Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten

Von ERNŐ GESZTELYI (Debrecen)

Einleitung

Wir werden in dieser Arbeit lineare Differentialgleichungen mit Polynomen als Koeffizienten mit Hilfe der MIKUSINSKIschen Operatoren ([1,] [2]) lösen.

Eine Differentialgleichung mit Polynom-Koeffizienten hat die Form:

$$(1) \qquad P_n(t)Y^{(n)}(t)+P_{n-1}(t)Y^{(n-1)}(t)+\dots+P_1(t)Y'(t)+P_0(t)Y(t) = F(t)$$

wobei $P_i(t)$ $(i=0, \dots, n)$ Polynome sind. Haben die Polynome höchstens den Grad m, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$(2) \qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}t^{\mu}Y^{(\nu)}(t)=F(t).$$

Man kann Gleichungen vom Typ (2) mittels der LAPLACE-Transformation behandeln [3]. Setzen wir voraus, daß $Y^{(n)}(t)$ und $F(t)$ Laplace-Transformierte besitzen, so entspricht der Differentialgleichung (2) die Bildgleichung

$$(3) \qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}}{ds^{\mu}}[s^{\nu}Y(s)-Y(+0)s^{\nu-1}-\dots-Y^{(\nu-1)}(+0)] = f(s).$$

Wir haben in dieser Weise wiederum eine Differentialgleichung mit Polynomen als Koeffizienten erhalten.

Eine der Gleichung (3) entsprächende Gleichung entsteht auch in der Operatorenrechnung, wenn man statt $\dfrac{d}{ds}$ die Operation der algebraischen Derivation D anwendet:

$$(4) \qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(-1)^{\mu}D^{\mu}[s^{\nu}\{Y(t)\}-Y(0)s^{\nu-1}-\dots-Y^{(\nu-1)}(0)] = \{F(t)\}$$

wobei s den Operator des Differenzierens bedeutet:

$$s=\frac{1}{\{1\}} \quad \text{und} \quad D\{y(t)\}=\{-ty(t)\} \text{ ist.}$$

Man bekommt die Gleichung (4) aus (2) ohne die Voraussetzung der Existenz der Laplace-Transformierten. Es ist also zu erwarten, daß man mit Anwendung der Operatorenrechnung allgemeinere Lösungen bekommen kann, als mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Die Hauptschwierigkeit besteht hier in den folgenden:

Die transformierte Gleichung (4) ist keine Differentialgleichung. Man kann also die Methoden, die in der Theorie der Differentialgleichungen bekannt sind, nicht ohne weiteres anwenden. Man kann doch wegen der Analogie, die zwischen der zwei Theorien bisher bestand, hoffen, daß diese Operatorengleichung gleicherweise der entsprechenden Differentialgleichung lösbar ist.

Zu diesem Zwecke müssen wir erst einen Begriff definieren, der dem gewöhnlichen unbestimmten Integrale entspricht. Wir nennen die Umkehrung der algebraischen Differentiation „algebraische Integration". Wir beschäftigen uns mit der algebraischen Integration und mit ihren wichtigsten Eigenschaften im § 1. Im § 2. wird die Klasse der Funktionen, die als Operatoren betrachtet werden können, erweitert. Man kann in dieser Weise auch mit solchen Funktionen rechnen, die sicher keine Laplace-Transformierte besitzen, da sie nicht lokalintegrierbar sind. Es wird im § 3 eine zweckmäßige Verallgemeinerung des Begriffes von Logarithmus und Exponentialfunktion gegeben. Damit können wir eine explizite Formel für die Lösung solcher Operatorengleichungen, die den linearen Differentialgleichungen von 1. Ordnung in der genannten Analogie entsprechen, liefern.

Wir kommen im § 4. auf die Anwendung der Methode, und es wird sich zeigen, daß die Operatorenrechnung auch in diesem Falle allgemeiner als die Laplace-Transformation ist.

§ 1. Das algebraische Integral

Definition 1. 1 *Gegeben sei ein Operator a. Gibt es zu diesem einen Operator b, so daß*

$$Db = a \tag{1. 1}$$

ist, dann sagen wir, b sei ein algebraisches Integral von a, in Zeichen

$$b = \int a. \tag{1. 2}$$

Gibt es ein algebraisches Integral von a, so sagt man, a sei algebraisch integrierbar.

Satz 1. 1 *Sind a und b algebraisch integrierbar, so ist auch $\lambda a + \mu b$ (λ und μ sind Zahlen) algebraisch integrierbar, und es gilt die Formel:*

$$\int (\lambda a + \mu b) = \lambda \int a + \mu \int b. \tag{1. 3}$$

Beweis. Auf Grund der Eigenschaften der algebraischen Derivation

$$D\left[\lambda \int a + \mu \int b\right] = D\left[\lambda \int a\right] + D\left[\mu \int b\right] = \lambda D \int a + \mu D \int b = \lambda a + \mu b,$$

also gilt (1. 3) (wegen Definition 1. 1).

Satz 1. 2 *Sämtliche algebraische Integrale eines Operators unterscheiden sich in einer willkürlichen, additiven Konstante (d. h. in einer Zahl).*

BEWEIS. Es sei $\int a = b$, und γ eine willkürliche Zahl. Dann ist $D(b+\gamma) = = Db + D\gamma = Db = a$. Umgekehrt, ist $Db_1 = Db_2$ d. h. $D(b_1 - b_2) = 0$, so folgt $b_1 - b_2 = \gamma$ (s. [4]).

Satz 1. 3 *Es sei die Funktion $f(t) \in \mathcal{C}$* [1]) *so gegeben, daß* $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{-t} = \alpha \neq \pm\infty$ *gilt. Dann ist $\{f(t)\}$ algebraisch integrierbar, und es gilt*

$$\int \{f(t)\} = \left\{\frac{f(t)}{-t}\right\}, \tag{1. 4}$$

wobei $\frac{f(0)}{-0} \overset{\text{def}}{=} \alpha$ *ist.*

BEWEIS. $D\left\{\frac{f(t)}{-t}\right\} = \left\{-t\,\frac{f(t)}{-t}\right\} = \{f(t)\}$, nämlich ist $\frac{f(t)}{-t} \in \mathcal{C}$.

Satz 1. 4 *Jeder rationale Ausdruck von s ist algebraisch integrierbar.*

BEWEIS. Ein rationaler Ausdruck von s hat die Gestalt

$$\frac{\gamma_m s^m + \ldots + \gamma_1 s + \gamma_0}{\delta_n s^n + \ldots + \delta_1 s + \delta_0} \tag{1. 5}$$

wobei $\gamma_m, \ldots, \gamma_0, \delta_n, \ldots, \delta_0$ komplexe Zahlen sind.

Man kann (1. 5) nach einer bekannten algebraischen Regel in einen Polynom und in Partialbrüche zerlegen. Es genügt also — auf Grund des Satzes 1. 1 — die algebraische Integrierbarkeit von

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p} \tag{1. 6}$$

zu zeigen, wobei α irgendeine komplexe Zahl, und p eine natürliche Zahl ist. (Die algebraische Integrierbarkeit eines Polynoms von s ist trivial.)

a) Es sei zuerst $p > 1$. Dann ist

$$\int \frac{1}{(s-\alpha)^p} = \frac{1}{(1-p)(s-\alpha)^{p-1}}. \tag{1. 7}$$

In der Tat gilt

$$D\,\frac{1}{(1-p)(s-\alpha)^{p-1}} = \frac{1}{1-p}\,\frac{-(p-1)(s-\alpha)^{p-2}}{(s-\alpha)^{2p-2}} = \frac{1}{(s-\alpha)^p}.$$

b) Es sei $p=1$, und $\alpha = 0$. Dann gilt

$$\int \frac{1}{s} = \frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} = s^2\{-t\ln t\}. \tag{1. 8}$$

[1]) Wir bezeichnen die Menge der in $(0, \infty)$ stetigen Funktionen mit $\mathcal{C}$.

Um (1. 8) zu beweisen, muß man die Richtigkeit von

$$D[s^2\{-t\ln t\}] = \frac{1}{s} = \{1\}$$

einsehen, oder ausführlicher die von

$$2s\{-t\ln t\} + s^2\{t^2\ln t\} = \{1\}$$

d. h. von

$$\{-2t\ln t\} + s\{t^2\ln t\} = \{t\}. \tag{1.9}$$

Man kann (1. 9) leicht verifizieren.

c) Wir werden nun

$$\int \frac{1}{s-\alpha} = \frac{\{-te^{\alpha t}\ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}} \tag{1.10}$$

beweisen. Dies ist mit

$$\frac{1}{s-\alpha} = D\frac{\{-te^{\alpha t}\ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}}$$

äquivalent.

