Die Charakterisierung der Determinanten über einem unendlichen Integritätsbereich mittels Funktionalgleichungen

Von GYULA GÁSPÁR (Miskolc)

In einer vorigen Arbeit [2] haben wir ein Axiomensystem für die Determinanten über einem beliebigen kommutativen Körper der Charakteristik 0 gegeben — bestehend aus drei Axiomen — die je eine Eigenschaft der Determinanten im Zusammenhang mit den drei Verknüpfungen von Matrizen — nämlich Addition, Multiplikation und Operatorprodukt — mittels Funktionalgleichungen festgesetzt haben. Nun werden wir beweisen, daß diese Axiome die Determinanten über einem beliebigen unendlichen Integritätsbereich charakterisieren und daß sie voneinander unabhängig sind. Mit Hilfe eines Gegenbeispiels zeigen wir auch, daß die Voraussetzung der Unendlichkeit des Integritätsbereiches unentbehrlich ist.

1. *Es sei $\mathscr{R}=a, b, \ldots$ ein beliebiger unendlicher Integritätsbereich.* Wir bezeichnen mit 0, bzw. 1 das Nullelement, bzw. das Einheitselement von $\mathscr{R}$, mit $A, B, \ldots$ Elemente des vollen Matrizenringes $\mathscr{R}_n$ vom Grade n über $\mathscr{R}$, mit 0, bzw. $E=[\delta_{ik}]$ die Nullmatrix, bzw. die Einheitsmatrix von $\mathscr{R}_n$, mit $E_{rs}(a)\in\mathscr{R}_n$ eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix $E=[\delta_{ik}]$ durch Ersetzung von δ_{rs} mit $a\in\mathscr{R}$ entsteht, mit $P_{k_1k_2\ldots k_n}$ diejenige Matrix $[p_{ik}]$, in der $p_{1k_1}=p_{2k_2}=\ldots=p_{nk_n}=1$ und die übrigen p_{ik} gleich 0 sind, wobei $k_1, k_2, \ldots, k_n$ eine Permutation von $1, ,2, \ldots, n$ bezeichnet.

Man kann leicht einsehen, daß für die Matrizen $P_{k_1k_2\ldots k_n}$ und $E_{rs}(a)$ die Matrizengleichungen

$$\begin{aligned} P_{2134\ldots n}E_{11}(a) &= E_{22}(a)P_{2134\ldots n}, \\ P_{3214\ldots n}E_{11}(a) &= E_{33}(a)P_{3214\ldots n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.1}$$

gültig sind.

Unter den *Zeilenkombinationen* von A und B verstehen wir alle 2^n Matrizen in $\mathscr{R}_n$, für deren i-te Zeile entweder die i-te Zeile von A oder die von B genommen wird ($i=1, 2, \ldots, n$). Entsprechend definieren wir die *Spaltenkombinationen* von A und B.

2. SATZ. *Ist φ eine Abbildung von $\mathscr{R}_n$ in $\mathscr{R}$, die nicht identisch gleich Null ist und den Axiomen*

$$\varphi(A+B) = \Sigma\varphi(C), \tag{a}$$

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B), \tag{b}$$

$$\varphi(aA) = a^n\varphi(A) \tag{c}$$

für alle $A, B \in \mathscr{R}_n$, $a \in \mathscr{R}$ genügt, wobei in (a) *über alle Zeilen- oder Spaltenkombinationen C von A und B zu summieren ist, so ist $\varphi(A)$ die Determinante von A.*

Den Beweis des Satzes führen wir der besseren Übersichtlichkeit halber nur für $n=3$ durch, wodurch aber auch der allgemeine Fall genügend beleuchtet wird. Nach Bedarf machen wir aber auch einige ergänzende Bemerkungen für den allgemeinen Fall.

Wir beginnen mit der folgenden Behauptung:

(A) Es ist $\varphi(A)=0$, wenn eine Zeile oder Spalte von A verschwindet.

