Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des Fourierschen Integrals

Von JOSEF MATUŠŮ (Prag)

1. In diesem Artikel werden speziell die zwei nachstehend angeführten Integrale betrachtet:

$$D(t)=\int_0^d \frac{f(t+x)+f(t-x)-2B}{x}\,dx, \tag{1}$$

$$F(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos y\,(x-t)\,dx\right)dy. \tag{2}$$

In (1) ist $0<d<+\infty$, $B\in E_1$ und das Integral wird im weiteren als *Dinisches Integral* der Funktion f (im Punkte $t\in E_1$) bezeichnet. Das Integral in (2) ist das wohlbekannte *Fouriersche Integral* der Funktion f (im Punkte $t\in E_1$).

Das Integral (2) konvergiert (wie ein Lebesguesches oder wie ein uneigentliches Integral) dann und nur dann, wenn $\lim\limits_{A\to+\infty} F_A(t)$ mit

$$F_A(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos y\,(x-t)\,dx\right)dy \qquad (0<A<+\infty) \tag{3}$$

als endlicher Grenzwert existiert, worauf dann $F(t)=\lim\limits_{A\to+\infty} F_A(t)$. Ohne es immer anzuführen wollen wir an dieser Stelle vereinbaren, daß mit A eine stetige Variable bezeichnet wird, deren Werte endlich und positiv sind.

Um die Konvergenz des Integrals (3) zu garantieren, wird es notwendig sein, die Funktion f gewissen Einschränkungen zu unterwerfen. Wir begnügen uns im weiteren mit den folgenden zwei Fällen. Fall I: f ist summierbar im Intervall $(-\infty,+\infty)$, d. h. $f\in L(-\infty,+\infty)$. Fall II: $f\in L(-h,h)$ für jedes $h\in(0,+\infty)$; ferner gilt $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$ und es existiert eine endliche und positive Zahl h_0, so daß f in den beiden Intervallen $(-\infty,-h_0\rangle$ und $\langle h_0,+\infty)$ von beschränkter Variation ist. Gilt für f der Fall I, so ist das innere sowie auch das äußere Integral in (3) ein konvergentes Lebesguesches Integral. Wenn aber für f der Fall II in Frage kommt, so konvergieren beide von diesen Integralen mindestens im verallgemeinerten Sinne, d. h. als uneigentliche Integrale (deren Singularitäten höchstens mit ihren Integrationsgrenzen zusammenfallen) nicht absolut. Kurzgefaßt wird ein jedes solches Integral im weiteren als ein konvergentes verallgemeinertes Integral bezeichnet. Wenn also für f der Fall I bzw. II gilt, so ist das Integral (3) immer konvergent (entweder wie ein Lebesguesches oder wie ein verallgemeinertes Integral). Sein Wert ist in beiden Fällen

$$F_A(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t+x) \frac{\sin Ax}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} [f(t+x)+f(t-x)] \frac{\sin Ax}{x} dx. \tag{4}$$

Auch die Integrale in (4) sind eventuell konvergente verallgemeinerte Integrale.

Für f soll nun entweder Fall I oder Fall II gelten. Es sei $t \in E_1$ und der zugehörige Funktionswert $f(t)$ endlich. Konvergiert dann das Integral (1) für $B = f(t)$ wie ein Lebesguesches, so konvergiert auch das Integral (2) und sein Wert ist gleich $f(t)$. Diese Tatsache ist allgemein bekannt und ihr Beweis bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten. Für die weiteren Ausführungen wird es notwendig sein, diesen Beweis hier in Kürze zu streifen. Wird

$$F_A(t, d) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{d} [f(t+x)+f(t-x)] \frac{\sin Ax}{x} dx \tag{5}$$

gesetzt, so folgt

$$F_A(t, d) - f(t) \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{d} \frac{\sin Ax}{x} dx = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{d} [f(t+x)+f(t-x)] \frac{\sin Ax}{x} dx - f(t) \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{d} \frac{\sin Ax}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{d} \frac{f(t+x)+f(t-x)-2f(t)}{x} \sin Ax \, dx.$$

Auf Grund der obigen Voraussetzung über das Dinische Integral folgt dann aus (6) bei Benützung des bekannten Riemann—Lebesgueschen Lemmas

$$\lim_{A \to +\infty} \left(F_A(t, d) - f(t) \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{d} \frac{\sin Ax}{x} dx \right) = 0. \tag{7}$$

