# Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, IV*

Von E. VINCZE (Miskolc)

Im folgenden wollen wir noch zwei weitere Funktionalgleichungen von Typus

$$F(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(x) H_\nu(y), \tag{8}$$

und zwar die Gleichungen

$$F(x+y) = F(x)+F(y)+G(x)H(y)+G(y)H(x), \tag{8. a}$$

$$F(x+y) = F(x)+F(y)+G(x)G(y)+H(x)H(y) \tag{8. b}$$

(voneinander unabhängig) behandeln. Wir können auch diese als Verallgemeinerungen der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$F(x+y) = F(x)+F(y)$$

betrachten.

Es sei noch erwähnt, daß diese Gleichungen z. B. bei der Lösung der Funktionalgleichung[1])

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x) = 2g(x)h(y)$$

vorkommen, die eine Verallgemeinerung der von G. N. SAKOWITSCH behandelten Funktionalgleichung

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x) = 2|y|g(x)$$

ist. — Die Beispiele der Gleichungen (8. a) und (8. b) werden auch zeigen, daß mit unserer Methode auch Gleichungen der Formel (8) mit größerer Gliederzahl gelöst werden können, die technischen Schwierigkeiten sich aber dann rasch anwachsen, besonders wenn die gegebenen Gleichungen schon a priori „zu symmetrisch" sind.

Wir benützen auch jetzt die in den vorigen Paragraphen schon eingeführten Bezeichnungen. *Es sei $Q_0$ auch weiter eine beliebige Abelsche Gruppe und es bezeichne $Q$ eine Menge der komplexen Zahlen. Es sei weiter $Q_0'$ eine beliebige Abelsche Halbgruppe (mit oder ohne Einselement).*

*) Die vorliegende Arbeit ist eine Forsetzung der in *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 149—163 und 314—323, bzw. **10** (1963), 191—202 erschienenen Mitteilungen. Die Numerierung der Formeln, Sätze und Literaturangaben (vgl. die beiden ersten Mitteilungen) ist fortlaufend.

[1]) Vgl. die Arbeit „Über eine gemeinsame Verallgemeinerung zweier Funktionalgleichungen von Jensen" in dieser Zeitschrift auf den Seiten 326—344. Dort gelang es aber diese Gleichung allein mit dem Hilfe der Funktionalgleichung (8. a) zu lösen.

## § 8

Zuerst behandeln wir die Funktionalgleichung

$$(8.1) \qquad F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + G(z_1)H(z_2) + G(z_2)H(z_1),$$
$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ F(z), G(z), H(z)\colon Q_0 \to Q],$$

die also nur drei unbekannte Funktionen enthält. Bei der Lösung dieser Funktionalgleichung, wie wir das sehen werden, muß man *eine lange Reihe* der Funktionalgleichungen lösen, die alle je einen Spezialfall der Gleichung (8. 1) bilden.

Es gilt der

**Satz 8.** *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf $Q_0$ geltenden Funktionalgleichung* (8.1) *sind die folgenden Funktionen*:

$$(g_1) \qquad \begin{aligned} F(z) &= \varphi(z), \\ G(z) &\ \textit{beliebige komplexe Funktion}, \\ H(z) &\equiv 0; \end{aligned}$$

$$(g_2) \qquad \begin{aligned} F(z) &= \alpha\varphi_1(z)^3 + \varphi_1(z)\varphi_2(z) + \varphi_3(z), \\ G(z) &= \varphi_1(z), \\ H(z) &= 3\alpha\varphi_1(z)^2 + \varphi_2(z); \end{aligned}$$

$$(g_3) \qquad \begin{aligned} F(z) &= 2\alpha\beta[\psi(z)-1] + \beta\varphi_1(z)\psi(z) + \varphi_2(z), \\ G(z) &= \alpha[\psi(z)-1] + \varphi_1(z)\psi(z), \\ H(z) &= \beta[\psi(z)-1]; \end{aligned}$$

$$(g_4) \qquad \begin{aligned} F(z) &= 2\alpha^3\beta[\psi(z)-1] - \alpha\beta\varphi_1(z)^2 + \varphi_2(z), \\ G(z) &= \alpha^2[\psi(z)-1] - \alpha\varphi_1(z), \\ H(z) &= \alpha\beta[\psi(z)-1] + \beta\varphi_1(z); \end{aligned}$$