Zuerst bemerken wir, daß man

$$\varphi(0)=0 \tag{1. 2}$$

aus (c) für $a=0$ unmittelbar erhält und aus der Voraussetzung, daß die Abbildung nicht identisch gleich Null ist,

$$\varphi(E)=1 \tag{1. 3}$$

folgt. Somit gilt wegen $P_{k_1k_2k_3}^{3!}=E$ und (b):

$$\varphi(P_{k_1k_2k_3}^{3!})=\varphi(P_{k_1k_2k_3})^{3!}=\varphi(E)=1,$$

d. h.

$$\varphi(P_{k_1k_2k_3})\neq 0.$$

Daraus und aus den Gleichungen (1. 1) folgt nach (b), daß die $\varphi(E_{ii}(a))$ einander gleich sind:

$$\varphi(E_{11}(a)) = \varphi(E_{22}(a)) = \varphi(E_{33}(a)). \tag{1. 4}$$

Aus diesen Relationen erhalten wir nach (1. 2), daß

$$\varphi(E_{rr}(0))=0, \qquad (r=1, 2, 3) \tag{1. 5}$$

ist, wenn wir (b) auf die Faktorisation

$$E_{11}(0)\,E_{22}(0)\,E_{33}(0)=0$$

anwenden.

Beachten wir, daß die Faktorisation

$$A=E_{rr}(0)\,A, \quad \text{bzw.} \quad A=A\,E_{rr}(0)$$

gilt, wenn die r-te Zeile, bzw. Spalte von A verschwindet, so erhalten wir nach (b) und (1. 5) die Behauptung (A).

Nun beweisen wir die folgende wichtige Formel:

$$\begin{aligned}(B)\qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{23}\\ 0 & a_{32} & 0\end{bmatrix}\right)+\\ &+\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0\\ a_{21} & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0\\ 0 & 0 & a_{23}\\ a_{31} & 0 & 0\end{bmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13}\\ a_{21} & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & 0\end{bmatrix}\right)+\\ &+\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13}\\ 0 & a_{22} & 0\\ a_{31} & 0 & 0\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Zu diesem Zwecke wenden wir (a) mit

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

an. Wegen (A) gilt:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\right).$$

Diese Formel enstand unter Auszeichnung des Elements a_{11}, offenbar gelten aber weitere acht ähnliche Formeln, die man je unter Auszeichnung der Elemente $a_{12}, \ldots, a_{33}$ erhält. Werden diese rechts wiederholt angewendet, so erhält man schließlich auf der rechten Seite nur Matrizen, die in jeder Spalte höchstens ein nicht verschwindendes Element enthalten. Somit entsteht unter Berücksichtigung von (A) die zu beweisende Gleichung (B).

Nun zeigen wir:

$$(1.\ 6)\qquad \big(E_{ii}(a)\big)=a,$$

$$(1.\ 7)\qquad \big(E_{ik}(a)\big)=1,\quad (i\neq k),$$

$$(1.\ 8)\qquad (P_{k_1k_2k_3})=1,\ \text{bzw.}\ -1,$$

je nachdem k_1, k_2, k_3 eine gerade oder ungerade Permutation von 1, 2, 3 ist.

Zuerst bemerken wir, daß man nach (c) und (1. 3)

$$(1.\ 9)\qquad \varphi(aE)=a^3\varphi(E)=a^3$$

erhält. Somit folgt nach (1. 4) und (1. 9) aus der Matrizengleichung

$$E_{11}(a)E_{22}(a)E_{33}(a)=aE,$$

daß mit einer im Integritätsbereich $\mathscr{R}$ vorhandenen dritten Einheitswurzel ϱ

$$(1.\ 10)\qquad \varphi\big(E_{rr}(a)\big)=\varrho a,\qquad (r=1,2,3)$$

gilt. Wendet man nun (a) zur Bestimmung von

$$\varphi\big((a+1)E\big)=\varphi(aE+E)$$

an, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (c), (1. 3), (1. 10) und

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E_{11}(a)E_{22}(a),\quad \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}=E_{11}(a)E_{33}(a),\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}=E_{22}(a)E_{33}(a),$$

die folgende Gleichung für a:

$$(1.\ 11)\qquad (a+1)^3=a^3+3\varrho^2a^2+3\varrho a+1.$$

Gilt in (1. 10) $\varrho\neq 1$, so ist der Grad dieser Gleichung positiv, da in diesem Falle der Koeffizient von a gewiß nicht verschwindet,[1]) wenn die Charakteristik von $\mathscr{R}$ nicht 3 ist. Daraus folgt, daß es nur endlich viele Elemente $a \in \mathscr{R}$ gibt, für welche in (1. 10) $\varrho \neq 1$ gelten kann. Demgemäß ergibt sich[2]) für ein passendes Element $d \in \mathscr{R}$

$$\varphi\big(E_{11}(a-d)\big) = a-d, \quad \varphi\big(E_{11}(d)\big) = d. \tag{1. 12}$$

Dann aber erhalten wir auf Grund von

$$\begin{bmatrix} (a-d) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Rücksicht auf (a), (A) und (1. 12)

$$\varphi\big(E_{11}(a)\big) = a-d+d = a.$$

Dies ergibt zusammen mit (1. 4) die Richtigkeit von (1. 6).

Ist die Charakteristik von $\mathscr{R}$ 3, so ist $\sqrt[3]{1}$ eindeutig bestimmt, und in diesem Falle ist nur $\varrho = 1$ möglich.

Wir bemerken, daß das Beweisverfahren von (1. 6) bei beliebigen Grad n von $\mathscr{R}$ etwas umständlicher ist. In diesem Falle kann man den Beweis von (1. 6) folgendermaßen eingehend darlegen.

Es sei die Charakteristik von $\mathscr{R}$ $p > 0$ und $p \mid n$. Dann gilt die Gleichung

$$n = mp^e,$$

wobei $m \geqq 1$, $e \geqq 1$ ganze Zahlen sind. Wir können die Gleichung für a in der Form.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (\varrho^{n-i} - 1) a^{n-i} = 0 \tag{1. 13}$$

schreiben.

Beachten wir die Relationen

$$p \,\Big|\, \binom{n}{i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p^e - 1); \quad p \nmid \binom{n}{p^e},$$

so erhalten wir, daß der genaue Grad der Gleichung (1. 13)

$$n - p^e = p^e(m-1)$$

ist, wobei auch

$$\varrho^{p^e(m-1)} \neq 1$$

vorausgesetzt wird.

Im Falle $m = 1$ ist der Grad der Gleichung (1. 13) Null, aber es ist $\varrho = 1$ für $n = p^e$ wegen der Eindeutigkeit von $\sqrt[p^e]{1}$.

---

[1]) Hier wird $n > 1$ für den Grad n von $\mathscr{R}_n$ vorausgesetzt. Das ist erlaubt, da in dem Falle $n = 1$ die Richtigkeit unseres Satzes unmittelbar klar ist. (Übrigens ergibt schon (1.10) in diesem trivialen Falle die zu beweisende Gleichung (1. 6).).

[2]) Man beachte, daß $\mathscr{R}$ ein unendlicher Integritätsbereich ist.

Ist $m > 1$ und wird auch $\varrho^{p^e(m-1)} = 1$ erfüllt, so folgt aus dieser Gleichung und aus der Gleichung $\varrho^{p^e m} = 1$, $(p^e m = n)$, daß $\varrho^{p^e} = 1$, also wieder $\varrho = 1$ ist.

In allen anderen Fällen ist der Grad der Gleichung (1. 13) positiv, und man kann das vorher gegebenen Beweisverfahren anwenden.

Die Anwendung von (a) auf $A = E$, $B = E_{ik}(a) - E$, $(i \neq k)$ ergibt nach (A):

$$\varphi(E_{ik}(a)) = \varphi(E) = 1,$$

womit (1. 7) bewiesen ist.

Da die Matrizen $P_{k_1 k_2 k_3}$ eine mit der vollen Permutationsgruppe von 1, 2, 3 isomorphe Gruppe bilden, so genügt es wegen (b) wenn wir (1. 8) für eine solche Matrix $P_{k_1 k_2 k_3}$ beweisen, die einer Transposition entspricht. Nehmen wir z. B. P_{213}. Es gilt

$$E_{21}(-1) E_{12}(1) E_{21}(-1) P_{213} = E_{22}(-1).$$

Wegen (1. 6), (1. 7) und (b) folgt hieraus $\varphi(P_{213}) = -1$, womit (1. 4) bewiesen ist.