Da weiter

$$\lim_{A \to +\infty} \left(F_A(t) - F_A(t, d) \right) = 0, \tag{8}$$

so folgt schließlich aus (7), (8)

$$\lim_{A \to +\infty} F_A(t) = F(t) = f(t) \frac{2}{\pi} \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{0}^{d} \frac{\sin Ax}{x} dx = f(t). \tag{9}$$

Für f soll wieder entweder Fall I oder Fall II gelten. Wieder sei $t \in E_1$ und der zugehörige Funktionswert $f(t)$ endlich. Ist dann das Dinische Integral (1) für $B = f(t)$ ein konvergentes verallgemeinertes Integral (mit der „unangenehmen" Integrationsgrenze Null), das aber kein Lebesguesches ist, so fragt es sich, ob auch in einem solchen Falle das Fouriersche Integral (2) der Funktion f im Punkte $t \in E_1$ immer konvergiert. Im Abschnitt 3 wird im Gegensatz dazu gezeigt, daß dann das Fouriersche Integral divergieren kann.

2. Wir beginnen mit folgendem

Lemma. *Die Funktion g sei im Intervall $(a, b)\,(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$ meßbar, beschränkt, nicht negativ und nicht abnehmend. Ferner sei $f \in L(a', b)$ für jedes $a' \in (a, b)$ und $\int_a^b f(t)\,dt$ ein konvergentes verallgemeinertes Integral. Es ist dann $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ auch ein konvergentes verallgemeinertes Integral.*

Beweis. Für $a < a' < a'' < b$ gilt

$$\left| \int_{a'}^{a''} f(t) g(t)\,dt \right| = g(a'') \cdot \left| \int_c^{a''} f(t)\,dt \right| \qquad (a' \leqq c \leqq a''). \tag{10}$$

In (10) ist $g(a'')$ kleiner als eine gewisse Konstante und das Integral rechts hat folgende Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $C \in (a, b)$, so daß für $a < c \leqq a'' < C$ die Ungleichung $\left| \int_b^{a''} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$ gilt. Auf Grund des Bolzano—Cauchyschen allgemeinen Konvergenzprinzips folgt dann die Gültigkeit des angeführten Lemmas.

Es sei nun z. B. $0 = a < b \leqq +\infty$. Wir setzen $g(t) = \sin At$ für $t \in (0, b)$. Die Funktion f soll alle im Lemma angeführten Voraussetzungen erfüllen. Im Intervall $(0, b)$ ist g nicht negativ und nicht abnehmend bzw. so beschaffen, daß mindestens eine von diesen Voraussetzungen nicht erfüllt ist (immer ist g aber beschränkt). Gilt das erste, so folgt auf Grund des bewiesenen Lemmas, daß das Integral $\int_0^b f(t) \sin At\,dt$ ein konvergentes verallgemeinertes Integral ist. Andernfalls ist g nicht negativ und nicht abnehmend im Intervall $(0, T/4)$, wobei T die primitive Periode der Funktion g bedeutet. Gewiß ist auch $\int_0^{T/4} f(t)\,dt$ ein konvergentes verallgemeinertes Integral, so daß auf Grund des Lemmas auch das Integral $\int_0^{T/4} f(t) \sin At\,dt$ im verallgemeinerten Sinne konvergiert. Schließlich ist $fg \in L(T/4, b)$. Damit ist die Konvergenz des verallgemeinerten Integrals $\int_0^b f(t) \sin At\,dt$ auch in diesem Falle gesichert.

Nach dem Riemann—Lebesgueschen Lemma gilt

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^b f(t) \sin At\,dt = 0 \tag{11}$$

immer dann, wenn $f \in L(0, b)$. Wir wollen nun annehmen, daß $f \notin L(0, b)$, aber das Integral $\int_0^b f(t)\,dt$ (mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze) soll wie ein verallgemeinertes Integral konvergieren. Es fragt sich, ob auch in einem solchen Falle die Gleichung (11) gilt. Das folgende Beispiel wird uns das Gegenteil zeigen.