Wir wenden die Operation $T^{-\alpha}$ an, (s. [1]. $T^\alpha\{f(t)\} = \{e^{\alpha t}f(t)\}$ ist für $f(t)\in\mathcal{C}$, $T^\alpha\dfrac{f}{g} = \dfrac{T^\alpha f}{T^\alpha g}$ ist für $\dfrac{f}{g}\in M$,[2]) $T^\alpha R(s) = R(s-\alpha)$ ist, wenn $R(s)$ ein rationaler Ausdruck von s ist.) und beachtet, daß die Operation T^α mit D vertauschbar ist, erhalten wir

$$\frac{1}{s} = T^{-\alpha}\frac{1}{s-\alpha} = T^{-\alpha}D\frac{\{-te^{\alpha t}\ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}} = DT^{-\alpha}\frac{\{-te^{\alpha t}\ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}} = D\frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}}.$$

Damit ist (1. 10) bewiesen, da die Gültigkeit von (1. 8) schon bewiesen ist. Wir zeigen noch die Vertauschbarkeit von T^α und D. Es gilt

$$DT^\alpha\{f(t)\} = D\{e^{\alpha t}f(t)\} = \{-te^{\alpha t}f(t)\} = T^\alpha\{-tf(t)\} = T^\alpha D\{f(t)\},$$

wenn $f(t)\in\mathcal{C}$ ist. Sind $u, v\in\mathcal{C}$, so ist

$$DT^\alpha\frac{u}{v} = D\frac{T^\alpha u}{T^\alpha v} = \frac{T^\alpha vD(T^\alpha u) - T^\alpha uD(T^\alpha v)}{(T^\alpha v)(T^\alpha v)} =$$

$$= \frac{T^\alpha v\,T^\alpha Du - T^\alpha u\,T^\alpha Dv}{(T^\alpha v)(T^\alpha v)} = \frac{T^\alpha(vDu - uDv)}{T^\alpha v^2} = T^\alpha D\frac{u}{v}.$$

(Wir haben hier die folgenden Eigenschaften von T^α benutzt:

$$T^\alpha(a+b) = T^\alpha a + T^\alpha b,\quad T^\alpha(ab) = T^\alpha a\cdot T^\alpha b.)$$

Satz 1. 5 *Ist die Funktion $f(t)\in\mathcal{C}$ im Punkt 0 differenzierbar, so ist $\{f(t)\}$ algebraisch integrierbar.*

[2]) M ist der Körper der Mikusinskischen Operatoren.

Beweis. $f(t) = \varphi(t)+f(0)$, wobei $\varphi(t) = f(t)-f(0)$ differenzierbar, also $\varphi'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t)}{t} \neq \infty$ ist. Man kann also die Sätze 1. 1 und 1. 3 anwenden:

$$\int \{f(t)\} = \int \{f(0)+\varphi(t)\} = \int \{f(0)\} + \int \{\varphi(t)\} = f(0)\int \frac{1}{s} + \left\{\frac{\varphi(t)}{-t}\right\} = \tag{1. 11}$$

$$= f(0)\frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} - \left\{\frac{\varphi(t)}{t}\right\}.$$

Bemerkung 1. Ist $f(0)=0$, so geht der Satz 1. 5 in den Satz 1. 3 über, da $\int \{f(t)\} = \left\{\dfrac{\varphi(t)}{-t}\right\} = \left\{\dfrac{f(t)}{-t}\right\}$ ist.

Bemerkung 2. Ist $\{f(t)\} = \{e^{\alpha t}\} = \dfrac{1}{s-\alpha}$, so ist nach Satz 1. 5

$$\int \frac{1}{s-\alpha} = \frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} + \left\{\frac{e^{\alpha t}-1}{-t}\right\}. \tag{1. 12}$$

Da aber auch (1. 10) gilt, so muß

$$\frac{\{-te^{\alpha t}\ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}} - \frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} - \left\{\frac{e^{\alpha t}-1}{-t}\right\} = \gamma \tag{1. 13}$$

nach Satz 1. 2 eine Konstante (d. h. eine Zahl) sein.

In der Tat hat man

$$D\left[\frac{\{-te^{\alpha t}\ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}} - \frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} - \left\{\frac{e^{\alpha t}-1}{-t}\right\}\right] =$$

$$= D\left[T^{\alpha}\int\{1\} - \int\{1\} - \left\{\frac{e^{\alpha t}-1}{-t}\right\}\right] = T^{\alpha}\{1\} - \{1\} -$$

$$-\{e^{\alpha t}-1\} = \{e^{\alpha t}-1-e^{\alpha t}+1\} = 0.$$

Satz 1. 6 *Jede in* $[0, \infty)$ *stetige Funktion ist als Operator algebraisch integrierbar.*

Beweis. Es sei die Funktion $f(t)\in\mathcal{C}$ willkürlich gegeben. Dann existiert eine Funktion $u(t)\in\mathcal{C}$ so, daß

$$D\frac{\{u(t)\}}{\{t\}} = \{f(t)\} \tag{1. 14}$$

ist, oder ausführlicher

$$\frac{\{t\}\{-tu(t)\} - \{u(t)\}\{-t^2\}}{\{t\}^2} = \{f(t)\}. \tag{1. 15}$$

(1. 15) ist mit

$$\{t^2\}\{u(t)\} - \{t\}\{tu(t)\} = \{t\}^2\{f(t)\} \tag{1. 16}$$

äquivalent. Dies können wir wegen $\{t\}^2=\{t\}\{t\}=\frac{1}{s^4}=\left\{\frac{t^3}{6}\right\}$ noch folgenderweise schreiben:

$$(1.17)\qquad \int_0^t (t-2\tau)(t-\tau)u(\tau)\,d\tau=\frac{1}{6}\int_0^t (t-\tau)^3 f(\tau)\,d\tau.$$

Wir beweisen, daß

$$(1.18)\qquad u(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau+t\int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau,\qquad u(0)=0$$

in $[0,\infty)$ stetig ist, und der Integralgleichung (1. 17) genügt (d. h. (1. 14) gilt).

Um die Stetigkeit von $u(t)$ in $[0,\infty)$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $\lim\limits_{t\to 0} u(t)=0$ ist, denn es gilt $u(0)=0$. (Die Stetigkeit ist für $t>0$ trivial.)

Es genügt zu zeigen, daß

$$(1.19)\qquad \lim_{t\to 0} t\int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau=0$$

ist. Es sei K eine Schranke für die stetige Funktion $f(t)$: $|f(t)|\leqq K$ für $0\leqq t\leqq 1$. Ist $0<t\leqq 1$, dann gilt

$$\left|t\int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right|\leqq t\int_t^1 \frac{|f(\tau)|}{\tau}\,d\tau\leqq Kt\int_t^1 \frac{1}{\tau}\,d\tau=-Kt\ln t.$$

Daher folgt (1. 19), da $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t=0$ ist.

Wir beweisen nun, daß (1. 18) die Lösung der Integralgleichung (1. 17) ist:

$$I=\int_0^t (t-2\tau)(t-\tau)\left[\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma+\tau\int_\tau^1 \frac{f(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma\right]d\tau=$$

$$=\int_0^t (t^2-3t\tau+2\tau^2)\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma\,d\tau+\int_0^t (t^2\tau-3t\tau^2+2\tau^3)\int_\tau^1 \frac{f(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma\,d\tau.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$I=\frac{1}{6}\int_0^t (t^3-3t^2\tau+3t\tau^2-\tau^3)f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{6}\int_0^t (t-\tau)^3 f(\tau)\,d\tau.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Es gilt also für jede $f(t) \in \mathcal{C}$

$$\int \{f(t)\} = s^2 \left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau + t \int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\}. \tag{1.20}$$

Bemerkung. Ist $f(t)$ im Punkt $t=0$ differenzierbar, so erhält man aus (1. 20) das Ergebnis des Satzes 1. 5.

Schreibt man nämlich $\varphi(t)$ statt $f(t)-f(0)$, so ist $\dfrac{\varphi(t)}{t} \in \mathcal{C}$, und es gilt

$$t\int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau = t\int_t^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau - t\int_1^t \frac{f(0)}{\tau}\, d\tau = t\int_t^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau + f(0)(-t \ln t).$$

Es folgt also aus (1. 20), daß

$$\int f = s\left[s\left\{ \int_0^t [\varphi(\tau)+f(0)]\, d\tau \right\} + s\left\{ t\int_t^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\} \right] + s^2 f(0)\{-t \ln t\} =$$

$$= s\left[\{\varphi(t)+f(0)\} + \left\{ \int_t^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau - t\,\frac{\varphi(t)}{t} \right\} \right] + f(0)\,\frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} =$$

$$= f(0)\,\frac{\{-t\ln t\}}{\{t\}} - \left\{ \frac{\varphi(t)}{t} \right\} + \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau + f(0)$$

ist, d. h. (1. 20) unterscheidet sich von (1. 11) in der Zahl

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau + f(0).$$

Wir haben im Satz 1. 6 bewiesen, daß jede zur Klasse $\mathcal{C}$ gehörende Funktion algebraisch integrierbar ist. Wir wissen aber nicht, ob dieses Integral weiter iterierbar ist.

Diese Frage wird durch den folgenden Satz beantwortet. Wir werden zeigen, daß jeder Distributionsoperator algebraisch integrierbar ist. Ein Operator a heißt Distributionsoperator, wenn er die folgende Gestalt hat:

$$a = h^{-\lambda}\,\frac{f}{l^k} \tag{1.21}$$

wobei $h=e^{-s}$ den Verschiebungsoperator bedeutet; f eine Funktion von der Klasse $\mathcal{C}$, λ eine reelle und k eine nicht negative ganze Zahl ist und $l=\{1\}$ ist.

