle enthalten, wo mindestens eine der Funktionen $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$, $L(z)$ identisch Null ist, können wir des weiteren voraussetzen, daß keine dieser Funktionen identisch verschwindet.

B. Setzen wir nun die Funktion (6. 8) in (6. 6) ein, dann ergibt sich

(6. 11) $$\Delta(G, \beta_1 L)+\Delta(K, L) = \Delta(\beta_1 G, L)+\Delta(K, L) = \Delta(\beta_1 G+K, L) = 0.$$

Wir können hier den Fall $L(z)\equiv 0$ schon außer acht lassen, also folgt

(6. 12) $$\beta_1 G(z)+K(z) = \beta_2 L(z), \qquad (\beta_2 = \text{konst.}).$$

Aus (6. 1), (6. 8) und (6. 12) erhalten wir die Pexidersche Gleichung

(6. 13) $$F(z_1 * z_2) = \beta_2 L(z_1)\, L(z_2),$$

wo wir wieder die Fälle

B. 1. $$\beta_2 = 0$$

und

B. 2. $$\beta_2 \neq 0$$

unterscheiden.

B. 1. Wenn in (6. 13) $\beta_2 = 0$ ist, dann folgt $F(z) \equiv 0$. Weiter ist $L(z)$ eine beliebige komplexe Funktion und aus (6. 12) bzw. (6. 8) folgen

$$K(z) = -\beta_1 G(z), \quad H(z) = \beta_1 L(z),$$

wobei auch die Funktion $G(z)$ beliebig ist. Dieses Lösungssystem ist eben (e_3).

B. 2. Es sei jetzt in (6. 13) $\beta_2 \neq 0$. Dann erhalten wir (vgl. [20]) die Lösungen

$$F(z) = \beta_2 \gamma_3^2 \psi(z), \quad L(z) = \gamma_3 \psi(z), \qquad (\gamma_3 = \text{konst.}),$$

wobei $\psi(z)$ der Gleichung (6. 3) genügt. Wegen (6. 8) ist

$$H(z) = \beta_1 \gamma_3 \psi(z)$$

und aus (6. 12) folgt

$$K(z) = \beta_2 \gamma_3 \psi(z) - \beta_1 G(z),$$

wo $G(z)$ schon beliebig ist. Dieses Lösungssystem ist tatsächlich (e_4).

Damit ist der Fall **B.** schon erledigt und des weiteren setzen wir voraus, daß $H(z) \not\equiv \beta L(z)$ ist.

C. Wir können uns darüber leicht überzeugen, daß die Lösungen (e_5) und (e_6) die Gleichung (6. 1) *nur* mit den aufgeschriebenen Nebenbedingungen erfüllen, vorausgesetzt, daß die Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$, bzw. $\psi(z)$ und $\psi(z)\varphi(z)$ voneinander linear abhängig[1]) sind. Darum wollen wir nur so viel zeigen, daß sämtliche aus (6. 9) herrührenden Lösungen lineare Kombinationen der Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$, oder $\psi(z)$ und $\psi(z)\,\varphi(z)$ sind, wo $\varphi(z)$ bzw. $\psi(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ die Funktionalgleichungen (6. 2) bzw. (6. 3) befriedigen.

Setzen wir also (6. 9) in (6. 6) ein, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} \Delta(\beta_1 H + \beta_2 L, H) + \Delta(K, L) &= \Delta(\beta_2 L, H) + \Delta(K, L) = \\ = \Delta(-\beta_2 H, L) + \Delta(K, L) &= \Delta(K - \beta_2 H, L) = 0. \end{aligned}$$

Da $L(z) \not\equiv 0$ ist, folgt daraus

(6. 14) $$K(z) - \beta_2 H(z) = \beta_3 L(z), \qquad (\beta_3 = \text{konst.}).$$

---

[1]) Wenn die Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$, bzw. $\psi(z)$ und $\psi(z)\varphi(z)$ in der Lösung (e_5) bzw. (e_6) *voneinander linear abhängig* sind, d. h. mindestens eine der Gleichungen $\psi_1(z) \equiv 0$, $\psi_2(z) \equiv 0$, $\psi_1(z) \equiv \psi_2(z)$ bzw. $\varphi(z) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$ erfüllt ist, gilt auch die Gleichung $H(z) = L(z)$, was wir aber schon ausgeschlossen haben; die Lösungen (e_5) und (e_6) befriedigen aber natürlich auch in diesem Fall die Funktionalgleichung (6. 1).