$$(g_5) \qquad \begin{aligned} F(z) &= 2\alpha^2\gamma[\psi_1(z)-1] - 2\beta^2\gamma[\psi_2(z)-1] + \varphi(z), \\ G(z) &= \alpha\gamma[\psi_1(z)-1] + \beta\gamma[\psi_2(z)-1], \\ H(z) &= \alpha[\psi_1(z)-1] - \beta[\psi_2(z)-1]; \end{aligned}$$

*wobei $\varphi(z)$, $\varphi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ bzw. $\psi(z)$, $\psi_\mu(z)$ $(\mu = 1, 2)$ den auf $Q_0$ geltenden Funktionalgleichungen*

$$(8.2) \qquad \varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \qquad [\textit{vgl.}\ (6.2)]$$

$$(8.3) \qquad \psi(z_1 * z_2) = \psi(z_1)\psi(z_2) \qquad [\textit{vgl.}\ (6.3)]$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ \varphi(z),\ \varphi_\nu(z)\ (\nu = 1, 2, 3),\ \psi(z),\ \psi_\mu(z) (\mu = 1, 2)\colon Q_0 \to Q]$$

*genügende, sonst aber beliebige komplexe Funktionen bezeichnen und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beliebige komplexe Konstanten sind. Weitere Lösungen sind noch diejenige Funktionen $F(z)$, $G(z)$, $H(z)$, die aus den vorigen mit der Vertauschung der Funktionen*

$$(g) \qquad G(z) \leftrightarrow H(z)$$

*herrühren. Es gibt keine andere Lösung.*

Auch mehrere von den vorigen Sätzen brauchen wir zum Beweis des ausgesprochenen Satzes 8 und überdies müssen wir auch noch einige Hilfssätze vorausschicken, die zum Beweis verwandt werden. Diese Sätze werden aber in wesentlich allgemeinerer Form ausgesprochen, als wie wir sie hier momentan brauchen.

**Hilfsatz 1.** *Das auf* $Q_0$ *geltende*[2]) *komplexe Funktionalgleichungssystem*

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) + a_1 G(z_1) G(z_2) + \\ + a_2 G(z_1) H(z_2) + a_3 G(z_2) H(z_1) + a_4 H(z_1) H(z_2), \tag{8. 4}$$

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2) + a_5 G(z_1) G(z_2) + \\ + a_6 G(z_1) H(z_2) + a_7 G(z_2) H(z_1) + a_8 H(z_1) H(z_2) \tag{8. 5}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0; G(z), H(z): Q_0 \to Q]$$

*kann ein voneinander linear unabhängiges*[3]) *Lösungspaar* $G(z)$, $H(z)$ *nur dann besitzen, wenn die Relationen*

$$a_2 = a_3, \quad a_6 = a_7,$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_1 - a_6 \\ a_4 & a_2 - a_8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_5 & a_1 - a_6 \\ a_6 & a_2 - a_8 \end{vmatrix} = 0$$

*für die Konstanten* $a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 8)$ *erfüllt sind.*

Beweis. Einerseits, wegen der Kommutativität der Operation $z_1 * z_2$, gelten

$$G(z_1 * z_2) = G(z_2 * z_1) \text{ und } H(z_1 * z_2) = H(z_2 * z_1),$$

d. h. auf Grund von (8. 4) bzw. (8. 5) ergeben sich

$$(a_2 - a_3)[G(z_1) H(z_2) - G(z_2) H(z_1)] = (a_2 - a_3) \Delta[G(z_1), H(z_2)] = 0,$$
$$(a_6 - a_7)[G(z_1) H(z_2) - G(z_2) H(z_1)] = (a_6 - a_7) \Delta[G(z_1), H(z_2)] = 0,$$

und da die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ nach unserer Voraussetzung voneinander linear unabhängig sind, gilt auch

$$\Delta[G(z_1), H(z_2)] \not\equiv 0,$$

wonach schon $a_2 - a_3 = a_6 - a_7 = 0$ folgt.