Satz 1. 7 *Jeder Distributionsoperator ist algebraisch integrierbar. Das algebraische Integral eines Distributionsoperators ist wieder ein Distributionsoperator.*

Beweis. Es sei der Distributionsoperator (1. 21) gegeben, den wir noch in folgender Form schreiben können:

$$a = s^k e^{\lambda s} f. \tag{1. 22}$$

Wir werden nachweisen, daß die Gleichung

$$s^k e^{\lambda s} f = D s^{k+2} e^{\lambda s} u \tag{1. 23}$$

eine Lösung u besitzt, wobei $u \in \mathcal{C}$ ist. Die Gleichung (1. 23) ist äquivalent mit folgender Integralgleichung:

$$(\lambda - t) u(t) + (k+2) \int_0^t u(\tau)\, d\tau = \int_0^t \int_0^\tau f(\sigma)\, d\sigma\, d\tau. \tag{1. 24}$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß aus (1. 23) die Gleichung (1. 24) folgt. Hier werden wir nur zeigen, daß jede Lösung von (1. 24) auch eine Lösung von (1. 23) ist.

In der Tat, wir können statt (1. 24) die Gleichung

$$\frac{1}{s^2} f = Du + \lambda u + (k+2) \frac{1}{s} u \tag{1. 25}$$

schreiben, da $\{-tu(t)\} = Du$, $\left\{\int_0^t \int_0^\tau f(\sigma)\, d\sigma\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}\{f(\tau)\}$ ist. Multipliziert man beide Seiten von (1. 25) mit $s^{k+2} e^{\lambda s}$, so entsteht (1. 23)[3]):

$$s^k e^{\lambda s} f = (k+2) s^{k+1} e^{\lambda s} u + \lambda s^{k+2} e^{\lambda s} u + s^{k+2} e^{\lambda s} Du = D(s^{k+2} e^{\lambda s} u).$$

Nun die Gleichung (1. 24) zu lösen, führen wir die folgende Bezeichnungen ein:

$$\int_0^t u(\tau)\, d\tau = y(t), \quad y'(t) = u(t). \tag{1. 26}$$

So geht (1. 24) in die Differentialgleichung

$$(\lambda - t) y' + (k+2) y = \int_0^t \int_0^\tau f(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \tag{1. 27}$$

über.

Hier wird — infolge von (1. 26) — der Lösung die Bedingung auferlegt, daß sie an der Stelle $t=0$ den Wert $y(0)=0$ annehmen soll.

Gemäß einer bekannten Rechnung ist die Lösung (1. 27) die folgende:

$$y = -(t-\lambda)^{k+2} \int_\mu^t \frac{\int_0^\tau \int_0^\xi f(\sigma)\, d\sigma\, d\xi}{(\tau - \lambda)^{k+3}}\, d\tau + c^* (t-\lambda)^{k+2} \tag{1. 28}$$

---

[3]) In Betreff der Richtigkeit von $De^{\lambda s} = \lambda e^{\lambda s}$ s [4].

wobei $\mu > \lambda$ eine willkürliche, reelle Zahl ist. Gilt für die Größe c^*

$$(1.28)\qquad c^* = \int_{\mu}^{0} \frac{\int_0^{\tau}\int_0^{\xi} f(\sigma)\,d\sigma\,d\xi}{(\tau-\lambda)^{k+3}}\,d\tau$$

so erfüllt sich die Forderung $y(0)=0$.

Man erhält also die Lösung von (1. 24) und damit auch die von (1. 23):

$$(1.29)\qquad u(t) = y'(t) = \frac{1}{k+1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau + \frac{(t-\lambda)^{k+1}}{k+1}\int_t^{\mu} \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-\lambda)^{k+1}} + c(t-\lambda)^{k+1}.$$

Man kann nach kleiner Rechnung einsehen, daß (1. 29) bei willkürlicher c die Gleichung (1. 23) befriedigt, da

$$s^{k+2}e^{\lambda s}c\{(t-\lambda)^{k+1}\} = cs^{k+2}\{t^{k+1}\} = cs^{k+2}\frac{(k+1)!}{s^{k+2}} = c(k+1)!$$

eine Zahl ist.

Hier ist $u(t)$ auch im Punkte $t=\lambda$ stetig, wenn $\dfrac{f(t)}{(t-\lambda)^{k+1}}$ stetig ist. Im entgegensetzten Falle gilt

$$\lim_{t\to\lambda} u(t) = \frac{1}{k+1}\int_0^{\lambda} f(\tau)\,d\tau + \lim_{t\to\lambda}\frac{-\int_{\mu}^{t}\frac{f(\tau)}{(\tau-\lambda)^{k+1}}\,d\tau}{(k+1)(t-\lambda)^{-(k+1)}} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\int_0^{\lambda} f(\tau)\,d\tau + \lim_{t\to\lambda}\frac{-\frac{f(t)}{(t-\lambda)^{k+1}}}{-(k+1)^2(t-\tau)^{-(k+2)}} = \frac{1}{k+1}\int_0^{\lambda} f(\tau)\,d\tau.$$

Setzt man $u(\lambda) = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\int_0^{\lambda} f(\tau)d\tau$, so ist $u(t)$ auch im Punkte $t=\lambda$ stetig.

Das algebraische Integral des Distributionsoperators (1. 22) ist also wieder ein Distributionsoperator, da man (1. 23) auch in folgender Form schreiben kann:

$$(1.30)\qquad \int s^k e^{\lambda s} f = s^{k+2}e^{\lambda s}u + \gamma,$$

wo γ eine willkürliche Zahl ist.

Bemerkung 1. Ist $k=\lambda=c=0$; $\mu=1$, so geht (1. 29) in (1. 18) und (1. 30) in (1. 20) über.

Bemerkung 2. Es folgt aus Satz 1. 7, daß jede Funktion $f\in\mathcal{C}$ beliebig vielmal algebraisch integrierbar ist, da die Funktion f (bei $k=\lambda=0$) ein Distributionsoperator ist.

Bemerkung 3. Jeder Operator $\frac{a}{b}$ ist algebraisch integrierbar, falls $b(t)=t^{\nu}\beta(t)$, $(\beta(+0)\neq 0,\ \nu>0)$ ist. Die Behauptung folgt aus einem Satz von ST. FENYŐ ([5]). Er hat bewiesen, daß der Operator $\frac{a}{b}$ in diesem Falle ein Distributionsoperator ist. Der Operator $\frac{a}{b}$ ist also auf Grund des Satzes 1. 7 algebraisch integrierbar.

Bemerkung 4. Der Satz 1. 7 leistet das meiste, was wir über die algebraische Integrierbarkeit wissen. Die Frage ist noch offen, ob solche Operatoren existieren, die algebraisch nicht integrierbar sind.

§ 2. Nicht lokalintegrierbare Funktionen als Operatoren

1. Wir sind jetzt imstande einige solche Funktionen, die in $[0,\infty)$ nicht lokalintegrierbar sind, als Operatoren zu betrachten.

Wir haben bewiesen, daß jede zur Klasse $\mathcal{C}$ gehörende Funktion als Operator beliebig vielmal algebraisch integrierbar ist (Satz 1. 7).

Nach dem Satz 1. 3

$$\int \{f(t)\} = \left\{\frac{f(t)}{-t}\right\} \tag{2. 1}$$

ist, falls $\frac{f(t)}{-t}$ in $[0,\infty)$ stetig ist.

Es ist aber im Allgemeinen $\frac{f(t)}{-t}$ $(f(t)\in\mathcal{C})$ keine stetige Funktion (falls $f(0)\neq 0$ ist). $\frac{f(t)}{-t}$ ist also kein Element weder der Funktionenklasse $\mathcal{K}$, noch $\mathcal{U}$ (s. [1]), da sie in keinem Intervall $[0, T]$ integrierbar, also nicht lokalintegrierbar ist.

Wir können doch die Funktion $\frac{f(t)}{-t}$ auf Grund der Formel (2. 1) als Operator erklären.

Wir werden hier das Verfahren verfolgen, welches im Buch [1] und [2] bei der Definition der Funktionenklassen $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ ausgearbeitet wurde.

Die Elemente der Funktionenklassen $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ sind ursprünglich keine Operatoren. Wir können nur nach dem bekannten algebraischen Verfahren des Einbettens z. B. des Ringes $\mathcal{C}$ in den Körper der Operatoren sagen, daß die stetige Funktionen Operatoren sind.

Es seien zwei Mengen A und B gegeben, in denen gewisse algebraische Operationen definiert sind. Man kann A in B *einbetten*, wenn (*i*) jede algebraische Operation in A hat eine entsprächende in B, und (*ii*) es existiert eine ein-eindeutige Abbildung von A in eine Teilmenge von B so, daß die Operationen ungeändert bleiben (d. h. wenn $a_1, a_2\in A$; $b_1, b_2\in B$ und $a_1\leftrightarrow b_1$; $a_2\leftrightarrow b_2$ gelten, so gilt auch $a_1\bigcirc a_2\leftrightarrow b_1\square b_2$, wobei $\bigcirc$ und $\square$ die gegeneinander entsprächende Operationen in A und B sind).

