Über die de la Vallée-Poussinschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER (Szeged)

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Die n-te Partialsumme, bzw. das n-te de la Vallèe-Poussinsche Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

wird mit $s_n(x)$, bzw. $V_n(x)$ bezeichnet, d. h. ist

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x), \quad V_n(x) = \frac{s_n(x) + \ldots + s_{2n-1}(x)}{n}.$$

Es sei $\{w_n\}$ eine solche positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche im Falle

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 w_n^2 < \infty$$

die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Reihe (1) in (a, b) fast überall derart sichert, daß die Beträge der $(C, 1)$-Mittel der Reihe (1) unter einer quadratisch-integrierbaren Funktion bleiben. Im Folgenden bezeichnet $f(x) \in L^2(a, b)$ die durch den Riesz—Fischerschen Satz der Reihe (1) zugeordnete Funktion.

K. TANDORI [3] hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $\{\lambda_k\}$ eine positive, monoton ins Unendliche strebende Zahlenfolge mit $k\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) = o\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$, für welche die Folge $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\}$ von unten konvex ist. Ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 w_n^2 \lambda_n^2 < \infty,$$

dann gilt $f(x) - V_n(x) = o_x\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ fast überall, und besteht $\lambda_n |f(x) - V_n(x)| \leqq F(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ mit einer $F(x) \in L^2$.

In dieser Note werden wir u. a. diesen Satz von K. Tandori verschärfen. Wir beweisen nämlich die folgenden Sätze:

Satz I.*) *Es sei* $\{l_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit* $l_{2^n+1}=l_{2^n+2}=\ldots=l_{2^{n+1}}$. *Ferner sei* $\{c_n\}$ *eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 l_n^2 < \infty.$$

Ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n l_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

auf einer Menge $E\subset(a,b)$ $(C,1)$*-summierbar zu* $f(x)$*, so approximieren die de la Vallée-Poussinschen Mittel* $V_n(x)$ *der Reihe* (1) *die Funktion* $f(x)$ *auf E fast überall mit dem Annäherungsgrad* l_n^{-1}*, d. h.*

$$V_n(x)-f(x) = o_x\left(\frac{1}{l_n}\right).$$

Satz II. *Sichert die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varrho_n^2 < \infty \qquad (\varrho_n \geqq 1) \tag{3}$$

die $(C,1)$*-Summierbarkeit der Reihe* (1) *für jede die Bedingung* (3) *erfüllenden Koeffizientenfolgen* $\{c_n\}$ *auf einer Menge* $E\subset(a,b)$ *fast überall, so folgt aus dem Erfülltsein der Bedingungen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varrho_n^2 \mu_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \mu_n \leqq \mu_{n+1},$$

daß die de la Vallée-Poussinschen Mittel der Orthogonalreihe (1) *auf E fast überall mit dem Annäherungsgrad*

$$V_n(x)-f(x) = o_x\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \tag{4}$$

approximieren.

Der folgende Satz behauptet, daß die $(C,1)$-Summierbarkeit garantierende Folge $\{\varrho_n\}$ in gewissem Fall unnötig ist.

---

*) Wir erwähnen, daß dieser Satz und ebenfalls die folgenden Sätze auch auf die sogenannten Riesz—de la Vallée-Poussinschen Mittel:

$$V_n(\{\lambda(n)\};x) = \sum_{\nu=n}^{2n-1} \frac{(\lambda(\nu+1)-\lambda(\nu))\,s_\nu(x)}{\lambda(2n)-\lambda(n)}$$

(wobei $\lambda(\omega)$ $(\omega\geqq 0)$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Funktion mit $\lambda(0)=0$ und $\lambda(n)\to\infty$) mit sinnmäßigen Änderungen gelten. Analoge Sätze können wir in der Arbeit [2] finden, die sich auf Rieszschen Mittel beziehen. Aus diesen Sätzen und aus den Ergebnissen der vorliegenden Note kann man die nötigen Änderungen unmittelbar sehen.

Wie es aus dem Beweis des Satzes I ersichtlich sein wird, insofern wir auch die Majorisierbarkeit der $(C,1)$-Mittel, durch eine quadratisch-integrierbare Funktion, erfordern, dann gibt es eine quadratisch-integrierbare Funktion $F(x)$ mit der folgenden Eigenschaft: $l_n|V_n(x)-f(x)|\leqq F(x)$.

Analoge Behauptungen können wir auch in den folgenden Sätzen bestimmen.