Mit (6. 9) und (6. 14) ergibt sich aus (6. 1)

$$F(z_1 * z_2) = [\beta_1 H(z_1) + \beta_2 L(z_1)] H(z_2) + [\beta_2 H(z_1) + \beta_3 L(z_1)] L(z_2). \tag{6. 15}$$

Jetzt können wir auf Grund von (6. 15) schreiben:

$$\begin{gathered} F(z_1 * \zeta * z_2) = \\ = [\beta_1 H(z_1 * \zeta) + \beta_2 L(z_1 * \zeta)] H(z_2) + [\beta_2 H(z_1 * \zeta) + \beta_3 L(z_1 * \zeta)] L(z_2) = \\ = [\beta_1 H(z_1) + \beta_2 L(z_1)] H(z_2 * \zeta) + [\beta_2 H(z_1) + \beta_3 L(z_1)] L(z_2 * \zeta), \end{gathered}$$

also ist

$$\begin{cases} \Delta[\beta_1 H(z_1 * \zeta), \beta_1 H(z_2) + \beta_2 L(z_2)] + \\ + \Delta[L(z_1 * \zeta), \beta_2 H(z_2) + \beta_3 L(z_2)] = 0. \end{cases} \tag{6. 16}$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit $L(z)$, dann folgt

$$\begin{gathered} \Delta[H(z_1 * \zeta), \beta_1 H(z_2) + \beta_2 L(z_2), L(z_3)] + \\ + \Delta[L(z_1 * \zeta), \beta_2 H(z_2) + \beta_3 L(z_2), L(z_3)] = \\ = \Delta[\beta_1 H(z_1 * \zeta), H(z_2), L(z_3)] + \Delta[\beta_2 L(z_1 * \zeta), H(z_2), L(z_3)] = \\ = \Delta[\beta_1 H(z_1 * \zeta) + \beta_2 L(z_1 * \zeta), H(z_2), L(z_3)] = 0. \end{gathered}$$

Die Fälle $L(z) \equiv 0$ und $H(z) = \beta L(z)$, die schon früher ausgeschlossen wurden, können wir außer acht lassen. Darum ist

$$\beta_1 H(z_1 * z_2) + \beta_2 L(z_1 * z_2) = M_1(z_1) H(z_2) + M_2(z_1) L(z_2). \tag{6. 17}$$

Wegen der Symmetrie der linken Seite können wir auf der üblichen Weise die Gleichung

$$\Delta(M_1, H) + \Delta(M_2, L) = 0 \tag{6. 18}$$

aufschreiben. Wenn wir jetzt diese noch mit L „erweitern", ergibt sich

$$\Delta(M_1, H, L) = 0.$$

Da $L(z) \not\equiv 0$ und $H(z) \not\equiv \beta L(z)$ sind, folgt

$$M_1(z) = \beta_4 H(z) + \beta_5 L(z), \qquad (\beta_4, \beta_5 = \text{konst.}). \tag{6. 19}$$

Setzen wir jetzt dies in (6. 18) ein, so ist

$$\begin{gathered} \Delta(\beta_4 H + \beta_5 L, H) + \Delta(M_2, L) = \Delta(\beta_5 L, H) + \Delta(M_2, L) = \\ = \Delta(-\beta_5 H, L) + \Delta(M_2, L) = \Delta(M_2 - \beta_5 H, L) = 0. \end{gathered}$$

Wegen $L(z) \not\equiv 0$ erhalten wir

$$M_2(z) - \beta_5 H(z) = \beta_6 L(z), \qquad (\beta_6 = \text{konst.}). \tag{6. 20}$$

Aus (6. 19), (6. 20) und (6. 17) ergibt sich

$$\begin{cases} \beta_1 H(z_1 * z_2) + \beta_2 L(z_1 * z_2) = \\ = [\beta_4 H(z_1) + \beta_5 L(z_1)] H(z_2) + [\beta_5 H(z_1) + \beta_6 L(z_1)] L(z_2). \end{cases} \tag{6. 21}$$