2. Es sei $\mathcal{C}^{(\infty)}$ die Menge der Funktionen, die in $[0,\infty)$ beliebig vielmal Differenzierbar sind. Bezeichnen wir mit $\mathcal{G}$ die Menge sämtlicher Funktionen $\frac{f(t)}{(-t)^n}$,

wobei $f(t) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ ist, und n nicht negative ganze Zahl ist. $\mathcal{G}$ ist eine Gruppe, wenn man unter Operation in $\mathcal{G}$ die gewöhnliche Addition versteht. ($\mathcal{G}$ ist kein Ring bezüglich der Faltung, da die Faltung von nicht lokalintegrierbaren Funktionen nicht definiert ist. Eine verallgemeinerte Faltung wird eben durch unseren Einbettungsverfahren definiert sein.)

Wir wollen nun die Abbildung der Gruppe $\mathcal{G}$ in eine Gruppe der Operatoren angeben. Wir werden zuerst die Bildmenge, d. h. eine Gruppe der Operatoren konstruieren.

Satz 2. 1 *Ist* $f(t) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$, *so ist auch*

$$\varphi(t) = \frac{f(t)-f(0)}{-t} \in \mathcal{C}^{(\infty)} \qquad (\varphi(0) = -f'(0)). \tag{2. 2}$$

Beweis. Die Behauptung ist klar, wenn $f(t)$ in eine MacLaurinsche Reihe entwickeln läßt. Wir werden (2. 2) ohne die Voraussetzung der Entwickelbarkeit beweisen.

Hilfssatz. *Ist* $\varphi(t)$ *im offenen Intervall* $(0, \infty)$ *differenzierbar, und existiert* $\lim\limits_{t\to 0} \varphi'(t) = \alpha$, *so ist* $\varphi(t)$ *auch an der Stelle* $t=0$ *differenzierbar.*

Durch Anwendung der l'Hospitalschen Regel bekommt man nämlich

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi'(t)}{1} = \alpha.$$

Wir werden den Satz 2. 1 durch vollständige Induktion beweisen. Wir zeigen, daß die Funktion

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(0)}{-t}, & \text{für} \quad t \neq 0 \\ -f'(0), & \text{für} \quad t = 0 \end{cases}$$

in $[0, \infty)$ differenzierbar ist, d. h. die Behauptung des Satzes 2. 1 für $n=1$ gilt. Da $\varphi(t)$ in $(0, \infty)$ differenzierbar ist, bekommen wir nach der L'Hospitalschen Regel

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{f(t)-f(0)}{-t} + f'(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)-f'(0)}{-2t} = -\frac{f''(0)}{2}.$$

Setzen wir nun voraus, daß $\varphi^{(n)}(t)$ in $[0, \infty)$ existiert, und $\varphi^{(n)}(0) = -\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ ist.

Durch $n+1$-malige Differentiation von

$$t\varphi = f(0)-f(t) \qquad (t>0)$$

bekommen wir die Gleichung

$$(n+1)\varphi^{(n)}(t) + t\varphi^{(n+1)}(t) = -f^{(n+1)}(t) \tag{2. 3}$$

oder

$$ty'+(n+1)y = -f^{(n+1)}(t), \tag{2.4}$$

wobei $y = \varphi^{(n)}(t)$; $y' = \varphi^{(n+1)}(t)$ ist.

Die allgemeine Lösung von (2. 4) ist

$$y = \frac{-\int\limits_0^t \tau^n f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau}{t^{n+1}} + \frac{C}{t^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist y eine in $[0, \infty)$ differenzierbare (also auch stetige) Funktion. Daraus folgt, daß in (2. 5) $C=0$ ist. Ist $t>0$, so erhält man aus (2. 5)

$$\varphi^{(n+1)}(t) = y' = \frac{(n+1)\int\limits_0^t \tau^n f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau - t^{n+1} f^{(n+1)}(t)}{t^{n+2}}.$$

Da

$$\lim_{t\to 0} \varphi^{(n+1)}(t) = \lim_{t\to 0} \frac{(n+1)t^n f^{(n+1)}(t) - (n+1)t^n f^{(n+1)}(t) - t^{n+1} f^{(n+2)}(t)}{(n+2)t^{n+1}} =$$
$$= -\frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$$

ist, haben wir auf Grund des Hilfssatzes die Differenzierbarkeit von $\varphi^{(n+1)}$ in $[0, \infty)$, und damit auch den Satz 2. 1 bewiesen.

3. Wähle man eines der algebraischen Integralen von $\frac{1}{s}$ aus, und bezeichnen wir dieses mit $\int\limits_* \frac{1}{s}$. Wir nennen den Operator $\int\limits_* \frac{1}{s}$ das *bezeichnete Integral* von $1/s$.

Das iterierte bezeichnete Integral definiert man mit der Rekursionsformel

$$n\int\limits_*^{n+1} \frac{1}{s} = s\int\limits_*^{n} \frac{1}{s} - \frac{s^n}{n!} \qquad \left(n=1, 2, \ldots;\ \int\limits_*^{1} \frac{1}{s} = \int\limits_* \frac{1}{s}\right). \tag{2.6}$$

Wir beweisen, daß

$$D\int\limits_*^{n} \frac{1}{s} = \int\limits_*^{n-1} \frac{1}{s} \qquad \left(n=1, 2, \ldots;\ \int\limits_*^{0} \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\right) \tag{2.7}$$

ist.

Die Behauptung gilt für $n=1$, da $\left(\text{nach der Definition von } \int\limits_* \frac{1}{s}\right)$ $D\int\limits_* \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$ ist. Setzt man voraus, daß (2. 7) gilt und wendet man die algebraische Differentiation auf beide Seite von (2. 6), so erhält man auf Grund von (2. 7) und (2. 6):

$$nD\int_*^{n+1}\frac{1}{s}=\int_*^{n}\frac{1}{s}+s\int_*^{n-1}\frac{1}{s}-\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}=\int_*^{n}\frac{1}{s}+(n-1)\int_*^{n}\frac{1}{s}+\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}=$$

$$=n\int_*^{n}\frac{1}{s}.$$

Damit ist (2. 7) bewiesen.

Das bezeichnete Integral von $f\in\mathcal{C}^{(\infty)}$ definiert man folgendermaßen:

$$\int_* f=f(0)\int_*\frac{1}{s}+\left\{\frac{f(t)-f(0)}{-t}\right\}=f(0)\int_*\frac{1}{s}+\{\varphi_1(t)\},$$

wobei nach Satz 2. 1 $\varphi_1(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{-t}\in\mathcal{C}^{(\infty)}$ ist.

Setzt man

$$\begin{cases}\varphi_0(t)=f(t)\\ \varphi_{n+1}(t)=\dfrac{\varphi_n(t)-\varphi_n(0)}{-t};\ \varphi_{n+1}(0)=-\varphi_n'(0),\end{cases}\tag{2. 8}$$

so können wir das n-te iterierte bezeichnete Integral von f definieren, wie folgt:

$$\int_*^{n} f=\varphi_0(0)\int_*^{n}\frac{1}{s}+\varphi_1(0)\int_*^{n-1}\frac{1}{s}+\dots\varphi_{n-1}(0)\int_*\frac{1}{s}+\{\varphi_n(t)\}.\tag{2. 9}$$

Hier ist nach Satz 2. 1

$$\varphi_n(t)\in\mathcal{C}^{(\infty)}$$

Wir beweisen, daß

$$\varphi_n(t)=\frac{f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k}{(-t)^n}\tag{2. 10}$$

und

$$\varphi_n(0)=(-1)^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\tag{2. 11}$$

ist.

Aus (2. 8) folgt, daß die Behauptung für $n=1$ gilt. Setzen wir voraus, daß (2. 10) und (2. 11) für irgendeine natürliche Zahlen n gilt. Dann folgt aus (2. 8) und (2. 10), (2. 11) die Gleichung

$$\varphi_{n+1}(t)=\frac{\left[f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k\right]-(-1)^n\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(-t)^n}{(-t)^{n+1}}=\frac{f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k}{(-t)^{n+1}}.$$

Es gilt also (2. 10) und (2. 11) für jede natürliche Zahl n. Man kann (2. 9) au Grund von (2. 10) und (2. 11) in folgender Form schreiben:

$$\int_*^n f = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_*^{n-k} \frac{1}{s} + \left\{ \frac{f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^n} \right\}. \tag{2. 12}$$

4. Bezeichnen wir die Menge sämtlicher Operatoren

$$\int_*^n f \qquad (f \in \mathcal{C}^{(\infty)};\ n = 1, 2, \dots)$$

mit $\{\mathcal{G}\}$.

Satz 2. 2 $\{\mathcal{G}\}$ *ist eine Gruppe bezüglich der Operation der Addition.*

Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß

$$\int_*^n D^m f = \int_*^{n-m} f \qquad \left(\int_*^0 f = f\right) \tag{2. 13}$$

ist, wenn $n \geqq m$ ist.