Nunmehr bezeichne (a, b, c) die Diagonalmatrix mit der Hauptdiagonale a, b, c. Wegen (1. 6), (b) und $(a, b, c) = E_{11}(a) E_{22}(b) E_{33}(c)$ bekommt man

$$\varphi((a, b, c)) = abc. \tag{1. 14}$$

Da für $A = [a_{ik}]$ nach (B)

$$\varphi(A) = \sum_{k_1, k_2, k_3} \varphi((a_{1k_1}, a_{2k_2}, a_{3k_3}) P_{k_1 k_2 k_3})$$

gilt, wobei über alle Permutationen k_1, k_2, k_3 von 1, 2, 3 zu summieren ist, so folgt aus (b), (1. 14), (1. 8) die Übereinstimmung von $\varphi(A)$ mit der Determinante von A. Somit haben wir den Satz bewiesen.

3. Nun werden wir mit Hilfe geeigneter Gegenbeispiele zeigen, daß die Axiome (a), (b), (c) voneinander unabhängig sind.

Es sei $\mathscr{R}$ der Integritätsbereich der Zahlen

$$m = \sum_{i=0}^{r} e_i \pi^i$$

wobei e_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$ eine ganze Zahl, r eine nichtnegative ganze Zahl ist, und π die Ludolf'sche Zahl bezeichnet. Wollen wir die Abhängigkeit der Zahl m von einer beliebigen nicht-ganzen Zahl x zeigen, so können wir $m = m(x)$ schreiben Also schreiben wir $m(\pi)$, bzw. $m(\pi^2)$ für $x = \pi$, bzw. für $x = \pi^2$.

Es sei $\mathscr{R}_2$ der volle Matrizenring vom Grade 2 über $\mathscr{R}$. Wir können mit $A = A(x)$, $(A \in \mathscr{R}_2)$ die Abhängigkeit der Matrix A von einer beliebigen nicht-ganze Zahl x zeigen. Also schreiben wir $A(\pi)$, bzw. $A(\pi^2)$ für $x = \pi$, bzw. für $x = \pi^2$.

(G_1) Die Abbildung

$$\varphi_{1,2}[A(\pi)] = \det A(\pi^2), \qquad (A(\pi) \in \mathscr{R}_2) \tag{2. 1}$$

genügt den Axiomen (a), (b), aber das Axiom (c) ist für $\varphi_{1,2}$ nicht gültig.

Wir erhalten nämlich nach (2. 1) und unter Anwendung des einschlägigen Satzes der Determinantentheorie, daß

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2}[A(\pi) + B(\pi)] &= \det [A(\pi^2) + B(\pi^2)] = \\ &= \sum \det C(\pi^2) = \sum \varphi_{1,2}[C(\pi)]\end{aligned}$$

ist, wobei in der ersten Summe über alle Zeilen-oder Spaltenkombinationen $C(\pi^2)$ von $A(\pi^2)$ und $B(\pi^2)$ und demgemäß in der zweiten Summe über alle Zeilen-oder Spaltenkombinationen $C(\pi)$ von $A(\pi)$ und $B(\pi)$ zu summieren ist. Also genügt $\varphi_{1,2}$ dem Axiom (a).

Nach (2. 1) und mit der Anwendung des bekannten Multiplikationsgesetzes der Determinanten ergibt sich

$$\varphi_{1,2}[A(\pi)B(\pi)] = \det[A(\pi^2)B(\pi^2)] = \det A(\pi^2)\det B(\pi^2) = \\ = \varphi_{1,2}[A(\pi)]\varphi_{1,2}[B(\pi)],$$

also $\varphi_{1,2}$ genügt dem Axiom (b).