Beispiel 1. Es sei $d_n = 4\pi/(n-1)!$ $(n=1, 2, \ldots)$. Ferner sei $s_n = 4\pi e - \sum_{i=1}^{n} d_i = 4\pi e - w_n$ $(n=0, 1, \ldots,$ also $s_0 = 4\pi e,$ $w_0 = 0)$. Im Intervall $\langle s_n, s_{n-1}\rangle$ sei $f(t) = (n-1)! \sin[n!(4\pi e - t)]$ $(n=1, 2, \ldots)$. Es ist $f(s_n) = (n-1)! \sin(n! w_n) = (n-1)! \sin[n!\{4m\pi/(n-1)!\}] = 0$, m ganzzahlig. Da auch $f(s_0) = f(4\pi e) = 0$, so ist $f(s_n) = 0$ $(n=0, 1, \ldots)$. Somit ist f stetig im Intervall $(0, 4\pi e\rangle$ (es ist nämlich $\lim_{n\to+\infty} s_n = 4\pi e - w_\infty = 4\pi e - 4\pi(1 + 1/1! + 1/2! + \ldots) = 4\pi e - 4\pi e = 0$).

Wir setzen $G(t) = \int_t^{4\pi e} f(x)\,dx$, $0 < t \leqq 4\pi e$. Für ein gewisses n sei $s_n < t \leqq s_{n-1}$ (bei fest gewähltem t). Es ist dann für $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{s_k}^{s_{k-1}} f(t)\,dt = \int_{s_k}^{s_{k-1}} (k-1)! \sin[k!(4\pi e - t)]\,dt =$$

$$= \int_{4\pi e - s_{k-1}}^{4\pi e - s_k} (k-1)! \sin(k!\,x)\,dx = \left[-\frac{1}{k}\cos(k!\,x)\right]_{w_{k-1}}^{w_k} =$$

$$= \frac{1}{k}[\cos(k!\,w_{k-1}) - \cos(k!\,w_k)] = \frac{2}{k}\sin\left[\frac{k!}{2}(w_k + w_{k-1})\right]\sin\left[\frac{k!}{2}(w_k - w_{k-1})\right] =$$

$$= \frac{2}{k}\sin\left[\frac{k!}{2}(w_k + w_{k-1})\right]\sin\left(\frac{k!}{2}d_k\right) = 0,$$

so daß

$$G(t) = \int_t^{4\pi e} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{s_k}^{s_{k-1}} + \int_t^{s_{n-1}} = \int_t^{s_{n-1}} f(x)\,dx =$$

$$= \int_t^{s_{n-1}} (n-1)! \sin[n!(4\pi e - x)]\,dx =$$

$$= \int_{4\pi e - s_{n-1}}^{4\pi e - t} (n-1)! \sin(n!\,y)\,dy = \left[-\frac{1}{n}\cos(n!\,y)\right]_{w_{n-1}}^{4\pi e - t} =$$

$$= \frac{1}{n}[\cos(n!\,w_{n-1}) - \cos\{n!(4\pi e - t)\}]$$

und

$$|G(t)| \leqq \frac{2}{n}. \tag{12}$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\lim_{t\to 0+} G(t)=0. \tag{13}$$

Das verallgemeinerte Integral $\int\limits_0^{4\pi e} f(t)\,dt$ ist also konvergent und sein Wert ist gleich Null. Es wird sich zeigen, daß dieses Integral kein Lebesguesches ist.

Ist $n>3$, so folgt auf Grund der bekannten Restabschätzung der Reihe für die Zahl e, daß

$$\begin{aligned} w_\infty - w_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{4\pi}{i!} = \\ &= 4\pi\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\right)\right] \leqq \frac{4\pi}{(n-1)(n-1)!}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir betrachten weiter das Integral $\int\limits_0^{s_n} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt$, $n \geqq 0$, wobei V entweder 1 oder 1/2 ist. Es sei $c\in(0, s_n\rangle$. Im Intervall $\langle c, s_n\rangle$ kann die partielle Integration angewandt werden:

$$\int\limits_c^{s_n} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt = [-G(t)\sin(Vn!\,t)]_c^{s_n} + \int\limits_c^{s_n} G(t)\,Vn!\cos(Vn!\,t)\,dt. \tag{15}$$

Wir haben bewiesen (siehe Lemma), daß das verallgemeinerte Integral $\int\limits_0^{s_n} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt$ konvergiert. Es existiert somit der endliche Grenzwert $\lim\limits_{c\to 0+}\int\limits_c^{s_n} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt = \int\limits_0^{s_n} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt$. Da aber auch der Grenzwert $\lim\limits_{c\to 0+}\left[-G(t)\sin(Vn!\,t)\right]_c^{s_n} = -G(s_n)\sin(Vn!\,s_n)$ endlich ist (siehe (13)), so folgt aus (15), daß auch $\int\limits_0^{s_n} G(t)\,Vn!\cos(Vn!\,t)\,dt$ ein konvergentes verallgemeinertes Integral ist, und daß