(2. 13) ist für $n = 1$ $(m = 0, 1)$ offensichtlich Richtig. Setzen wir voraus, daß (2. 13) für irgendein n gilt.

Aus (2. 12) folgt, daß

$$\int_* \int_*^n f = \int_*^{n+1} f, \tag{2. 14}$$

oder allgemeiner

$$\int_*^n \int_*^m f = \int_*^{n+m} f \tag{2. 15}$$

ist. Ist $n \geqq m$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung und (2. 14), daß

$$\int_*^{n+1} D^m f = \int_* \int_*^n D^m f = \int_* \int_*^{n-m} f = \int_*^{n+1-m} f$$

ist.

Wir haben damit (2. 13) bewiesen.

Sind nun $\int_*^n f \in \{\mathcal{G}\}$, $\int_*^m g \in \{\mathcal{G}\}$, $n \geqq m$ gegeben, so gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ so, daß

$$\int_*^m g = \int_*^n h$$

ist, da nach (2. 13)

$$\int_*^m g = \int_*^{n-(n-m)} g = \int_*^n D^{n-m} g = \int_*^n h$$

gilt, wobei $h = D^{n-m} g \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ ist.

Es ist also nach (2. 12)

$$\int_*^n f + \int_*^m g = \int_*^n f + \int_*^n h = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_*^{n-k} \frac{1}{s} + \left\{ \frac{f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^n} \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \int_*^{n-k} \frac{1}{s} + \left\{ \frac{h(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^n} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(0) + h^{(k)}(0)}{k!} \int_*^{n-k} \frac{1}{s} + \left\{ \frac{f(t) + h(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) + h^{(k)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^n} \right\} =$$

$$= \int_*^n (f+h) \in \{\mathcal{G}\},$$

da $f+h \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ ist.

Beachtet man noch, daß

$$\int_*^n \lambda f = \lambda \int_*^n f \qquad (\lambda \text{ eine Zahl ist})$$

ist, so kann man bestätigt finden, daß $\{\mathcal{G}\}$ eine Gruppe ist.

5. Wir werden eine ein-eindeutige Abbildung $\mathcal{G} \leftrightarrow \{\mathcal{G}\}$ angeben.

Ist $g \in \{\mathcal{G}\}$, so existiert eine natürliche Zahl n und eine Funktion $f(t) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ so, daß

$$g = \int_*^n \{f(t)\}$$

ist. Wir ordnen dann zu $g \in \{\mathcal{G}\}$ die Funktion $\frac{f(t)}{(-t)^n} \in \mathcal{G}$:

$$\int_*^n \{f(t)\} \leftrightarrow \frac{f(t)}{(-t)^n}. \tag{2. 16}$$

Die Zuordnung

$$\int_*^n f \rightarrow \frac{f(t)}{(-t)^n}$$

ist eindeutig.

Ist nämlich $n \geqq m$, und

$$\int_*^n f = \int_*^m h, \qquad (h \in \mathcal{C}^{(\infty)}) \tag{2. 17}$$

so folgt aus (2. 14), daß

$$\int_*^{n-m} f = h$$

ist.

Daraus folgt auf Grund von (2. 12), daß

$$\{h(t)\} = \int_*^{n-m} f = \left\{ \frac{f(t)}{(-t)^{n-m}} \right\}$$

oder

$$\frac{f(t)}{(-t)^n} = \frac{h(t)}{(-t)^m} \tag{2. 18}$$

ist. Ähnlich beweist man (2. 18), falls $n \leqq m$ ist.

Besteht nun umgekehrt die Gleichung (2. 18) für $f, h \in \mathcal{C}^{(\infty)}$, $m \geqq n$, so folgt aus (2. 12), daß

$$\{f(t)\} = \left\{ \frac{h(t)}{(-t)^{m-n}} \right\} = \int_*^{m-n} h,$$

d. h.

$$\int_*^{n} f = \int_*^{m} h$$

st. Es bedeutet aber die Eindeutigkeit der Zuordnung

$$\int_*^{n} f \leftarrow \frac{f(t)}{(-t)^n}.$$

6. Um die Möglichkeit der Einbettung zu beweisen, müssen wir noch zeigen, daß die Zuordnung (2. 16) die Addition ungeändert läßt. Es sei $\frac{f(t)}{(-t)^n}, \frac{g(t)}{(-t)^m} \in \mathcal{G}$ gegeben. Dann gilt

$$\frac{f(t)}{(-t)^n} + \frac{g(t)}{(-t)^m} = \frac{(-t)^m f(t) + (-t)^n g(t)}{(-t)^{n+m}} \leftrightarrow \int_*^{n+m} (D^m f + D^n g) =$$

$$= \int_*^{n+m} D^m f + \int_*^{n+m} D^n g = \int_*^{n} f + \int_*^{m} g$$

infolge von (2. 12) (2. 15).

Man kann also die Gruppe $\mathcal{G}$ in den Faltungskörper einbetten. Es ist also auch die Funktion $\frac{f(t)}{(-t)^n} \in \mathcal{G}$ ein Operator, und es gilt die Gleichung

$$\left\{ \frac{f(t)}{(-t)^n} \right\} = \int_*^{n} \{f(t)\}. \tag{2. 19}$$

7. Zur Lösung von Differentialgleichungen gebraucht man die Formel

$$s\{y(t)\} = \{y'(t)\} + y(0) \tag{2. 20}$$

wenn $y(t)$ eine lokalintegrierbare Ableitung hat. Wir werden in dem folgenden Satz die Formel (2. 20) verallgemeinern.

Satz 2. 3 *Ist* $y(t)\in\mathcal{G}$, *so gibt es eine natürliche Zahl* n *so, daß* $t^n y(t)\in\mathcal{C}^{(\infty)}$ *ist. Dann gilt*

$$s\{y(t)\} = \{y'(t)\} + \sum_{k=0}^{n} \gamma_{k,n} s^{n-k} \tag{2. 21}$$

wobei

$$\gamma_{k,n} = \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} \lim_{t\to 0} \frac{d^k}{dt^k} (-t)^n y(t) \tag{2. 22}$$

ist.

Beweis. Ist $f\in\mathcal{C}^{(\infty)}$, so bekommt man auf Grund von (2. 12), daß

$$\int_{*}^{n} f' + n\int_{*}^{n+1} f - s\int_{*}^{n} f = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} \int_{*}^{n-k} \frac{1}{s} + \left\{ \frac{f'(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^n} \right\} +$$

$$+ n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_{*}^{n+1-k} \frac{1}{s} + n \left\{ \frac{f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^{n+1}} \right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k s \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_{*}^{n-k} \frac{1}{s} - s \left\{ \frac{f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k}{(-t)^n} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left[(n-k) \int_{*}^{n-k+1} \frac{1}{s} - s\int_{*}^{n-k} \frac{1}{s} \right].$$

ist. Aus (2. 6) folgt, daß

$$(n-k) \int_{*}^{n-k+1} \frac{1}{s} - s\int_{*}^{n-k} \frac{1}{s} = \frac{-s^{n-k}}{(n-k)!}$$

ist.

Es gilt also

$$s\int_{*}^{n} f = \int_{*}^{n} f' + n\int_{*}^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} f^{(k)}(0) s^{n-k}. \tag{2. 23}$$

Ist $y(t)=\dfrac{f(t)}{(-t)^n}$ und $y'(t)=\dfrac{f'(t)}{(-t)^n}+n\dfrac{f(t)}{(-t)^{n+1}}$, so erhalten wir aus (2. 23)

$$s\{y(t)\}=\{y'(t)\}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{f^{(k)}(0)}{k!\,(n-k)!}s^{n-k}.$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$f^{(k)}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{d^k}{dt^k}(-t)^n y(t)$$

ist, so ist (2. 21) rechtfertigt.

8. Betrachten wir sämtliche Funktionen f — deren Menge mit $\mathcal{C}^{(N)}$ bezeichnet wird — die in $[0,\infty)$ N-mal differenzierbar sind, so daß $f^{(N)}(t)$ eine in $[0,\infty)$ lokalintegrierbare Funktion ist. Gibt es zur Funktion g eine Funktion $f\in\mathcal{C}^{(N)}$ und eine natürliche Zahl $n\leqq N$ so, daß g die Form

$$g=\frac{f(t)}{(-t)^n}$$

hat, dann sagen wir, daß $g\in\mathcal{G}^{(N)}$ ist. $\mathcal{G}^{(N)}$ ist eine Gruppe, da für $f,h\in\mathcal{C}^{(N)}$, $m\leqq n\leqq N$

$$\frac{f(t)}{(-t)^n}+\frac{h(t)}{(-t)^m}=\frac{f(t)+(-t)^{n-m}h(t)}{(-t)^n}\in\mathcal{G}^{(N)}$$

ist.

Die rechte Seite der Formel (2. 12) hat auch dann, einen Sinn, wenn $f\in\mathcal{C}^{(N)}$ und $n\leqq N$ ist. Wir können also den Operator $\int\limits_*^n f$ mittels (2. 12) erklären, falls $f\in\mathcal{C}^{(N)}$, $n\leqq N$ ist.