Aber das Axiom (c) ist für $\varphi_{1,2}$ nicht gültig, weil z. B.

$$\varphi_{1,2}[D(\pi)] \neq \pi^2\varphi_{1,2}(E)$$

ist, wobei

$$D(\pi) = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \pi E$$

ist. Nach (2. 1) erhalten wir nämlich, daß $\varphi_{1,2}[D(\pi)] = \det D(\pi^2) = \pi^4$ und $\varphi_{1,2}(E) = \det E = 1$ sind.

(G_2) Die Abbildung

$$\text{(2. 2)} \qquad \varphi_{1,3}(A) = \operatorname{perm} A \overset{\text{def}}{=} ad + bc, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

genügt den Axiomen (a), (c), aber das Axiom (b) ist für $\varphi_{1,3}$ nicht gültig.

Nach der Definition (2. 2) erhalten wir, daß

$$\varphi_{1,3}(A' + A'') = (a' + a'')(d' + d'') + (b' + b'')(c' + c'') = \\ = (a'd' + b'c') + (a'd'' + c'b'') + (a''d' + c''b') + (a''d'' + b''c'') = \Sigma\varphi_{1,3}(C)$$

ist, wobei

$$A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}$$

sind und über alle Spaltenkombinationen C von A' und A'' zu summieren ist. (Nehmen wir die Glieder in der Summe in einer geeigneten Anordnung, so erhalten wir, daß über alle Zeilenkombinationen von A' und A'' zu summieren ist.) Also genügt $\varphi_{1,3}$ dem Axiom (a).

Wir bekommen auch, daß

$$\varphi_{1,3}(aA) = a^2(ad + bc) = a^2\varphi_{1,3}(A)$$

ist, also $\varphi_{1,3}$ dem Axiom (C) genügt.

Aber das Axiom (c) ist für $\varphi_{1,3}$ nicht gültig. Nehmen wir z. B. das Produkt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und wenden wir die Abbildung $\varphi_{1,3}$ an, so erhalten wir, daß

$$\varphi_{1,3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \varphi_{1,3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1, \quad \varphi_{1,3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

sind, also

$$\varphi_{1,3}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) \neq \varphi_{1,3}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\varphi_{1,3}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)$$

ist.

(G_3) Die Abbildung

$$\varphi_{2,3}(A) = |\det A|, \qquad (A \in \mathscr{R}_2), \tag{2. 3}$$

genügt den Axiomen (b), (c), aber das Axiom (b) ist für $\varphi_{2,3}$ nicht gültig.

Nach den bekannten Sätzen der Determinantentheorie und des Betrags erhalten wir nämlich, daß

$$|\det(AB)| = |\det A \cdot \det B| = |\det A| \cdot |\det B|,$$

$$|\det(aA)| = |a^2 \det A| = a^2\,|\det A|,$$

$$\left|\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)\right| = 0$$

und

$$\left|\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\right| + \left|\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\right| + \left|\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)\right| + \left|\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)\right| = 4$$

ist.

4. Nun werden wir zeigen, daß *unser Satz nicht mehr gültig sein muß, wenn der Integritätsbereich $\mathscr{R}$ endlich ist.*

Ist der Integritätsbereich $\mathscr{R}$ endlich, dann ist er ein *endlicher Körper* ([3], 70). In diesem Falle bezeichnen wir ihn mit $\mathfrak{K}$.

Wir nehmen jetzt den Körper $\mathfrak{K} = 0, 1, \varrho, \varrho^2$, der vier Elemente enthält ([3], S. 494., Satz 306., für $p=2$, $n=2$).

Der Körper $\mathfrak{K}$ hat die folgende Additions-, bzw. Multiplikationstabelle:

$+$	0	1	ϱ	ϱ^2
0	0	1	ϱ	ϱ^2
1	1	0	ϱ^2	ϱ
ϱ	ϱ	ϱ^2	0	1
ϱ^2	ϱ^2	ϱ	1	0

, bzw.

$\times$	0	1	ϱ	ϱ^2
0	0	0	0	0
1	0	1	ϱ	ϱ^2
ϱ	0	ϱ	ϱ^2	1
ϱ^2	0	ϱ^2	1	ϱ

.