$$\int\limits_0^{s_n} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt = -G(s_n)\sin(Vn!\,s_n) + \int\limits_0^{s_n} G(t)\,Vn!\cos(Vn!\,t)\,dt \tag{16}$$

gilt. Wir setzen

$$I_n = -G(s_n)\sin(Vn!\,s_n), \tag{17}$$

$$J_n = \int\limits_0^{s_n} G(t)\,Vn!\cos(Vn!\,t)\,dt. \tag{18}$$

Es ist $|I_n| \leqq |G(s_n)|$; da aber $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0^+$, so folgt aus dieser Ungleichung und aus (13), daß auch

$$(19) \qquad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

gilt.

Ist $c \in (0, s_n\rangle$, so ist $\int\limits_c^{s_n} G(t)\, Vn! \cos(Vn!\, t)\, dt$ ein konvergentes Lebesguesches Integral. Aus (12) folgt $|G(t)| \leqq 2/(n+1)$ für $t \in (s_{n+1}, s_n\rangle$. Diese Ungleichung bleibt gewiß auch für alle $t \in \langle c, s_n\rangle$ erhalten. Es wird somit

$$(20) \qquad \left| \int\limits_c^{s_n} G(t)\, Vn! \cos(Vn!\, t)\, dt \right| \leqq \frac{2Vn!}{n+1}(s_n - c).$$

Für $n > 3$ folgt dann durch Grenzübergang aus (20) (bei Benützung von (14))

$$(21) \qquad |J_n| = \left| \lim_{c\to 0+} \int\limits_c^{s_n} G(t)\, Vn! \cos(Vn!\, t)\, dt \right| \leqq \frac{2Vn!}{n+1} s_n = \frac{2Vn!}{n+1}(4\pi e - w_n) =$$

$$= \frac{2Vn!}{n+1}(w_\infty - w_n) \leqq \frac{2Vn!}{n+1} \frac{4\pi}{(n-1)(n-1)!} \leqq \frac{2Vn!}{n} \frac{4\pi}{(n-1)(n-1)!} = \frac{8V\pi}{n-1}.$$

Aus (21) folgt dann

$$(22) \qquad \lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

Weiter sei

$$(23) \qquad L_n = \int\limits_{s_{n-1}}^{4\pi e} f(t) \sin(Vn!\, t)\, dt.$$

Für $n > 1$ ist

$$(24) \qquad L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} (k-1)! \sin[k!\,(4\pi e - t)] \sin(Vn!\, t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)! \sin(k!\, 4\pi e) \int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} \cos(k!\, t) \sin(Vn!\, t)\, dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)! \cos(k!\, 4\pi e) \int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} \sin(k!\, t) \sin(Vn!\, t)\, dt.$$

Wir setzen

$$(25) \qquad M = \int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} \cos(k!\, t) \sin(Vn!\, t)\, dt, \quad N = \int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} \sin(k!\, t) \sin(Vn!\, t)\, dt.$$

Es wird dann $\left(j=\sqrt{-1}\right)$

$$M+jN=\int_{s_k}^{s_{k-1}} \sin(Vn!\,t)e^{jk!\,t}\,dt = \tag{26}$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\int_{s_k}^{s_{k-1}} e^{j(Vn!+k!)t}\,dt-\int_{s_k}^{s_{k-1}} e^{-j(Vn!-k!)t}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2(Vn!+k!)}\left[e^{j(Vn!+k!)s_k}-e^{j(Vn!+k!)s_{k-1}}\right]+$$

$$+\frac{1}{2(Vn!-k!)}\left[e^{-j(Vn!-k!)s_k}-e^{-j(Vn!-k!)s_{k-1}}\right].$$

Mit $s_{k-1}-s_k=d_k=4\pi/(k-1)!$ geht (26) in

$$M+jN=\frac{1}{2(Vn!+k!)}e^{j(Vn!+k!)s_k}\left(1-e^{j(Vn!+k!)d_k}\right)+ \tag{27}$$

$$+\frac{1}{2(Vn!-k!)}e^{-j(Vn!-k!)s_k}\left(1-e^{-j(Vn!-k!)d_k}\right)$$

über. Wird noch

$$(Vn!\pm k!)\,d_k=\frac{Vn!\pm k!}{(k-1)!}4\pi=\begin{cases}4m\pi \text{ für } V=1, \ (m \text{ ganzzahlig}),\\ 2m\pi \text{ für } V=\frac{1}{2}\end{cases}$$

berücksichtigt, so folgt aus (27), daß $M+jN=0$ ist, d. h. $M=N=0$. Aus (24), (25) folgt dann $L_n=0$, d. h.