Jetzt beweisen wir, daß man diese Gleichung auch bei beliebigen Konstanten $\beta_1, \ldots, \beta_6$ in eine der Gestalten

$$(6.22)\quad \begin{cases} \beta_1 H(z_1 * z_2) + \beta_2 L(z_1 * z_2) = \delta_1^2[\beta_1 H(z_1) + \beta_2 L(z_1)][\beta_1 H(z_2) + \\ \qquad + \beta_2 L(z_2)] - [\delta_2 H(z_1) + \delta_3 L(z_1)][\delta_2 H(z_2) + \delta_3 L(z_2)], \end{cases}$$

$$(6.23)\quad \begin{cases} \beta_1 H(z_1 * z_2) + \beta_2 L(z_1 * z_2) = [\beta_1 H(z_1) + \beta_2 L(z_1)][\delta_4 H(z_2) + \\ \qquad + \delta_5 L(z_2)] + [\beta_1 H(z_2) + \beta_2 L(z_2)][\delta_4 H(z_1) + \delta_5 L(z_1)] \end{cases}$$

umschreiben kann. Zu diesem Zweck vergleichen wir die Gleichungen (6. 21) und (6. 22) bzw. (6. 21) und (6. 23), dabei wird auch die vorausgesetzte lineare Unabhängigkeit der Funktionen $H(z)$ und $L(z)$ ausgenützt.

Wir betrachten zuerst die Gleichungen (6. 21) und (6. 22). Wie ersichtlich, wenn das Gleichungssystem

$$(6.24)\quad \begin{cases} \beta_1^2 \delta_1^2 - \delta_2^2 = \beta_4, \\ \beta_1 \beta_2 \delta_1^2 - \delta_2 \delta_3 = \beta_5, \\ \beta_2^2 \delta_1^2 - \delta_3^2 = \beta_6 \end{cases}$$

auch bei beliebigen Konstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ bezüglich den Unbekannten $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ auflösbar ist, dann können wir die Gleichung (6. 21) auch in der Form (6. 22) aufschreiben. Aus dem vorigen Gleichungssystem ergibt sich

$$(\beta_5 - \beta_1 \beta_2 \delta_1^2)^2 = \delta_2^2 \delta_3^2 = (\beta_4 - \beta_1^2 \delta_1^2)(\beta_6 - \beta_2^2 \delta_1^2),$$
$$\delta_1^2(\beta_1^2 \beta_6 + \beta_2^2 \beta_4 - 2\beta_1 \beta_2 \beta_5) = \beta_4 \beta_6 - \beta_5^2.$$

Wenn

$$(6.25)\quad \beta_1^2 \beta_6 + \beta_2^2 \beta_4 - 2\beta_1 \beta_2 \beta_5 \neq 0$$

ist, dann ist auch das Gleichungssystem (6. 24) bezüglich $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ nicht-trivialerweise ($|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| > 0$) auflösbar. Wenn aber $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ ist, ergibt sich auch $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$, d. h. laut (6. 21) wären die Funktionen $H(z)$ und $L(z)$ voneinander Linear abhängig. Dieser Fall ist aber schon erledigt. Bei dem Gleichungssystem (6. 24) beschränken wir uns nur auf einziges Lösungssystem.

Jetzt zeigen wir, daß man die Gleichung (6. 21) eben in die Form (6. 23) schreiben kann, wenn (6. 25) nicht erfüllt ist. Auf Grund von (6. 21) und (6. 23) bekommen wir das Gleichungssystem

$$(6.26)\quad \begin{cases} 2\beta_1 \delta_4 = \beta_4, \\ 2\beta_2 \delta_5 = \beta_6, \\ \beta_2 \delta_4 + \beta_1 \delta_5 = \beta_5. \end{cases}$$

Wir sehen, daß dieses Gleichungssystem nur dann erfüllt ist, wenn eben

$$2\beta_1 \beta_2 \beta_5 = \beta_1^2 \beta_6 + \beta_2^2 \beta_4$$

ist. Nach (6. 26) ist nämlich

$$2\beta_1 \beta_2 \beta_5 = 2\beta_1 \beta_2(\beta_2 \delta_4 + \beta_1 \delta_5) = \beta_1^2 \cdot 2\beta_2 \delta_5 + \beta_2^2 \cdot 2\beta_1 \delta_4 = \beta_1^2 \beta_6 + \beta_2^2 \beta_4.$$

Bei der Lösung von (6. 26) können wir den Fall $\beta_1=\beta_2=0$ außer acht lassen; wenn nämlich $\beta_1=\beta_2=0$ ist, folgt aus (6. 15)

$$F(z_1 * z_2) = \beta_3 L(z_1)\, L(z_2).$$

Diesen Fall haben wir aber in (e_3) und (e_4) behandelt [vgl. (6. 13)]. Das Gleichungssystem (6. 26) ist im Falle

$$|\beta_1|+|\beta_2|>0$$

auflösbar, womit es bewiesen ist, daß man die Gleichung (6. 21) in eine der Gestalten (6. 22) und (6. 23) umschreiben kann.