Der Körper $\mathfrak{K}$ hat die Charakteristik 2: $2a=0$, $a \in \mathfrak{K}$. Wir bezeichnen mit $A, B, \dots$ Elemente des vollen Matrizenringes $\mathfrak{K}_3$ vom Grade 3 über $\mathfrak{K}$.

Es sei φ_0 die folgende Abbildung von $\mathfrak{K}_3$ in $\mathfrak{K}$:

$$\varphi_0(X) = \sum_{k_1, k_2, k_3} x_{1k_1}^2 x_{2k_2}^2 x_{3k_3}^2, \qquad (X = [x_{ik}] \in \mathfrak{K}_3), \tag{3. 1}$$

wobei über alle Permutationen k_1, k_2, k_3 von 1, 2, 3 zu summieren ist.

Wir werden zeigen, daß die Abbildung φ_0 den Axiomen (a), (b), (c) genügt und $\varphi_0(X) \not\equiv \det X$ ist.

Nach der Definition (3. 1) erhalten wir für die Matrizen $A=[a_{ik}]$, $B=[b_{ik}]\in\mathfrak{K}_3$:

$$\varphi_0(A+B)=\sum_{k_1,k_2,k_3}(a_{1k_1}+b_{1k_1})^2(a_{2k_2}+b_{2k_2})^2(a_{3k_3}+b_{3k_3})^2. \tag{3. 2}$$

Beachten wir, daß die Charakteristik des Körpers $\mathfrak{K}$ 2 ist, so wird

$$\begin{aligned}\varphi_0(A+B)&=\sum_{k_1,k_2,k_3}(a^2_{1k_1}+b^2_{1k_1})(a^2_{2k_2}+b^2_{2k_2})(a^2_{3k_3}+b^2_{3k_3})=\\&=\sum\varphi_0(C),\end{aligned} \tag{3. 3}$$

wobei über alle Zeilen — oder Spaltenkombinationen C von A und B zu summieren ist.

Also: φ_0 genügt dem Axiom (a).

Wir beachten nun, daß jede Matrix $A\in\mathfrak{K}_3$ sich folgendermaßen faktorisieren läßt ([1], 30.):

$$A=B_1DB_r, \tag{3. 4}$$

wobei die Matrizen B_1 und B_r Produkte von Matrizen $E_{rs}(t)$ sind und $D=[v_{ik}]$, ($v_{ii}=1$ oder 0 für $1\leqq i\leqq 2$ und $v_{33}=v\in\mathfrak{K}$) eine Diagonalmatrix ist.

Jetzt wollen wir die Gültigkeit von (b) beweisen.

Zuerst werden wir zeigen, daß die Abbildung φ_0 dem Axiom (b) genügt, wenn die Matrix $A=[a_{ik}]$, bzw. $B=[b_{ik}]$ eine Matrix $E_{rs}(t)$ ist:

$$\varphi_0[E_{rs}(t)B]=\varphi_0[E_{rs}(t)]\varphi_0(B), \tag{3. 5}$$

bzw.

$$\varphi_0[AE_{rs}(t)]=\varphi_0(A)\varphi_0[E_{rs}(t)]. \tag{3. 6}$$

Man kann sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit in dem Beweis von (3. 5) auf den Fall $r=1, s=2$ beschränken. Dann erhalten wir nach (3. 1), daß

$$\begin{aligned}\varphi_0[E_{12}(t)B]&=\sum_{k_1,k_2,k_3}(b_{1k_1}+tb_{2k_1})^2b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}=\\&=\sum_{k_1,k_2,k_3}b^2_{1k_1}b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}+t^2\sum_{k_1,k_2,k_3}b^2_{2k_1}b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}\end{aligned} \tag{3. 7}$$

ist, weil der Körper $\mathfrak{K}$ die Charakteristik 2 hat. Aber

$$\sum_{k_1,k_2,k_3}b^2_{2k_1}b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}=0,$$

weil in der Summe neben jedem Glied $b^2_{2k_1}b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}$ auch das Glied $b^2_{2k_2}b^2_{2k_1}b^2_{3k_3}$ vorkommt und

$$b^2_{2k_1}b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}+b^2_{2k_2}b^2_{2k_1}b^2_{3k_3}=2b^2_{2k_1}b^2_{2k_2}b^2_{3k_3}=0$$

ist.