Andererseits, wegen der Assoziativität der Operation $z_1 * z_2$, gilt auch

$$G[(z_1 * \zeta) * z_2] = G[z_1 * (\zeta * z_2)],$$

d. h. laut (8. 4) erhalten wir die Gleichung

$$G(z_1 * \zeta)[a_1 G(z_2) + a_2 H(z_2) + 1] + H(z_1 * \zeta)[a_2 G(z_2) + a_4 H(z_2)] + G(z_2) = \\ = G(\zeta * z_2)[a_1 G(z_1) + a_2 H(z_1) + 1] + H(\zeta * z_2)[a_2 G(z_1) + a_4 H(z_1)] + G(z_1).$$

[2]) Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir nur die Kommutativität bzw. die Assoziativität der Operation $z_1 * z_2$, also nur die Eigenschaften einer beliebigen Abelschen Halbgruppe, trotzdem sprechen wir den Satz auch hier der Einheitlichkeit halber bezüglich der Gruppe $Q_0$ aus.

[3]) Hier und auch im weiteren versteht man unter der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ außer $G(z) \neq cH(z)$ ($c = konst.$) natürlich auch, daß $G(z_1) H(z_2) \neq 0$ gilt.

Das können wir auch in die Form

$$\Delta[G(z_1 * \zeta), a_1 G(z_2)] + \Delta[G(z_1 * \zeta), a_2 H(z_2)] + \Delta[G(z_1 * \zeta), 1] + \\ + \Delta[H(z_1 * \zeta), a_2 G(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta), a_4 H(z_2)] + \Delta[1, G(z_2)] = 0$$

schreiben. Nach (8. 4) und (8. 5) bzw. nach der Eigenschaften der Determinantenfunktionen rechnen wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\Delta[G(z_1) + G(\zeta) + a_1 G(z_1) G(\zeta) + a_2 G(z_1) H(\zeta) + a_2 G(\zeta) H(z_1) + \\
&\qquad + a_4 H(z_1) H(\zeta), a_1 G(z_2)] + \\
&+ \Delta[G(z_1) + G(\zeta) + a_1 G(z_1) G(\zeta) + a_2 G(z_1) H(\zeta) + a_2 G(\zeta) H(z_1) + \\
&\qquad + a_4 H(z_1) H(\zeta), a_2 H(z_2)] + \\
&+ \Delta[G(z_1) + G(\zeta) + a_1 G(z_1) G(\zeta) + a_2 G(z_1) H(\zeta) + a_2 G(\zeta) H(z_1) + a_4 H(z_1) H(\zeta), 1] + \\
&+ \Delta[H(z_1) + H(\zeta) + a_5 G(z_1) G(\zeta) + a_6 G(z_1) H(\zeta) + a_6 G(\zeta) H(z_1) + \\
&\qquad + a_8 H(z_1) H(\zeta), a_2 G(z_2)] + \\
&+ \Delta[H(z_1) + H(\zeta) + a_5 G(z_1) G(\zeta) + a_6 G(z_1) H(\zeta) + a_6 G(\zeta) H(z_1) + \\
&\qquad + a_8 H(z_1) H(\zeta), a_4 H(z_2)] + \Delta[1, G(z_2)] = \\
&= - a_1 G(\zeta) \Delta[G(z_1), 1] - a_1 a_2 G(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] - a_1 a_4 H(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] + \\
&+ a_2 \Delta[G(z_1), H(z_2)] - a_2 G(\zeta) \Delta[H(z_1), 1] + a_1 a_2 G(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] + \\
&+ a_2^2 H(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] + \Delta[G(z_1), 1] + a_1 G(\zeta) \Delta[G(z_1), 1] + a_2 H(\zeta) \Delta[G(z_1), 1] + \\
&+ a_2 G(\zeta) \Delta[H(z_1), 1] + a_4 H(\zeta) \Delta[H(z_1), 1] - \\
&- a_2 \Delta[G(z_1), H(z_2)] - a_2 H(\zeta) \Delta[G(z_1), 1] - \\
&- a_2 a_6 G(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] - a_2 a_8 H(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] - \\
&- a_4 H(\zeta) \Delta[H(z_1), 1] + a_4 a_5 G(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] + \\
&+ a_4 a_6 H(\zeta) \Delta[G(z_1), H(z_2)] - \Delta[G(z_1), 1] = 0,
\end{aligned}$$

d. h.