Jetzt betrachten wir die Gleichung (6. 22). Wenn $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$ ist, folgt $\beta_1 H(z) = -\beta_2 L(z)$, aber diesen Fall haben wir schon ausgeschlossen. Es sei jetzt in (6. 22) $\delta_1=0$, oder $\delta_2=\delta_3=0$, dann folgt aus (6. 22)

$$\beta_1 H(z)+\beta_2 L(z) = \gamma\psi_1(z) \qquad (\gamma=\text{konst.}). \tag{6. 27}$$

Hier unterscheiden wir zwei Unterfälle: $\beta_1\neq 0$ und $\beta_1=0$.

Wenn $\beta_1\neq 0$ ist, erhalten wir nach den Formeln (6. 1), (6. 9) und (6. 14) die Pexidersche Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2)-\frac{\gamma^2}{\beta_1}\psi_1(z_1 * z_2) = \left(\beta_3-\frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right)L(z_1)\,L(z_2).$$

Es sei hier $\beta_3-\beta_2^2/\beta_1\neq 0$. Dann folgen die Lösungen

$$L(z)=\delta\psi_2(z), \qquad (\delta\neq 0,\ \text{konst.}),$$

$$F(z) = \frac{\gamma^2}{\beta_1}\psi_1(z)+\delta^2\left(\beta_3-\frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right)\psi_2(z).$$

Das bedeutet aber laut (6. 27), daß

$$H(z) = \frac{\gamma}{\beta_1}\psi_1(z)-\frac{\beta_2\delta}{\beta_1}\psi_2(z)$$

ist. Schließlich gelten auch

$$K(z) = \frac{\beta_2\gamma}{\beta_1}\psi_1(z)+\left(\beta_3\delta-\frac{\beta_2^2\delta}{\beta_1}\right)\psi_2(z)$$

$$G(z) = \gamma\psi_1(z)$$

laut (6. 14) bzw. (6. 9). Diese Lösungen haben tatsächlich die Form (e_5), womit auch dieser Fall erledigt ist.

Falls $\beta_3-\beta_2^2/\beta_1 = 0$ ist, erhalten wir einerseits die Lösung $F(z)=\gamma^2\psi(z)/\beta_1$, andererseits aus (6. 14), (6. 27) und (6. 9) die Formel

$$K(z) = \beta_2 H(z)+\frac{\beta_2^2}{\beta_1}L(z) = \frac{\beta_2\gamma}{\beta_1}\psi(z) = \frac{\beta_2}{\beta_1}G(z),$$

die zu (6. 8) analog ist. Wegen der erwähnten Symmetrie enthält (e_4) auch diesen Fall.

Es sei jetzt in (6. 27) $\beta_1=0$. Da $\beta_2\neq 0$ nach der Ungleichung $|\beta_1|+|\beta_2|>0$ besteht, bekommen wir auf Grund der Formeln (6. 1), (6. 9), (6. 27) und (6. 14) die Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2) = \gamma\psi(z_1)H(z_2) + \gamma\psi(z_2)H(z_1) + \frac{\beta_3\gamma^2}{\beta_2^2}\psi(z_1)\psi(z_2),$$

die wir wegen $\psi(z_1)\psi(z_2) \neq 0$, was aus der Gruppeneigenschaft von Q_0 folgt, in eine Pexidersche Gleichung umschreiben können:

$$\frac{F(z_1 * z_2)}{\psi(z_1 * z_2)} - \frac{\beta_3\gamma^2}{\beta_2^2} = \gamma\frac{H(z_1)}{\psi(z_1)} + \gamma\frac{H(z_2)}{\psi(z_2)}.$$

Daraus folgt, daß die Funktionen $H(z)$ und $F(z)$, und laut der Formeln (6. 27), (6. 9) bzw. (6. 14) auch die Funktionen $L(z)$, $G(z)$ bzw. $K(z)$ je eine lineare Kombination der Funktionen $\psi(z)$ und $\psi(z)\,\varphi(z)$ sind, d. h. die vorliegenden Funktionen haben tatsächlich die Form (e_6).