Die Menge sämtlicher Operatoren $\int\limits_*^n f$ $(f\in\mathcal{C}^{(N)};\ n\leqq N)$ — die mit $\{\mathcal{G}^{(N)}\}$ bezeichnet wird — bildet eine Gruppe. Dann die Formel (2. 16) definiert die Abbildung $\mathcal{G}^{(N)}\leftrightarrow\{\mathcal{G}^{(N)}\}$.

Man sieht leicht, daß auf dieser Weise eine Einbettung zustande kommt.

Auch die Formeln (2. 21) und (2. 22) gelten, falls es eine natürliche Zahl gibt so, daß $n\leqq N$ und $(-t)^N y(t)\in\mathcal{C}^{(N)}$ ist.

Bemerkung. Man sieht leicht, daß (2. 21) eine Verallgemeinerung von (2. 20) ist. Es ist klar, daß $\mathcal{C}^{(\infty)}\subset\mathcal{G}$ ist. Ist $y(t)\in\mathcal{C}^{(\infty)}$, so ist für beliebige natürliche Zahl n

$$\gamma_{k,n}=\frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!}\lim_{t\to 0}\frac{d^k}{dt^k}(-t)^n y(t)=0,$$

wenn $k<n$ ist, und

$$\gamma_{n,n}=\frac{(-1)^n}{n!}n!\,(-1)^n y(0)=y(0).$$

So geht (2. 21) in (2. 20) über.

§ 3. Logarithmus von Operatoren und die inverse Operation

Es sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(x)y$$

gegeben. Man löst diese Gleichung nach der Methode der „Trennung der Variablen" wie folgt:

$$\frac{y'}{y} = f(x). \tag{3.1}$$

Integriert man beide Seiten von (31), dann bekommt man

$$\ln y = \int f(x)dx + C.$$

Daraus folt

$$y = ce^{\int f(x)dx}.$$

Wir wollen diese Methode in die Operatorenrechnung übertragen um Operatorengleichungen zu lösen, in denen die algebraische Derivation die Rolle der gewöhnlichen Derivation übernimmt. Wir müssen dazu erst die Operation des Logarithmus, und dessen inverse Operation definieren. J. Mikusinski definiert diese Begriffe im Zusammenhang mit den Operatorfunktionen [1]. Hier werden wir dieselbe unabhängig vom Begriff der Operator-funktionen einführen.

Definition 3.1 *Existiert für irgendeinen Operator w das algebraische Integral des Operators*

$$a = \frac{Dw}{w},$$

so sei definitionsgemäß

$$\log w = \int \frac{Dw}{w} = \int a. \tag{3.2}$$

Der Logarithmus ist also eine Operation, die zum Operator w den Operator $\int \frac{Dw}{w}$ ordnet. Diese Operation ist nicht eindeutig, da das algebraische Integral nicht eindeutig bestimmt ist. (Wir bemerken, daß man auch den Logarithmus einer komplexen Zahl nicht eindeutig definieren kann.)

Beispiele:

$$\log s = \int \frac{Ds}{s} = \int \frac{1}{s} = \left\{\frac{1}{-t}\right\} + \gamma = \frac{\{-t \ln t\}}{\{t\}} + \gamma_1 \tag{3.3}$$

wobei γ eine willkürliche Zahl ist.

$$\log (s - \alpha) = \frac{\{-te^{\alpha t} \ln t\}}{\{te^{\alpha t}\}}. \tag{3.4}$$

Wir haben hier den Logarithmus mit Hilfe des algebraischen Integrals definiert. Wir werden deshalb über algebraischen Logarithmus sprechen.

Satz 3.1 *Sind a und b zwei Operatoren, und gilt*

$$\log a = \log b, \tag{3. 5}$$

so folgt die Beziehung

$$a = \gamma b, \tag{3. 6}$$

wobei γ eine willkürliche Zahl ist.

Beweis. Es folgt aus (3. 5) nach der Definition 3. 1., daß

$$\int \frac{Da}{a} = \int \frac{Db}{b} \tag{3. 7}$$

ist. Dies ist gleichwertig mit

$$\int \left(\frac{Da}{a} - \frac{Db}{b} \right) = \int \frac{bDa - aDb}{ab} = \int \frac{\frac{bDa - aDb}{b^2}}{\frac{a}{b}} = \int \frac{D\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \gamma_1 \tag{3. 8}$$

wobei γ_1 eine willkürliche Zahl ist.

Es folgt aus (3. 8), daß

$$\frac{D\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = 0$$

d. h.

$$D\frac{a}{b} = 0 \tag{3. 9}$$

ist. Daraus folgert man, daß $\frac{a}{b} = \gamma$ ist, wobei γ eine willkürliche Zahl ist.

Satz 3. 2 Existieren für a und b $\log a$ und $\log b$, so existiert auch $\log ab$, und es gilt

$$\log ab = \log a + \log b \tag{3. 10}$$

Beweis. Es ist

$$\log a = \int \frac{Da}{a} = \int \frac{bDa}{ab},$$

$$\log b = \int \frac{Db}{b} = \int \frac{aDb}{ab},$$

und so

$$\log a + \log b = \int \frac{bDa}{ab} + \int \frac{aDb}{ab} = \int \frac{bDa + aDb}{ab} = \int \frac{Dab}{ab} = \log ab.$$

Satz 3. 3 *Existiert* $\log a$ *und* $\log b$, *so existiert auch* $\log \frac{a}{b}$ *und es gilt*

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \tag{3.11}$$

Beweis. Ist

$$c = \int \frac{Da}{a} - \int \frac{Db}{b},$$

dann gilt

$$Dc = \frac{Da}{a} - \frac{Db}{b} = \frac{bDa - aDb}{ab} = \frac{D\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}}.$$

Das ist gleichbedeutend mit dem Folgenden:

$$c = \int \frac{D\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \log \frac{a}{b} = c = \log a - \log b.$$

Satz 3. 4 *Der algebraische Logarithmus einer Zahl ist wieder eine (willkürliche) Zahl.*

Ist nämlich α eine Zahl, so ist

$$\log \alpha = \int \frac{D\alpha}{\alpha} = \int 0 = \gamma. \tag{3.12}$$

Satz 3. 5 *Existiert* $\log a$ *und ist die Potenz* a^λ *für reelle* λ *definiert, so existiert auch* $\log a^\lambda$ *und es gilt*

$$\log a^\lambda = \lambda \log a. \tag{3.13}$$

Beweis. Zuerst setzen wir voraus, daß $\lambda = n$ eine natürliche Zahl ist. Dann existiert

$$a^n = \overset{1}{\breve{a}} \cdot \overset{2}{\breve{a}} \ldots \overset{n}{\breve{a}} \tag{3.14}$$

immer und durch Anwendung der Formel (3. 10) erhält man:

$$\log a^n = \log (\overbrace{a, a \ldots a}^{n}) = \overbrace{\log a + \log a + \ldots + \log a}^{n} = n \log a.$$

Um (3. 13) allgemein für alle Potenzen zu beweisen, müssen wir auf die Definition der Potenz zurückgehen. Über die Potenz a^λ zu sprechen, falls λ keine ganze Zahl ist, ist im Allgemeinen sinnlos. Betrachten wir zum Beispiel $f = \{t \sin \ln t\}$, so hat $f^{\frac{1}{2}}$ keinen Sinn, da die Gleichung $f = x^2$ keine Lösung hat (s. [1]).

Wir wollen hier uns weder mit dem (bisher ungelösten) Problem der Existenz der Potenz, noch mit den speziellen Fällen, in denen die Erklärung der Potenz gelungen ist ([1]), beschäftigen. Wir begnügen uns mit dem Folgenden: Ist die Potenz a^λ definiert, so muß sie die folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) a^λ *ist eine stetige Operatorfunktion von* λ,

(ii) $a^{\lambda+\mu}=a^\lambda a^\mu$,

(iii) $a^1=a$.

Wir werden erst nachweisen, daß in diesem Falle die folgende Differentiationsregel gilt:

$$Da^\lambda=\lambda a^{\lambda-1}Da, \tag{3.15}$$

wobei D die algebraische Differentiation (und nicht die Differentiation nach dem Parameter λ) bezeichnet:

Ist $\lambda=n$ eine natürliche Zahl, so folgt aus (ii) und (iii) die Gleichung (3. 14), also nach der Regel der algebraischen Derivation des Produktes folgt

$$Da^n=na^{n-1}Da. \tag{3.16}$$

Mittels vollständiger Induktion folgert man aus (ii), daß

$$a^{n\lambda}=(a^\lambda)^n \tag{3.17}$$

ist, falls n eine natürliche Zahl ist.