$$\lim_{n\to+\infty} L_n=0. \tag{28}$$

Schließlich ist für $n\geqq 1$

$$K_n=\int_{s_n}^{s_{n-1}} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt=\int_{s_n}^{s_{n-1}}(n-1)!\sin[n!\,(4\pi e-t)]\sin(Vn!\,t)\,dt= \tag{29}$$

$$=(n-1)!\sin(n!\,4\pi e)\int_{s_n}^{s_{n-1}}\cos(n!\,t)\sin(Vn!\,t)\,dt-$$

$$-(n-1)!\cos(n!\,4\pi e)\int_{s_n}^{s_{n-1}}\sin(n!\,t)\sin(Vn!\,t)\,dt.$$

Durch einfache Rechnung (bei der mit Vorteil der Vorgang zur Berechnung der Integrale (25) angewandt werden kann) wird bestätigt, daß

$$K_n=\begin{cases}\pi\cos(n!\,4\pi e) & \text{für } V=1,\\ 0 & \text{für } V=\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{30}$$

Aus (16), (17), (18), (23), (29) und (30) folgt dann für $n > 1$

$$(31) \qquad \int_0^{4\pi e} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt = \int_0^{s_n} + \int_{s_n}^{s_{n-1}} + \int_{s_{n-1}}^{4\pi e} =$$

$$= I_n + J_n + K_n + L_n = \begin{cases} I_n + J_n + L_n + \pi\cos(n!\,4\pi e) & \text{für } V = 1, \\ I_n + J_n + L_n & \text{für } V = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Betrachten wir den Fall $V = 1$ näher. Es ist $e = \sum_{i=0}^{n} 1/i! + \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/i!$ und deshalb $n!\,4\pi e = 4\pi\,n! \sum_{i=0}^{n} 1/i! + 4\pi\,n! \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/i! = 4\pi A_n + 4\pi B_n$, wobei $A_n = n! \sum_{i=1}^{n} 1/i!$ eine ganze Zahl ist, und $0 < B_n = n! \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/i! \leqq n!/n \cdot n! = 1/n$ gilt. (Hier wurde wieder die Restabschätzung der Reihe für die Zahl e benützt.) Dann ist $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ und aus $\cos(n!\,4\pi e) = \cos(4\pi A_n + 4\pi B_n) = \cos(4\pi A_n)\cos(4\pi B_n) - \sin(4\pi A_n)\sin(4\pi B_n) = \cos(4\pi B_n)$ folgt durch Grenzübergang $\lim_{n\to+\infty}\cos(n!\,4\pi e) = 1$. Aus (19), (22), (28) und (31) folgt schließlich

$$(32) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{4\pi e} f(t)\sin(Vn!\,t)\,dt = \begin{cases} \pi & \text{für } V = 1, \\ 0 & \text{für } V = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mit (32) haben wir bewiesen, daß es weder einen endlichen noch einen unendlichen Grenzwert der Funktion $\int_0^{4\pi e} f(t)\sin At\,dt$ für $A \to +\infty$ gibt. Zugleich ist damit bewiesen, daß in diesem Falle die Gleichung (11) nicht gilt. Jetzt ist auch klar, warum $\int_0^{4\pi e} f(t)\,dt$ kein konvergentes Lebesguesches Integral ist.

Beispiel 2. Die Funktion f aus dem Beispiel 1 soll nun mit f_1 bezeichnet werden. Es sei $s_n \leqq t \leqq s_{n-1}$, d. h. $4\pi e - w_n \leqq t \leqq 4\pi e - w_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ w_0 = 0)$. Dann ist $w_{n-1} \leqq 4\pi e - t \leqq w_n$ und $n!\,w_{n-1} \leqq n!\,(4\pi e - t) \leqq n!\,w_n$.

Wenn nun t von s_n bis s_{n-1} variiert, so variiert $x = n!(4\pi e - t)$ von $n!\,w_n$ bis $n!\,w_{n-1}$ und umgekehrt. Gesetzt sei $y = -\sin x$ für $x \in \langle n!\,w_{n-1}, n!\,w_n\rangle$, d. h. $y = -\sin[n!\,(4\pi e - t)]$, wobei t das „negative" Intervall $\langle s_{n-1}, s_n\rangle$ durchläuft. Dann wird $y = -\sin[n!\,(4\pi e + t - (s_n + s_{n-1})]$ für $t \in \langle s_n, s_{n-1}\rangle$. Da aber $s_n + s_{n-1} = 8\pi e - w_n - w_{n-1} = 8\pi e - 4m\pi/(n-1)!$ (m ganzzahlig), so ist schließlich $y = \sin[n!\,(4\pi e - t)]$ für $t \in \langle s_n, s_{n-1}\rangle$.