$$[(a_4 a_5 - a_2 a_6) G(\zeta) + (a_2^2 - a_1 a_4 - a_2 a_8 + a_4 a_6) H(\zeta)] \Delta[G(z_1), H(z_2)] = 0. \tag{8. 6}$$

Da die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ nach unserer Voraussetzung voneinander linear unabhängig sind, ergeben sich

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0 \tag{8. 7}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 - a_6 \\ a_4 & a_2 - a_8 \end{vmatrix} = 0. \tag{8. 8}$$

Ähnlicherweise bekommen wir auf Grund

$$H[(z_1 * \zeta) * z_2] = H[z_1 * (\zeta * z_2)]$$

die Gleichung

$$(8.9)\qquad [(a_5a_4-a_6a_2)H(\zeta)+(a_6^2-a_8a_5-a_6a_1+a_5a_2)G(\zeta)]\Delta[H(z_1),G(z_2)]=0.$$

Es sind nämlich die Funktionalgleichungen (8. 4) und (8. 5) bezüglich der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ in dem Sinne symmetrisch, daß wenn wir

$$G(z)\leftrightarrow H(z),\quad a_1\leftrightarrow a_8,\quad a_2(=a_3)\leftrightarrow a_6(=a_7),\quad a_4\leftrightarrow a_5$$

in (8. 4) gleichzeitig austauschen, erhalten wir die Gleichung (8. 5) und umgekehrt, aus (8. 5) die Gleichung (8. 4). Es genügt also diese Vertauschungen nur in (8. 6) zu vollbringen, womit schon (8. 9) entsteht. Aus (8. 9) folgen (8. 7) und

$$(8.10)\qquad \begin{vmatrix} a_5 & a_1-a_6 \\ a_6 & a_2-a_8 \end{vmatrix}=0,$$

weil die Funktionen $H(z)$ und $G(z)$ auch jetzt als voneinander linear unabhängig vorausgesetzt wurden.

Damit ist der Hilfsatz 1 bewiesen.

**Hilfsatz 2.** *Es seien die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ voneinander linear unabhängig*[4]). *Es sei weiter $a_1a_2a_3a_4\neq 0$. So kann man das auf $Q_0$ geltende*[5]) *komplexe Funktionalgleichungssystem*

$$(8.11)\qquad \begin{aligned} G(z_1*z_2) &= G(z_1)+G(z_2)+a_1G(z_1)G(z_2)+\\ &+a_2G(z_1)H(z_2)+a_2G(z_2)H(z_1)+a_3H(z_1)H(z_2),\end{aligned}$$

$$(8.12)\qquad \begin{aligned} H(z_1*z_2) &= H(z_1)+H(z_2)+a_4G(z_1)G(z_2)+\\ &+a_1G(z_1)H(z_2)+a_1G(z_2)H(z_1)+a_2H(z_1)H(z_2)\end{aligned}$$

$$[z_1,z_2,z_1*z_2\in Q_0;\ G(z),H(z)\colon Q_0\to Q]$$

*in die Form*

$$(8.13)\qquad \begin{aligned} &AG(z_1*z_2)+BH(z_1*z_2)+C=\\ &=[AG(z_1)+BH(z_1)+C][AG(z_2)+BH(z_2)+C]\end{aligned}$$

*dann und nur dann nicht-trivialerweise ($|A|+|B|>0$) umschreiben, falls*

$$(8.14)\qquad a_1a_2-a_3a_4=0$$

*ist. In diesem Falle sind*

$$A_1=a_1+\sqrt{a_2a_4},\quad B_1=\frac{a_2a_4+a_1\sqrt{a_2a_4}}{a_4},\quad C_1=1,$$

*oder*

$$A_2=a_1-\sqrt{a_2a_4},\quad B_2=\frac{a_2a_4-a_1\sqrt{a_2a_4}}{a_4},\quad C_2=1.$$

---

[4]) Vgl. die Fußnote 3).