Setzen wir in (3. 17) $\lambda=\dfrac{1}{n}$ und differenzieren wir beide Seiten, so ist auf Grund von (3. 16)

$$Da=D\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=n\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}Da^{\frac{1}{n}}, \tag{3.18}$$

woraus

$$Da^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}Da \tag{3.19}$$

folgt. Setzt man nämlich in (ii) erst $\lambda=\mu=0$, so gewinnt man $a^0=1$ ($a^0=0$ ist unmöglich), nacher sei in (ii) $\mu=-\lambda$, so bekommt man $1=a^0=a^\lambda a^{-\lambda}$, d. h.

$$a^{-\lambda}=\frac{1}{a^\lambda}. \tag{3.20}$$

Aus (3. 18) folgt auf Grund von (3. 17) und (3. 20) die Relation (3. 19).

Sind m und n natürliche Zahlen, so können wir $Da^{\frac{m}{n}}$ berechnen:

$$Da^{\frac{m}{n}}=D\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=m\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}Da^{\frac{1}{n}}=ma^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}Da=\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}Da.$$

Es gilt also (3. 15) für positive rationale Exponenten. Ist $r=-\lambda$ eine negative rationale Zahl, so folgt auf Grund von (3. 20):

$$Da^r=Da^{-\lambda}=D\frac{1}{a^\lambda}=\frac{a^\lambda D1-\lambda a^{\lambda-1}Da}{a^{2\lambda}}=-\lambda a^{-\lambda-1}Da=ra^{r-1}Da.$$

Wir haben damit (3. 15) für willkürliche rationale Zahlen bewiesen.

Da a^λ eine stetitige Operatorfunktion ist, so besitzt sie die folgende Eigenschaft: Aus $r \to r_0$ folgt $a^r \to a^{r_0}$, ([2] S. 52, Theorem 11., (ii)) also gilt auch $ra^{r-1} \to r_0 a^{r_0-1}$.

Es genügt also

$$(3.21) \qquad Da^r \to Da^{r_0}$$

für

$$r \to r_0$$

zu beweisen.

Wir werden den allgemeineren Satz beweisen:

Satz 3. 6 *Ist die Folge von Operatoren* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *konvergent*: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *so konvergiert auch* Da_n, *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} Da_n = Da.$$

Beweis des Satzes 3. 6. $a_n \to a$ bedeutet, daß ein Operator $q \neq 0$ existiert, derart, daß die Funktionenfolge

$$(3.22) \qquad \{f_n(t)\} = qa_n$$

in jedem Intervall $[0, T]$ gleichmäßig konvergiert: $f_n(t) \Rightarrow f(t)$ für $n \to \infty$, $0 \leqq t \leqq T$, wobei $a = \dfrac{\{f(t)\}}{q}$ ist. Ist $p = \{p(t)\}$ eine willkürliche stetige Funktion aus der Klasse $\mathcal{C}$, so konvergiert mit $\{f_n(t)\}$ auch $\{p(t)\}\{f_n(t)\}$ gleichmäßig ([1]). Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß der Operator q eine stetige Funktion aus der Klasse $\mathcal{C}$ ist.

Differenziert man beide Seiten von (3. 22) algebraisch, so bekommt man:

$$(3.23) \qquad D(qa_n) = a_n Dq + q(Da_n) = \{-tf_n(t)\}.$$

Multiplizieren wir beide Seite von (3. 23) mit q:

$$(3.24) \qquad (qa_n)Dq + q^2(Da_n) = \{-tf_n(t)\}q,$$

d. h.

$$(3.25) \qquad q^2(Da_n) = \{-tf_n(t)\}\{q(t)\} - \{f_n(t)\}\{-tq(t)\}.$$

Ist $f_n(t)$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert auch $\{-tf_n(t)\}$ gleichmäßig gegen $\{-tf(t)\}$, also gilt nach dem schon vorher zitierten Satz

$$\{-tf_n(t)\}\{q(t)\} \Rightarrow \{-tf(t)\}\{q(t)\},$$

und

$$\{f_n(t)\}\{-tq(t)\} \Rightarrow \{f(t)\}\{-tq(t)\},$$

also konvergiert die rechte Seite von (3. 25) zu der stetigen Funktion

$$(Df)q - fDq.$$

Wir haben also bewiesen, daß

$$Da_n \to \frac{(Df)q - fDq}{q^2} = D\frac{f}{q} = Da$$

ist.

Es ist nun Satz 3. 6. *und auch die Behauptung*

$$Da^{\lambda}=\lambda a^{\lambda-1}\,Da$$

für willkürliche reelle λ bewiesen.

Kehren wir nun zum Beweis des Satzes 3. 5 *zurück.*

$$\log a=\int\frac{Da}{a}=\frac{1}{\lambda}\int\frac{\lambda a^{\lambda-1}\,Da}{a^{\lambda}}=\frac{1}{\lambda}\int\frac{Da^{\lambda}}{a^{\lambda}}.$$

Es ist also $\int\frac{Da^{\lambda}}{a^{\lambda}}=\lambda\log a$ d. h. $\log a^{\lambda}$ existiert, und es ist

$$\log a^{\lambda}=\lambda\log a \quad \text{w. z. b. w.}$$

2. Wir gehen nun auf die Inversoperation des Logarithmus über.

Definition 3. 2 *Bezeichen wir mit W die Menge sämtlicher existierenden Ausdrücke der Form* $\int\frac{Da}{a}=w$. *Wenn $w\in W$ gilt, so existiert ein Operator a, so daß* $\log a=w$ *ist. Wir werden diese Zuordnung, die zu w den Operator a ordnet, mit dem Symbol*

$$a=\varepsilon^{w} \tag{3.26}$$

bezeichnen.

Es ist gestattet mit dieser Bezeichnung zu schreiben:

$$\log\varepsilon^{w}=w. \tag{3.27}$$

Satz 3. 7 $$\varepsilon^{w_1+w_2}=\varepsilon^{w_1}\varepsilon^{w_2}.$$

Beweis. Ist $x=\varepsilon^{w_1}\varepsilon^{w_2}$, so ist auf Grund von (3. 10) und (3.27)

$$\log x=\log\varepsilon^{w_1}\varepsilon^{w_2}=\log\varepsilon^{w_1}+\log\varepsilon^{w_2}=w_1+w_2.$$

Dies bedeutet gemäß Definition 3. 2, daß

$$x=\varepsilon^{w_1+w_2}$$

ist.

Satz 3. 8 *Ist β eine willkürlche Zahl, so ist auch $\alpha=\varepsilon^{\beta}$ eine willkürliche Zahl.*

Beweis. Man kann für eine willkürliche Zahl α nach Satz 3. 4 $\log\alpha=\beta$ schreiben, also nach Definition 3. 2

$$\alpha=\varepsilon^{\beta}.$$

Die Operation $\varepsilon^{w}=a$ ordnet einer Menge w, namentlich der Menge sämtlicher Operatoren b, für die $Db=\frac{Da}{a}$ gilt, den Operator a zu. Ist eine b Representante dieser Menge, so können wir $w=b+\beta$ schreiben, wobei β eine willkürliche Zahl ist. Wir können also (3. 26) auf Grund der Sätze 3. 7 und 3. 8 in folgender Form schreiben:

$$a=\varepsilon^{b+\beta}=\varepsilon^{b}\cdot\varepsilon^{\beta}=\alpha\varepsilon^{b} \tag{3.28}$$

wobei α eine willkürliche Zahl ist. (s. [4]. s. 191, Property IV.)

Satz 3. 9 *Es gilt die folgende Differentiationsregel:*

(3. 29) $$D\varepsilon^w = \varepsilon^w Dw.$$

Beweis. Es sei $a = \varepsilon^w$, also $w = \int \frac{Da}{a}$, dann ist $Dw = \frac{Da}{a}$. So gilt

$$D\varepsilon^w = Da = a\frac{Da}{a} = \varepsilon^w Dw.$$

4. §. Anwendung auf lineare Differentialgleichungen

Es sei die Differentialgleichung:

(4. 1) $$P_n(t)y^{(n)}(t) + P_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + P_1(t)y'(t) + P_0(t)y(t) = F(t)$$

gegeben, wo $P_i(t)$ $(i = 0, \dots, n)$ Polynome vom Höchstgrad m sind. Man kann (4. 1) auch in folgender Form schreiben:

(4. 2) $$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} t^\mu y^{(\nu)}(t) = F(t).$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion $y(t)$ in $[0, \infty)$ n-mal stetig differenzierbar ist. Dann ist die Formel

(4. 3) $$\{y^{(\nu)}(t)\} = s^\nu\{y(t)\} - s^{\nu-1}y(0) - \dots - sy^{(\nu-2)}(0) - y^{(\nu-1)}(0)$$

anwendbar, und so bekommt man statt (4. 2) die Gleichung

(4. 4) $$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(-1)^\mu D^\mu[s^\nu y - s^{\nu-1}y(0) - \dots - y^{(\nu-1)}(0)] = \{F(t)\}$$

oder

(4. 5) $$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} b_{\nu\mu} s^\nu D^\mu y = R(s)$$

wobei der Operator $R(s)$ aus $\{F(t)\}$ und den von y freien Gliedern der linken Seite von (4. 4) besteht.

Ist $m = 0$, so geht die Gleichung (4. 1) in eine Gleichung mit Konstanten als Koeffizienten über. (4. 5) wird in diesem Falle zu einer algebraischen Gleichung.