Auf der t-Achse haben wir die gewöhnliche euklidische Metrik ϱ, auf der x-Achse betrachten wir die Metrik $\varrho_1 = \varrho/n!$. Sind dann $t_1, x_1 = n!(4\pi e - t_1)$ und t_2, $x_2 = n!\,(4\pi e - t_2)$ zwei Paare sich entsprechender Punkte, so gilt $\varrho_1(x_1, x_2) = \varrho(x_1, x_2)/n! = [n!\,|t_1 - t_2|]/n! = \varrho(t_1, t_2)$. Die Abbildung $x = n!\,(4\pi e - t)$ ist somit eine isometrische Abbildung der t-Achse auf die x-Achse. Aus dieser Feststellung folgt dann, daß der Kurvenverlauf von $\sin[n!\,(4\pi e - t)]$

im Intervall $\langle s_n, s_{n-1}\rangle$ mit dem Kurvenverlauf von $-\sin x$ im Intervall $\langle n!\, w_{n-1}, n!\, w_n\rangle$ „ähnlich" ist. Da die Länge dieses Intervalls (bezüglich der Metrik ϱ_1) gleich $d_n = 4\pi/(n-1)!$ ist, was dem $2n$-fachen der primitiven Periode $T=2\pi/n!$ der Funktion $-\sin x$ entspricht, ist der Kurvenverlauf von $\sin[n!\,(4\pi e-t)]$ im Intervall $\langle s_n, s_{n-1}\rangle$ „ähnlich" dem Kurvenverlauf von $-\sin x$ im Intervall $\langle 0, 4\pi n\rangle$ (in den Endpunkten des Intervalls $\langle s_n, s_{n-1}\rangle$ schneidet die Kurve $\sin[n!\,(4\pi e-t)]$ die Achse).

Die Schnittpunkte der Kurve f_1 mit der x-Achse (wir schreiben x statt t) teilen das Intervall $\langle s_n, s_{n-1}\rangle$ in $4n$ Intervalle gleicher Länge $c = \pi/n(n-1)!$. In den Intervallen $i_k = \langle s_n+2kc, s_n+(2k+1)c\rangle$ ist der negative Teil der Funktion xf_1 gleich $(xf_1)^- = -x(n-1)!\sin[n!(4\pi e-x)]$, $k=0, 1, \ldots, 2n-1$. Analog ist in den Intervallen $j_k = \langle s_n+(2k+1)c, s_n+(2k+2)c\rangle$ der positive Teil der Funktion xf_1 gleich $(xf_1)^+ = x(n-1)!\ \sin[n!(4\pi e-x)]$, $k=0, 1, \ldots, 2n-1$. In den Intervallen i_k ist $(xf_1)^+=0$, in den Intervallen j_k wiederum $(xf_1)^-=0$. Also gilt

$$\int_{s_n}^{s_{n-1}} (xf_1)^-\,dx = -\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{i_k} x(n-1)!\sin[n!\,(4\pi e-x)]\,dx, \tag{33}$$

$$\int_{s_n}^{s_{n-1}} (xf_1)^+\,dx = \sum_{k=0}^{2n-1}\int_{j_k} x(n-1)!\sin[n!\,(4\pi e-x)]\,dx. \tag{33'}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\left|\int_{i_k} x(n-1)!\sin[n!\,(4\pi e-x)]\,dx\right| &\leqq (n-1)!\int_{i_k} x\,dx \leqq \\ &\leqq (n-1)!\int_{i_k}[s_k+(2k+1)c]\,dx = \\ &= (n-1)!\left[4\pi e-w_n+(2k+1)\frac{\pi}{n(n-1)!}\right]\frac{\pi}{n(n-1)!} = \\ &= \frac{\pi}{n}\left[4\pi e-w_n+(2k+1)\frac{\pi}{n(n-1)!}\right].\end{aligned} \tag{34}$$