Satz III. *Gelten*

(5) $$\mu_n \leqq \mu_{n+1} \quad und \quad \sum_{n=0}^{k} \mu_{2^n}^2 = O(\mu_{2^k}^2),$$

dann folgt schon aus der Bedingung

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \mu_n^2 < \infty,$$

daß die Mittel $V_n(x)$ der Orthogonalreihe (1) *in* (a, b) *fast überall mit dem Annäherungsgrad* (4) *approximieren.*

Die Spezialfälle $\mu_n = n^\gamma$ mit $\gamma > 0$ und $\mu_n = q^n$ mit $q > 1$ des Satzes III verdienen eigens ausgesprochen zu werden:

Unter der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\gamma} < \infty, \quad bzw. \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 q^{2n} < \infty$$

gilt die Beziehung

$$V_n(x) - f(x) = o_x\left(\frac{1}{n^\gamma}\right), \quad bzw. \quad V_n(x) - f(x) = o_x\left(\frac{1}{q^n}\right).$$

Gewisse Sätze gelten für die Größenordnung der Mittel $V_n(x)$ der Orthogonalreihe (1).

Satz IV. *Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge mit $l_{2^n+1} = l_{2^n+2} = \ldots = l_{2^{n+1}}$. Ferner sei $\{c_n\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 l_n^{-2} < \infty.$$

Ist die Reihe

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n l_n^{-1} \varphi_n(x)$$

auf einer Menge $E \subset (a, b)$ $(C, 1)$-summierbar, so folgt für die Mittel $V_n(x)$ der Reihe (1) *auf E fast überall die Abschätzung*

(8) $$V_n(x) = o_x(l_{2n}).$$

Aus dem Satz IV ergibt sich der folgende

Satz V. *Sichert die Bedingung* (3) *die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Reihe* (1) *für jede die Bedingung* (3) *erfüllenden Koeffizientenfolgen $\{c_n\}$ auf einer Menge $E \subset (a, b)$, so folgt aus den Bedingungen*

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \gamma_n^2 < \infty, \quad \frac{\varrho_n}{\gamma_n} \leqq \frac{\varrho_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \quad und \quad \frac{\varrho_n}{\gamma_n} \to \infty$$

für die Mittel $V_n(x)$ der Reihe (1) *auf E fast überall die Abschätzung*

$$V_n(x) = o_x\left(\frac{\varrho_{4n}}{\gamma_{4n}}\right).$$

In einem vorigen Aufsatz [2] hat Verfasser ähnliche Sätze für die Rieszschen Mittel bewiesen; die vorliegenden Sätze werden wir ähnlicherweise beweisen.

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis der Sätze werden wir einige Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz I. *Sind $\{u_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit $\lambda_{2^n+1}=\ldots=\lambda_{2^{n+1}}$, so folgt aus der Konvergenz der Folge der 2^n-ter Partialsummen $s^*_{2^n}$ der Reihe $\Sigma u_n\lambda_n$ die Konvergenz der Folge der 2^n-ter Partialsummen s_{2^n} der Reihe Σu_n, und gilt die Beziehung*

$$s_{2^n}-s = o\left(\frac{1}{\lambda_{2^{n+1}}}\right),$$

wobei s der Grenzwert von s_{2^n} ist.

Hilfssatz II. *Es sei $\{u_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge mit $\lambda_{2^n+1}=\ldots=\lambda_{2^{n+1}}$. Dann folgt aus der Konvergenz der 2^n-ter Partialsummen $\tilde{s}_{2^n}$ der Reihe $\Sigma u_n\lambda_n^{-1}$ die Abschätzung*

$$\sum_{k=0}^{2^n} u_k = o(\lambda_{2^n}).$$

Diese Hilfssätze wurden in [2] bewiesen.

Hilfssatz III. *Damit die Orthogonalreihe* (1) *mit $\Sigma c_n^2<\infty$ auf einer Menge E fast überall $(C, 1)$-summierbar sei, ist notwendig und hinreichend die Konvergenz der Partialsummen $s_{2^n}(x)$ auf E fast überall.*

Dieser Hilfssatz wurde von S. Kaczmarz [1] bewiesen.

Hilfssatz IV. *Gilt* (5), *dann folgt aus der Bedingung* (6), *daß die Partialsummen $s_{2^n}(x)$ der Reihe* (1) *in (a, b) fast überall mit dem Annäherungsgrad*

$$s_{2^n}(x)-f(x) = o_x\left(\frac{1}{\mu_{2^n}}\right) \tag{1. 1}$$

approximieren.

Beweis. Nach (5) und (6) gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{2^n}^2\int_a^b [s_{2^n}(x)-f(x)]^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\mu_{2^n}^2\sum_{k=2^n+1}^{\infty} c_k^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\mu_{2^n}^2\sum_{m=n}^{\infty}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2\sum_{n=0}^{m}\mu_{2^n}^2 =$$

$$= O(1)\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{2^m}^2\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2<\infty,$$

also konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2^n}^2 [s_{2^n}(x) - f(x)]^2$$

in (a, b) fast überall, und so besteht (1. 1) fast überall.