So bekommen wir, daß

$$\varphi_0[E_{12}(t)B]=\varphi_0(B)$$

gilt. Aber nach (3. 1) ist

$$\varphi_0[E_{12}(t)]=1 \tag{3. 8}$$

und somit beenden wir den Beweis von (3. 5).

Der Beweis von (3. 6) ist ähnlich.

Wir beachten nun die Faktorisationen

$$A = B_1^{(1)} D_1 B_r^{(1)}, \quad B = B_1^{(2)} D_2 B_r^{(2)}.$$

Nach (3. 5) und (3. 6) erhalten wir:

$$\varphi_0(A) = \varphi_0(D_1), \quad \varphi_0(B) = \varphi_0(D_2), \tag{3. 9}$$

wobei höchstens nur das letzte Element in der Hauptdiagonale von D_1 bzw. D_2 von 0 oder 1 verschieden sein kann. Auf ähnliche Weise bekommen wir:

$$\varphi_0(AB) = \varphi_0(D_1 B_r^{(1)} B_1^{(2)} D_2). \tag{3. 10}$$

Jetzt zeigen wir, daß

$$\varphi_0(DC) = \varphi_0(D)\varphi_0(C) \tag{3. 11}$$

gilt, wobei $D = (e_1, e_2, v)$ eine Diagonalmatrix ist, in der e_i nur 0 oder 1 ist ($i = 1, 2$) und $v \in \mathfrak{K}$, $C = [c_{ik}] \in \mathfrak{K}_3$ sind.

Es gilt nämlich nach (3. 1), daß

$$\varphi_0(DC) = \sum_{k_1, k_2, k_3} (e_1 c_{1k_1})^2 (e_2 c_{2k_2})^2 (v c_{3k_3})^2 = e_1^2 e_2^2 v^2 \varphi_0(C)$$

und

$$\varphi_0(D) = e_1^2 e_2^2 v^2 \tag{3. 12}$$

sind.

So erhalten wir aus (3. 10) nach (3. 5) und (3. 11):

$$\varphi_0(D_1 B_r^{(1)} B_1^{(2)} D_2) = \varphi_0(D_1 D_2). \tag{3. 13}$$

Schreiben wir:

$$D_1 = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, v_1), \quad D_2 = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, v_2),$$

dann ist

$$D_1 D_2 = (e_1^{(1)} e_1^{(2)}, e_2^{(1)} e_2^{(2)}, v_1 v_2).$$

Nun bekommen wir nach (3. 12):

$$\varphi_0(D_1 D_2) = \varphi_0(D_1)\varphi_0(D_2). \tag{3. 14}$$

Die Abbildung φ_0 genügt also dem Axiom (*b*) wegen (3. 9), (3. 10), (3. 13) und (3. 14).

Aber die Abbildung φ_0 genügt auch dem Axiom (*c*), weil wir nach (3. 1)

$$\varphi_0(tA) = \sum_{k_1, k_2, k_3} (t a_{1k_1})^2 (t a_{2k_2})^2 (t a_{3k_3})^2 =$$
$$= t^6 \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{1k_1}^2 a_{2k_2}^2 a_{3k_3}^2 = t^3 \varphi_0(A)$$

wegen $t^6 = t^3$ erhalten. (Im Körper $\mathfrak{K}$ ist $t^6 = t^3 = 0$ oder $t^6 = t^3 = 1$!)

Endlich bemerken wir, daß $\varphi_0(A) \not\equiv \det A$ gilt, weil z. B.

$$\varphi_0[E_{11}(\varrho)] = \varrho^2 \neq \det E_{11}(\varrho) = \varrho$$

ist.

Literatur

[1] J. Dieudonné, Les déterminants sur un corps non commutatif, *Bull. Soc. Math. France* **71** (1943), 27—45.
[2] Gy. Gáspár, Eine neue Definition der Determinanten, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1954), 257—260.
[3] L. Rédei, Algebra I. *Leipzig*, 1959.

(Eingegangen am 11. März 1963.)