Aus dem Beispiel 1 (siehe (14)) wissen wir, daß für $n>3$ die Ungleichung $4\pi e-w_n \leqq \leqq 4\pi/(n-1)\,(n-1)!$ gilt. Ersetzen wir also in (34) die Zahl k, welche die Werte $0, 1, \ldots, 2n-1$ annimmt, durch die größte dieser Zahlen, und die Differenz $4\pi e-w_n$ durch den Ausdruck $4\pi/(n-1)\,(n-1)!$, so wird für $n>3$

$$\begin{aligned}\left|\int_{i_k} x(n-1)!\sin[n!\,(4\pi e-x)]\,dx\right| &\leqq \frac{\pi}{n}\left[\frac{4\pi}{(n-1)(n-1)!}+(4n-1)\frac{\pi}{n(n-1)!}\right] = \\ &= \frac{\pi^2}{(n-1)!}\left[\frac{4}{n(n-1)}+\frac{4n-1}{n^2}\right] \leqq \frac{2\pi^2}{(n-1)!}.\end{aligned} \tag{35}$$

Aus (33), (35) folgt dann für $n>3$

$$\int_{s_n}^{s_{n-1}} (xf_1)^-\,dx \leqq \sum_{k=0}^{2n-1}\left|\int_{i_k} x(n-1)!\sin[n!\,(4\pi e-x)]\,dx\right| \leqq \frac{4\pi^2 n}{(n-1)!}.$$

Hieraus folgt, daß

$$(36)\qquad \int_0^{s_3} (xf_1)^- \, dx = \int\limits_{\bigcup\limits_{n=4}^{\infty}(s_n, s_{n-1})} (xf_1)^- \, dx \leqq 4\pi^2 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}.$$

Ähnlich wird festgestellt, daß auch

$$(36')\qquad \int_0^{s_3} (xf_1)^+ \, dx = \int\limits_{\bigcup\limits_{n=4}^{\infty}(s_n, s_{n-1})} (xf_1)^+ \, dx \leqq 4\pi^2 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}.$$

Die Summe $\sum_{n=4}^{\infty} n/(n-1)!$ ist eine konvergente Reihe. Aus (36), (36′) folgt dann, daß die Integrale $\int_0^{4\pi e}(xf_1)^- dx$, $\int_0^{4\pi e}(xf_1)^+ dx$ konvergieren. Somit ist

$$(37)\qquad \int_0^{4\pi e} xf_1(x)\, dx = \int_0^{4\pi e} [(xf_1)^+ - (xf_1)^-]\, dx$$

ein konvergentes Lebesguesches Integral.

3. Im Abschnitt 1 wurde erwähnt, daß das Dinische Integral (1) wie ein konvergentes Lebesguesches Integral aufgefaßt wird. Darüber hinaus wollen wir nun voraussetzen, daß es kein Lebesguesches Integral ist, sondern ein konvergentes verallgemeinertes Integral mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze Null. Wir führen folgende Konstruktion aus.

Es sei $t \in E_1$. Im intervall $t < x \leqq t + 4\pi e$ nehmen wir eine beliebige Funktion f an, welche so beschaffen ist, daß $f \in L(t, t + 4\pi e)$. Für $0 < x \leqq 4\pi e$ ist $t < t + x \leqq \leqq t + 4\pi e$, im Intervall $0 < x \leqq 4\pi e$ setzen wir $P(x) = f(t + x)$. Weiter sei $f(t) = B \in E_1$. Im Intervall $0 < x \leqq 4\pi e$ nehmen wir eine Funktion $R(x) = 2B + xf_1(x) - P(x)$ an, wobei f_1 die Funktion aus dem Beispiel 2 ist. Für $t - 4\pi e \leqq x < t$ definieren wir nun die Funktion f so, daß $f(t - x) = R(x)$ für $0 < x \leqq 4\pi e$ (es ist $-4\pi e \leqq \leqq -x < 0$, also $t - 4\pi e \leqq t - x < t$). Im Intervall $t - 4\pi e \leqq x \leqq t + 4\pi e$ ist dann damit eine Funktion f konstruiert, welche die Eigenschaft hat, daß

$$(38)\qquad f(t - x) = 2B + xf_1(x) - f(t + x)$$

für $0 < x \leqq 4\pi e$ gilt.