Damit haben wir den Hilfssatz IV bewiesen.

Hilfssatz V. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Dann folgt aus der Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^2 < \infty \tag{1. 2}$$

die Abschätzung

$$V_k(x) - s_{2^{n+1}}(x) = o_x\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \tag{1. 3}$$

für jedes n und k mit $2^n < k \leq 2^{n+1}$ in (a, b) fast übrall.

Beweis. Offenbar ist

$$V_n(x) = s_n(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n-k) c_k \varphi_k(x);$$

daraus ergibt sich mit einfacher Rechnung die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^n}^2 \int_a^b [V_{2^n}(x) - s_{2^n}(x)]^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^n}^2 \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} (2^{n+1} - k)^2 c_k^2 =$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^n}^2 \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 < \infty.$$

So ergibt sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^n}^2 [V_{2^n}(x) - s_{2^n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert, also fast überall

$$s_{2^n}(x) - V_{2^n}(x) = o_x\left(\frac{1}{\lambda_{2^n}}\right) \tag{1. 4}$$

gilt.

Mit einfacher Rechnung ergibt sich weiterhin nach (1. 2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot n \int_a^b \left(V_n(x) - V_{n-1}(x)\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot n \left\{ \frac{1}{n^2 (n-1)^2} \sum_{k=n}^{2n-3} k^2 c_k^2 + \frac{2^2}{n^2} c_{2n-2}^2 + \frac{1}{n^2} c_{2n-1}^2 \right\} =$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} c_k^2 = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^2 < \infty.$$

Daraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\lambda_n^2 (V_n(x) - V_{n-1}(x))^2$$

fast überall konvergiert, und so gilt

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n\lambda_n^2 (V_n(x) - V_{n-1}(x))^2 = o_x(1) \tag{1. 5}$$

fast überall.

Es sei $2^m < n < 2^{m+1}$. Dann ist nach (1. 5)

$$\begin{aligned} |V_n(x) - V_{2^{m+1}}(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{2^{m+1}} (V_k(x) - V_{k-1}(x)) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{2^{m+1}} \sqrt{k}\lambda_k (V_k(x) - V_{k-1}(x)) \frac{1}{\sqrt{k}\lambda_k} \right| \leqq \end{aligned} \tag{1. 6}$$

$$\leqq \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} k\lambda_k^2 (V_k(x) - V_{k-1}(x))^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \right\}^{1/2} \frac{1}{\lambda_{n+1}} = o_x\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

fast überall.

Auf Grund von (1. 4) und (1. 6) ergibt sich die Relation (1. 3), wie wir es behauptet haben.

§ 2. Über die Approximation mit de la Vallée-Poussinschen Mitteln

Beweis von Satz I. Aus den Bedingungen des Satzes I folgt nach dem Hilfssatz III, daß die 2^n-ten Partialsummen der Reihe (2) auf der Menge E fast überall konvergieren; so können wir den Hilfssatz I für die Reihe (2) anwenden. Daraus ergibt sich auf E fast überall der Annäherungsgrad

$$s_{2^m}(x) - f(x) = o_x\left(\frac{1}{l_{2^{m+1}}}\right). \tag{2. 1}$$

Nun wenden wir den Hilfssatz V mit $\lambda_n = l_n$ an. So ergibt sich die Abschätzung

$$V_n(x) - s_{2^{m+1}}(x) = o_x\left(\frac{1}{l_n}\right) \tag{2. 2}$$

für jedes n und m mit $2^m < n \leqq 2^{m+1}$ in (a, b) fast überall. Aus (2. 1) und (2. 2) ergibt sich die Behauptung des Satzes I.

Beweis von Satz II. Es sei

$$\tilde{\mu}_n = \mu_{2^m+1} \quad \text{für} \quad 2^m + 1 \leqq n \leqq 2^{m+1}.$$

Nach den Bedingungen des Satzes ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\mu}_n \varphi_n(x) \tag{2. 3}$$

auf der Menge E fast überall $(C, 1)$-summierbar; daraus ergibt sich nach dem Hilfssatz III, daß die 2^n-ten Partialsummen der Reihe (2. 3) auf E fast überall konvergieren. Dann wenden wir für die Reihe (2. 3) den Hilfssatz I an, so bekommen wir, daß auf der Menge E fast überall

$$s_{2^m}(x)-f(x) = o_x\left(\frac{1}{\tilde{\mu}_{2^{n+1}}}\right) = o_x\left(\frac{1}{\mu_{2^m}}\right) \tag{2. 4}$$

gilt. Durch Anwendung des Hilfssatzes V mit $\lambda_n=\mu_n$ ergibt sich

$$V_n(x)-s_{2^{m+1}}(x) = o_x\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \tag{2. 5}$$

im Falle $2^m<n\leqq 2^{m+1}$ in (a, b) fast überall. Aus den Abschätzung (2. 4) und (2. 5) folgt die Beziehung (4).