Wir setzen voraus, daß $m = 1$, $n \geqq 1$ ist. In diesem Falle gilt

(4. 6) $$P_i(t) = \alpha_i - t\beta_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

und (4. 5) erhält die folgende Gestalt:

(4. 7) $$P_n(s)Dy + Q_n(s)y = R(s),$$

wobei $P_n(s)$, $Q_n(s)$ Polynome von s mit dem Höchstgrad n sind.

Dividiert man beide Seiten von (4. 7) durch $P_n(s)$, so erhält man

$$Dy+\frac{Q_n(s)}{P_n(s)}\,y=\frac{R(s)}{P_n(s)}\,. \tag{4. 8}$$

Existiert der Operator

$$\varepsilon^{-\int\frac{Q_n(s)}{P_n(s)}} \tag{4. 9}$$

so existiert auch der Ausdruck:

$$\varepsilon^{\int\frac{Q_n(s)}{P_n(s)}}\,. \tag{4. 10}$$

Vorausgesetzt, daß der Operator

$$\frac{R(s)}{P_n(s)}\,\varepsilon^{\int\frac{Q_n(s)}{P_n(s)}} \tag{4. 11}$$

algebraisch integrierbar ist, ist die Lösung der Gleichung (4. 8):

$$y=\varepsilon^{-\int\frac{Q_n(s)}{P_n(s)}}\left\{\int\left[\frac{R(s)}{P_n(s)}\,\varepsilon^{\int\frac{Q_n(s)}{P_n(s)}}\right]+\gamma\right\}. \tag{4. 12}$$

Wir können uns davon leicht überzeugen. Durch Anwendung der Laplace-Transformation erhält man dasselbe Ergebnis. (In diesem Falle bedeutet aber s eine komplexe Veränderliche, und D das Zeichen der Ableitung nach s.)

Wir werden im folgenden durch Beispiele zeigen, daß die Anwendung der Operatorenrechnung noch allgemeinere Ergebnisse liefern kann, als die Laplace-Transformation.

Beispiel 4. 1. Es sei die Gleichung

$$ty'(t)+y(t)=\ln t+1 \tag{4. 13}$$

zu lösen. Diese Aufgabe ist im Buch [3] besprochen. Der Verfasser weißt nach, daß die Gleichung (4. 13) unmittelbar nicht, aber mit Hilfe eines Kunstgriffes mittels der Laplace-Transformation doch lösbar ist.

Die allgemeine Lösung von (4. 13) ist von der Gestalt

$$y=\ln t+\frac{C}{t}. \tag{4. 14}$$

Man kann aber mit Hilfe der Laplace-Transformation nur die partikuläre Lösung

$$y=\ln t \tag{4. 15}$$

gewinnen, da die Funktion $y=\dfrac{C}{t}$ keine Laplace-Transformierte hat.

Kehren wir zur Lösung von (4. 13) mittels der Operatorenrechnung zurück.

Setzen wir nun voraus, daß die Lösung von (4. 13) ein Element der Gruppe $\mathfrak{G}^{(N)}$ ist. Es gibt dann eine natürliche Zahl $n\leqq N$ und eine Funktion $f\in\mathcal{C}^{(N)}$, so daß

$$\{y(t)\}=\int_{*}^{n}f=\left\{\frac{f(t)}{(-t)^n}\right\} \tag{4. 16}$$

ist. Es gilt dann nach Formel (2. 21)

$$\{y'(t)\} = s\{y(t)\} - \sum_{k=0}^{n} \gamma_{k,n} s^{n-k}.$$

Also gilt

$$\{ty'(t)\} = -D\{y'(t)\} = -\{y(t)\} - sD\{y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\gamma}_{k,n} s^{n-k-1} \tag{4. 17}$$

wobei $\bar{\gamma}_{k,n} = (n-k)\gamma_{k,n}$ ist.

Man erhält so statt (4. 13) die Operatorengleichung

$$-sDy - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\gamma}_{k,n} s^{n-k-1} = \{\ln t\} + \{1\} = \{1 + \ln t\}. \tag{4. 18}$$

Die rechte Seite von (4. 18) hat die Form $\{1 + \ln t\} = \left\{\dfrac{-t - t\ln t}{-t}\right\}$; $t \ln t \in \mathfrak{C}^{(1)}$. Es ist also in der linken Seite von (4. 18) $N = n = 1$ zu setzen. So nimmt (4. 18) die Gestalt

$$-sDy - \bar{\gamma}_{0,1} = -\frac{\log s}{s} \tag{4. 19}$$

an, da $\{1\} = \dfrac{1}{s}$ und $\{\ln t\} = -\dfrac{\log s}{s} - \dfrac{1}{s}$ ist. Man bekommt die letzte Formel aus (3. 3)

$$\{\ln t\} = \int_{*} \{-t \ln t\} = \int \{t\} \log s = \int \frac{1}{s^2} \log s = -\frac{\log s}{s} - \frac{1}{s}. \tag{4. 20}$$

Aus (4. 19) gewinnt man

$$Dy = \frac{\log s}{s^2} - \frac{\bar{\gamma}_{0,1}}{s}. \tag{4. 21}$$

Also ist die Lösung auf Grund von (4. 20)

$$y = \int \frac{\log s}{s^2} - \bar{\gamma}_{0,1} \log s = \{\ln t\} + \left\{\frac{-\bar{\gamma}_{0,1}}{-t}\right\}.$$

Wir erhalten also (4. 14), wenn wir noch $\bar{\gamma}_{0,1}$ durch C bezeichnen.

Als zweites Beispiel lösen wir die folgende Gleichung:

$$ty''(t) - (t+1)y'(t) + y(t) = 0 \tag{4. 22}$$

(6, S. 427).

Man gewinnt aus (22) mit Hilfe der folgenden Formeln

$$\begin{aligned}
\{y'(t)\} &= sy - y(0),\\
\{y''(t)\} &= s^2 y - sy(0) - y'(0),\\
\{ty''(t)\} &= -D[s^2 y - sy(0) - y'(0)],\\
\{-ty'(t)\} &= D[sy - y(0)] = y + sDy,
\end{aligned}$$

die Operatorengleichung:

$$(s-s^2)\,Dy+(2-3s)\,y = -2y(0), \tag{4.23}$$

oder die mit $s-s^2$ dividierte Gleichung:

$$Dy+\frac{3s-2}{s(s-1)}\,y = \frac{2y(0)}{s(s-1)}. \tag{4.24}$$

Wir können diese Gleichung mit der *Methode der Variation der Konstanten* lösen:

$$\frac{Dy}{y} = \frac{2-3s}{s(s-1)} = -\frac{2}{s}-\frac{1}{s-1}.$$

Integriert man beide Seiten, so ergibt sich durch Anwendung der Formeln (3. 10) und (3. 13):

$$\log y = -2\log s-\log(s-1) = \log\frac{1}{s^2(s-1)}. \tag{4.25}$$

Es gilt also nach Sätze 3. 1, 3. 2, 3. 3, und 3. 5

$$y = \frac{\gamma}{s^2(s-1)} \tag{4.26}$$

(γ ist eine Zahl). Die Variation der Konstante bedeutet hier, daß γ als ein Operator betrachtet werden soll, der im Allgemeinen keine Zahl ist.

Es ist also $D\gamma\neq 0$, also ist

$$Dy = \frac{D\gamma}{s^2(s-1)}-\frac{3s^2-2s}{[s^2(s-1)]^2}\,\gamma. \tag{4.27}$$

Setzt man (4. 26) und (4. 27) in (4. 24) ein, so ergibt sich

$$D\gamma = 2y(0)\,s \tag{4.28}$$

Die Lösung von (4. 28) ist

$$\gamma = y(0)\,s^2+\gamma_1 \tag{4.29}$$

wobei γ_1 eine willkürliche Zahl ist.

Setzen wir (4. 29) in (4. 26) ein, so erhalten wir die Lösung der Differentialgleichung (4. 22):

$$y = \frac{y(0)s^2+\gamma_1}{s^2(s-1)} = \frac{y(0)}{s-1}+\frac{\gamma_1}{s^2(s-1)} = \tag{4.30}$$

$$= \{y(0)e^t\}+\left\{\gamma_1\int_0^t\int_0^\tau e^\sigma\,d\sigma\,d\tau\right\} = \{c_1(t+1)+c_2e^t\}$$

wo $c_1 = -\gamma_1$, $c_2 = y(0)+\gamma_1$ ist.

Literatur

[1] J. MIKUSINSKI, Operational Calculus, *Pergamon Press-Państowowe* 1959.
[2] A. ERDÉLYI, Operational Calculus and Generalized Functions, *New York*, 1962.
[3] G. DOETSCH, Handbuch der Laplace-Transformation Bd. II., *Basel—Stuttgart*, 1955.
[4] J. MIKUSINSKI, Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus, *Studia Math.* **19** (1960), 187—192.
[5] ST. FENYŐ, Über den Zusammenhang zwischen den Mikusinskischen Operatoren und den Distributionen, *Math. Nachr.* **19** (1958), 161—164.
[6] E. KAMKE, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1., *Leipzig* 1951.

(Eingegangen am 5. März 1963.)