Es ist $\int_0^{4\pi e} f(t + x)dx = \int_t^{t+4\pi e} f(y)dy$, d. h. $f(t + x) \in L(0, 4\pi e)$. Da auch $xf_1(x) \in \in L(0,4\pi e)$ (siehe (37)) und $B \in E_1$ eine Konstante ist, so folgt aus (38), daß auch $f(t - x) \in L(0,4\pi e)$. Es ist $\int_0^{4\pi e} f(t - x)dx = \int_{t-4\pi e}^{t} f(y)dy$, also $f \in L(t - 4\pi e, t)$. Damit ist $f \in L(t - 4\pi e, t + 4\pi e)$.

In der Menge $E_1 - \langle t-4\pi e, t+4\pi e\rangle$ sei f beliebig, aber so beschaffen, daß für sie einer der Fälle I oder II zutrifft. Damit ist jetzt festgestellt, daß man unendlich viele solche Funktionen f konstruieren kann, für welche das Dinische Integral (1) mit $d=4\pi e$

$$\int_0^{4\pi e} \frac{f(t+x)+f(t-x)-2f(t)}{x}\,dx = \int_0^{4\pi e} f_1(x)\,dx \tag{39}$$

ein konvergentes verallgemeinertes Integral darstellt, welches aber kein Lebesguesches Integral ist (siehe Beispiel 1). Zugleich ist uns aus dem Beispiel 1 bekannt, daß weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Funktion $\int_0^{4\pi e} f_1(x)\sin Ax\,dx$ für $A \to +\infty$ existiert (siehe (32)). Wegen (39) existiert dann weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Funktion

$$\int_0^{4\pi e} \frac{f(t+x)+f(t-x)-2f(t)}{x}\sin Ax\,dx \tag{40}$$

für $A \to +\infty$. In (5), (6), (7), (8), (9) setzen wir $d=4\pi e$ und verfolgen die dort aufgestellte Beweisführung. Aus dem, was über (40) gesagt wurde, folgt nun, daß weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Differenz

$$F_A(t, 4\pi e) - f(t)\frac{2}{\pi}\int_0^{4\pi e} \frac{\sin Ax}{x}\,dx \tag{41}$$

in (6) existieren kann. Da (siehe (41))

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{4\pi e} \frac{\sin Ax}{x}\,dx = 1$$

ist, bedeutet das, daß weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Funktion $F_A(t, 4\pi e)$ für $A \to +\infty$ existieren wird. Nach (8) ist $\lim\limits_{A\to+\infty}\big(F_A(t, 4\pi e) - F_A(t)\big) = 0$. Deshalb wird weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Funktion $F_A(t)$ für $A \to +\infty$ existieren, d. h. das Fouriersche Integral (2) der betrachteten Funktion f wird im Punkte $t \in E_1$ divergieren.

Die gewonnenen Ergebnisse können wir nun folgendermaßen formulieren:

Satz. *Zu jedem $t \in E_1$ existieren immer unendlich viele Funktionen f, für die jeweils der Fall* I *oder Fall* II *zutrifft, wobei folgendes gilt:* 1° *Das Dinische Integral* (1) (*z. B. für $d \in (0, 4\pi e\rangle$*) *ist ein konvergentes verallgemeinertes Integral mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze Null, aber kein Lebesguesches Integral.* 2° *Das Fouriersche Integral* (2) *der Funktion f divergiert im Punkte $t \in E_1$.*

Abschließend noch eine Bemerkung. Bekanntlich umfaßt das Perronsche Integral das Newtonsche und das konvergente Lebesguesche Integral. Es umfaßt aber auch das konvergente verallgemeinerte Integral. Vorausgesetzt, daß f eine

Funktion ist, für welche der oben angeführte Satz gilt, existiert das Dinische Integral (1) als Perronsches. Auch alle Integrale $F_A(t)$ (siehe (3)) existieren als Perronsche Integrale. Allerdings existiert das Fouriersche Integral (2) der Funktion f im angeführten Punkte $t \in E_1$, wo es, aufgefaßt als Lebesguesches oder als verallgemeinertes Integral, divergiert, nicht als Perronsches Integral. Im Falle seiner Existenz müßte nämlich die Funktion $F_A(t)$ des Arguments A im Intervall $(0, +\infty\rangle$ stetig sein, d. h. es müßte vor allem ein endlicher Grenzwert $\lim_{A \to +\infty} F_A(t)$ existieren, was aber nicht zutrifft. Damit ist bewiesen, daß im Falle der Perronschen Integration die Existenz des Dinischen Integrals (1) einer gegebenen Funktion f (im Punkte $t \in E_1$) die Existenz des zugehörigen Fourierschen Integrals (2) nicht implizieren muß.

(Eingegangen am 21. Februar 1963.)