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

Beweis von Satz III. Durch Anwendung des Hilfssatzes IV ergibt sich die Abschätzung

$$s_{2^m}(x)-f(x) = o_x\left(\frac{1}{\mu_{2^m}}\right)$$

in (a, b) fast überall. Auf Grund von (6) können wir den Hilfssatz V mit $\lambda_n=\mu_n$ anwenden und so bekommen wir die Beziehung

$$V_n(x)-s_{2^{m+1}}(x) = o_x\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$$

für jede m und n mit $2^m<n\leqq 2^{m+1}$ in (a, b) fast überall.

Aus den Obigen folgt die Behauptung des Satzes III.

§ 3. Über Abschätzungen für de la Vallée-Poussinschen Mittel

Beweis von Satz IV. Nach dem Hilfssatz III ergibt sich, daß die 2^n-ten Partialsummen der Reihe (7) auf der Menge E fast überall konvergieren. Also können wir den Hilfssatz II für die Reihe (7) anwenden, daraus folgt die Abschätzung

$$s_{2^n}(x)=o_x(l_{2^n}) \tag{3. 1}$$

auf E fast überall. Ferner ergibt sich mit einfacher Rechnung die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{2^{n+1}}^{-2}\int_a^b \left(V_{2^n}(x)-s_{2^n}(x)\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} l_{2^{n+1}}^{-2}\frac{1}{2^{2^n}}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}(2^{n+1}-k)^2 c_k^2 =$$
$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty} l_{2^{n+1}}^{-2}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2<\infty,$$

so ergibt sich durch Anwendung des Satzes von B. Levi, daß

$$s_{2^n}(x)-V_{2^n}(x) = o_x(l_{2^{n+1}}) \tag{3. 2}$$

in (a, b) fast überall gilt.

Ähnlicherweise folgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_{2n}^{-2} \cdot n \int_a^b \left(V_n(x) - V_{n-1}(x)\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot l_{2n}^{-2} \left\{ \frac{1}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=n}^{2n-3} k^2 c_k^2 + \frac{2^2}{n^2} c_{2n-2} + \frac{c_{2n-1}^2}{n^2} \right\} =$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} l_{2n}^{-2} \sum_{k=n}^{2n-1} c_k^2 = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 l_n^{-2} < \infty,$$

woraus sich ergibt

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n \cdot l_{2n}^{-2} \left(V_n(x) - V_{n-1}(x)\right)^2 = o_x(1)$$

fast überall.

Es sei $2^m < n < 2^{m+1}$. Dann besteht

$$\tag{3. 3} \begin{aligned} |V_n(x) - V_{2^m}(x)| &= \left| \sum_{k=2^m+1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{l_{2k}} \left(V_k(x) - V_{k-1}(x)\right) \frac{l_{2k}}{\sqrt{k}} \right| \leqq \\ &\leqq \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{k}{l_{2k}^2} \left(V_k(x) - V_{k-1}(x)\right)^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \right\}^{1/2} l_{2n} = o_x(l_{2n}). \end{aligned}$$

Aus (3. 1), (3. 2) und (3. 3) ergibt sich die Abschätzung (8), was zu beweisen war.

Beweis von Satz V. Es sei

$$\tilde{l}_n = \frac{\varrho_{2^{m+1}}}{\gamma_{2^{m+1}}} \quad \text{für} \quad 2^m < n \leqq 2^{m+1}.$$

Auf Grund der Bedingungen (9) besteht

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \tilde{l}_n^{-2} \varrho_n^2 \leqq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \frac{\gamma_n^2}{\varrho_n^2} \varrho_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \gamma_n^2 < \infty,$$

so ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{l}_n^{-1} \varphi_n(x)$$

auf der Menge E $(C, 1)$-summierbar. Durch Anwendung des Satzes IV mit $l_n = \tilde{l}_n$ ergibt sich

$$V_n(x) = o_x(\tilde{l}_{2n}) = o_x\left(\frac{\varrho_{4n}}{\gamma_{4n}}\right)$$

auf der Menge E fast überall.

Damit haben wir den Satz V bewiesen.

Literatur

[1] S. KACZMARZ, Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalreihen, *Math. Ann.* **96** (1925), 148–151.

[2] L. LEINDLER, Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.* **24** (1963), 129–138.

[3] K. TANDORI, Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös nominate*, Sectio Mathematica, **3–4** (1960/61), 351–356.

(Eingegangen am 9. April 1963.)