Im weiteren können wir den Fall (6. 27) außer acht lassen.

Es seien jetzt in (6. 22) $\delta_1 \neq 0$ und $|\delta_2| + |\delta_3| > 0$ und wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$S_1(z) \overset{\text{def}}{=} \delta_1[\delta_2 H(z) + \delta_3 L(z)] \not\equiv 0,$$

$$C_1(z) \overset{\text{def}}{=} \delta_1^2[\beta_1 H(z) + \beta_2 L(z)].$$

Damit geht (6. 22) in (6. 4) über.

Wenn die Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} \delta_1\delta_2 & \delta_1\delta_3 \\ \delta_1^2\beta_1 & \delta_1^2\beta_2 \end{vmatrix} \tag{6. 28}$$

verschwindet, dann müssen auch die Funktionen $S_1(z)$ und $C_1(z)$ voneinander linear abhängig sein. Diesen Fall, woraus die Gleichung (6. 27) folgt, können wir außer acht lassen. Falls aber die Determinante (6. 28) von Null verschieden ist, sind die Funktionen $H(z)$ und $L(z)$, und wegen (6. 9) und (6. 14) auch die Funktionen $G(z)$ und $K(z)$ lineare Kombinationen der voreinander linear unabhängigen Funktionen $S_1(z)$ und $C_1(z)$. Weiter sehen wir aus (6. 15), daß auch die Funktion $F(z)$ eine lineare Kombination von $S_1(z)$ und $C_1(z)$ ist, was nach den Substitutionen $z_1 = z$ und $z_2 = z_0$, wobei $z * z_0 = z$ für alle Elemente z der Gruppe Q_0 gilt, sofort folgt. Da aber die der Funktionalgleichung (6. 4) genügenden Funktionen $S_1(z)$ und $C_1(z)$ nach dem Satz 4. lineare Kombinationen der voneinander linear unabhängigen Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$, oder $\psi(z)$ und $\psi(z)\,\varphi(z)$ sind[2]), wobei $\varphi(z)$ bzw. $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ den Cauchyschen Funktionalgleichungen (6. 2) bzw. (6. 3) genügen, sind auch die Funktionen $F(z)$, $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$ und $L(z)$ lineare Kombinationen derselben Funktionen, d. h.

$$\begin{cases} F(z) = \alpha_1\psi_1(z) + \alpha_2\psi_2(z), \\ G(z) = \alpha_3\psi_1(z) + \alpha_4\psi_2(z), \\ H(z) = \alpha_5\psi_1(z) + \alpha_6\psi_2(z), \\ K(z) = \alpha_7\psi_1(z) + \alpha_8\psi_2(z), \\ L(z) = \alpha_9\psi_1(z) + \alpha_{10}\psi_2(z), \end{cases} \tag{6. 29}$$

[2]) Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $S_1(z)$ und $C_1(z)$ müssen die Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ bzw. $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ die Ungleichungen $\psi_1(z) \not\equiv 0$, $\psi_2(z) \not\equiv 0$, $\psi_1(z) \not\equiv \psi_2(z)$ bzw. $\varphi(z) \not\equiv 0$, $\psi(z) \not\equiv 0$ befriedigen. Das folgt aus dem Satz 4. sofort.

oder

$$(6.30)\qquad \begin{cases} F(z) = \psi(z)[\alpha_1\varphi(z)+\alpha_2], \\ G(z) = \psi(z)[\alpha_3\varphi(z)+\alpha_4], \\ H(z) = \psi(z)[\alpha_5\varphi(z)+\alpha_6], \\ K(z) = \psi(z)[\alpha_7\varphi(z)+\alpha_8], \\ L(z) = \psi(z)[\alpha_9\varphi(z)+\alpha_{10}] \end{cases}$$

sind. Wenn wir jetzt diese Lösungen in (6. 1) einsetzen und auch die schon erwähnte lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ bzw. $\psi(z)$ und $\psi(z)\,\varphi(z)$ ausnützen, erhalten wir tatsächlich (e_5) bzw. (e_6) und für die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_{10}$ die im Satz 6. aufgeschriebenen Einschränkungen.

Schließlich betrachten wir die Gleichung (6. 23). Den Fall $\delta_4=\delta_5=0$ können wir außer acht lassen, weil sonst $\beta_1 H(z)+\beta_2 L(z)=0$ wäre, was wir aber schon im vorigen ausgeschlossen haben. Es sei also

$$|\delta_4|+|\delta_5|>0,$$

und wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$S_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1 H(z)+\beta_2 L(z) \not\equiv 0,$$

$$C_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_4 H(z)+\delta_5 L(z),$$

womit (6. 23) tatsächlich in (6. 5) übergeht.

Falls die Determinante

$$(6.31)\qquad D_2=\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \delta_4 & \delta_5 \end{vmatrix}$$

verschwindet, dann sind die Funktionen $S_2(z)$ und $C_2(z)$ voneinander linear abhängig; woraus wieder die Gleichung (6. 27) folgt; diesen Fall können wir aber außer acht lassen. Wenn aber die Determinante (6. 31) von Null verschieden ist, sind die Funktionen $H(z)$ und $L(z)$, wegen (6. 9) und (6. 14) auch die Funktionen $G(z)$ und $K(z)$ lineare Kombinationen von $S_2(z)$ und $C_2(z)$. Ähnlich wie im vorigen folgt aus (6. 15), daß auch $F(z)$ von den Funktionen $S_2(z)$ und $C_2(z)$ linear abhängt. Da die der Funktionalgleichung (6. 5) genügenden Funktionen $S_2(z)$ und $C_2(z)$ nach dem Satz 5. je eine lineare Kombination der voneinander linear unabhängigen Funktionen $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$, oder $\psi(z)$ und $\psi(z)\,\varphi(z)$ sind[3]), wobei $\varphi(z)$ bzw. $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ den Cauchyschen Funktionalgleichungen (6. 2) bzw. (6. 3) genügen, haben auch die Funktionen $F(z)$, $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$ und $L(z)$ die Formen (6. 29) oder (6. 30). Die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$ müssen natürlich wieder den aufgeschriebenen Gleichungen genügen.

Damit ist der Satz 6. vollständig bewiesen.

[3]) Die Fußnote 2) ist auch hier sinngemäß gültig.

§ 7. Eine weitere spezielle Funktionalgleichung

In den folgenden Paragraphen brauchen wir auch die Lösungen der Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1)\, H(z_2) + K(z_1), \tag{7. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0'; \ F(z), G(z), H(z), K(z)\colon\ Q_0' \to Q],$$

die auch ein Spezialfall der Gleichung (2. 1) ist. Trotzdem können wir die Lösungen der vorliegenden Gleichung einfacher bekommen, wenn wir sie wieder lösen, als wenn wir die Lösungen von (2. 1) spezialisieren wollten. Nämlich sind diese Spezialisierungen wegen der großen Anzahl der Fallunterscheidungen wesentlich komplizierter. Auch unsere Voraussetzungen sind etwas schwächer; *Q_0' ist eine beliebige Abelsche Halbgruppe* aber *mit der speziellen Eigenschaft: Q_0' besitzt auch ein festes Element a, für das die Gleichung $a * z = \zeta$ auch bei beliebigem ζ* (mindestens) *eine Lösung hat.*

Bezüglich der Funktionalgleichung (7. 1) weisen wir noch auch auf die Arbeiten [1] (vgl. §. 3. 1. 3.), [2], [4] und [7] hin, die diese Gleichung bzw. deren Verallgemeinerungen unter anderen (etwas stärkeren) Bedingungen behandeln.

Es gilt der

Satz 7. *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf Q_0' geltenden Funktionalgleichung* (7. 1) *sind die folgenden Funktionen*:

(f₁)
$$\begin{aligned} &F(z) \equiv \alpha_1, \\ &G(z) \text{ beliebige komplexe Funktion}, \\ &H(z) \equiv \alpha_2, \\ &K(z) = \alpha_1 - \alpha_2 G(z); \end{aligned}$$

(f₂)
$$\begin{aligned} F(z) &= \alpha_1[\varphi(z) + 2\alpha_2] + \alpha_3, \\ G(z) &\equiv \alpha_1, \\ H(z) &= \varphi(z) + \alpha_2, \\ K(z) &= \alpha_1\varphi(z) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3; \end{aligned}$$

(f₃)
$$\begin{aligned} F(z) &= \alpha_1\alpha_2^2\psi(z) + \alpha_3, \\ G(z) &= \alpha_1\alpha_2\psi(z), \\ H(z) &= \alpha_2\psi(z) - \alpha_4, \\ K(z) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_4\psi(z) + \alpha_3; \end{aligned}$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ beliebige, den Cauchyschen Funktionalgleichungen[4]) (2. 2) *und* (2. 3) *genügende komplexe Funktionen bezeichnen und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ beliebige komplexe Konstanten sind. Es gibt keine andere Lösung.*

Beweis. Auf der bekannten Weise folgt aus (7. 1) die Gleichung

$$\Delta(G, H) + \Delta(K, 1) = 0, \tag{7. 2}$$

die wir noch mit 1 „erweitern":

$$\Delta(G, H, 1) = 0.$$

[4]) Die Funktionalgleichungen (2.2) und (2.3) haben dieselben Formen wie (6.2) und (6.3), aber sie sind auf Q_0' gültig (vgl. § 2.).

Diese Gleichung besteht nur in den Fällen

$$\begin{matrix} \textbf{A.} \\ \textbf{B.} \end{matrix} \qquad \left.\begin{aligned} H(z) &\equiv \alpha_2, \\ G(z) &= \beta_2 H(z) + \beta_1 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha_2, \beta_1, \beta_2 = konst.).$$

A. Falls $H(z) \equiv \alpha_2$ ist, ergibt sich aus (7. 2)

$$\Delta(G, \alpha_2) + \Delta(K, 1) = \Delta(\alpha_2 G + K, 1) = 0,$$

woraus $K(z) + \alpha_2 G(z) = \alpha_1$ ($\alpha_1 =$ konst.) folgt. Damit geht die Gleichung (7. 1) in $F(z_1 * z_2) \equiv \alpha_1$ über, also ist auch $F(z)$ identisch konstant, was eben aus der speziellen Eigenschaft der Halbgruppe Q_0' folgt. Das ist eben das Lösungssystem (f_1), womit der Fall **A.** erledigt ist.

B. Wenn $G(z) = \beta_2 H(z) + \beta_1$ besteht, erhalten wir aus (7. 2)

$$\Delta(\beta_2 H + \beta_1, H) + \Delta(K, 1) = \Delta(K - \beta_1 H, 1) = 0.$$

Daraus ergibt sich $K(z) - \beta_1 H(z) = \beta_3$ ($\beta_3 =$ konst.), womit die Gleichung (7. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = [\beta_2 H(z_1) + \beta_1] H(z_2) + \beta_1 H(z_1) + \beta_3 \tag{7. 3}$$

übergeht. Jetzt gibt es zwei Unterfälle.

B. 1. Wenn in (7. 3) $\beta_2 = 0$ ist, dann erhalten wir aus (7. 3) die Pexidersche Gleichung

$$F(z_1 * z_2) = \beta_1 H(z_1) + \beta_1 H(z_2) + \beta_3,$$

deren Lösungen (vgl. [20])

$$F(z) = \beta_1[\varphi(z) + 2\alpha_2] + \beta_3, \quad H(z) = \varphi(z) + \alpha_2 \qquad (\alpha_2 = \text{konst.})$$

sind, wobei $\varphi(z)$ der Cauchyschen Gleichung (2. 2) genügt. Mit den Bezeichnungen $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_3 = \alpha_3$ ist das eben das Lösungssystem (f_2).

B. 2. Es sei jetzt in (7. 3) $\beta_2 \neq 0$. Dann ergibt sich die andere Pexidersche Funktionalgleichung

$$\beta_2 F(z_1 * z_2) + \beta_1^2 - \beta_2 \beta_3 = [\beta_2 H(z_1) + \beta_1][\beta_2 H(z_2) + \beta_1],$$

die die Lösungen

$$F(z) = \beta_2 \alpha_2^2 \psi(z) + \beta_3 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2}, \quad H(z) = \alpha_2 \psi(z) - \frac{\beta_1}{\beta_2} \qquad (\alpha_2 = \text{konst.})$$

besitzt (vgl. [20]), wobei $\psi(z)$ der Cauchyschen Gleichung (2. 3) genügt. Daraus folgen

$$G(z) = \beta_2 \alpha_2 \psi(z), \quad K(z) = \beta_1 \alpha_2 \psi(z) + \beta_3 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2}.$$

Mit den Bezeichnungen $\beta_2 = \alpha_1$, $\beta_3 - \beta_1^2/\beta_2 = \alpha_3$, $\beta_1/\beta_2 = \alpha_4$ ist das eben das Lösungssystem (f_3).

Damit ist auch der Satz 7. vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 31. Januar 1963.)