[5]) Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir weder die Kommutativität noch die Assoziativität der Operation $z_1*z_2$. Vgl. Fußnote 2).

*Wenn aber die Konstanten $a_1, a_2, a_3, a_4$ der Gleichung* (8. 14) *genügen, dann gilt* (8. 13) *mit den aufgeschriebenen Konstanten $A$, $B$, $C$ unabhängig davon, ob die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ voneinander linear unabhängig sind.*

Beweis. Auf Grund des Prinzips der Vergleichung der Koeffizienten, welches wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ anwendbar ist, erhalten wir aus (8. 11), (8. 12) und (8. 13) die Gleichungen

$$Aa_1 + Ba_4 = A^2, \tag{8. 15}$$

$$Aa_3 + Ba_2 = B^2, \tag{8. 16}$$

$$Aa_2 + Ba_1 = AB, \tag{8. 17}$$

$$A = AC, \quad B = BC, \quad C = C^2. \tag{8. 18}$$

Wir suchen ein solches Lösungssystem $A$, $B$, $C$, wo $|A|+|B|>0$ ist; also folgt $C=1$ aus (8. 18) notwendigerweise.

Wegen $a_1 a_2 \neq 0$ ist aus (8. 15)—(8. 17) offenbar, daß auch $AB \neq 0$ gilt, sonst wäre $|A|+|B|=0$. Aus (8. 15) und (8. 17) erhalten wir einerseits die Gleichung

$$Aa_2 + \frac{A^2 - Aa_1}{a_4} a_1 = A \frac{A^2 - Aa_1}{a_4},$$

woraus auch

$$A(A^2 - 2a_1 A + a_1^2 - a_2 a_4) = 0 \tag{8. 19}$$

folgt. Andererseits bekommen wir aus (8. 15) und (8. 16)

$$Aa_3 + \frac{A^2 - Aa_1}{a_4} a_2 = \frac{(A^2 - Aa_1)^2}{a_4^2},$$

was wegen $A \neq 0$ auch in die Form

$$A(A^2 - 2a_1 A + a_1^2 - a_2 a_4) + a_4(a_1 a_2 - a_3 a_4) = 0 \tag{8. 20}$$

umgeschrieben werden kann. Die Gleichugen (8. 19) und (8. 20) können eine gemeinsame Lösung A wegen $a_4 \neq 0$ nur im Falle besitzen, wenn (8. 14) erfüllt ist.

Da $A \neq 0$ ist, folgt nach (8. 19)

$$A_{12} = a_1 \pm \sqrt{a_2 a_4}.$$

Aus (8. 15) ergibt sich weiter

$$B_{12} = \frac{a_2 a_4 \pm a_1 \sqrt{a_2 a_4}}{a_4}.$$

Diese Lösungen genügen dem aus den Gleichungen (8. 15), (8. 16), (8. 17) bestehenden Gleichungssystem tatsächlich und da demnach auch der zweite Teil des Satzes offenbar gilt, ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 ergibt sich das

**Korollar 1.** *Wenn die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ voneinander linear unabhängig sind und das auf $Q_0$ geltende, aus den Gleichungen* (8. 11) *und* (8. 12) *bestehende Funktionalgleichungssystem für $G(z)$ und $H(z)$ ein nicht-triviales Lösungspaar besitzt, dann kann man dieses Gleichungssystem immer auch in die Form* (8. 13) *umschreiben.*

**Hilfsatz 3.** *Es seien die Funktionen $G(z)$, $\psi(z)$ und 1 voneinander linear unabhängig*[6]*; $\psi(z)$ genüge der Gleichung* (8. 3). *Die auf $Q_0$ geltende*[7]*) komplexe Funktionalgleichung*

$$(8.21)\qquad G(z_1 * z_2) = a_1 G(z_1) + a_1 G(z_2) + a_2 G(z_1)\psi(z_2) + a_2 G(z_2)\psi(z_1) + a_3 G(z_1) G(z_2) + a_4\psi(z_1) + a_4\psi(z_2) + a_5\psi(z_1 * z_2) + a_6$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ G(z), \psi(z): Q_0 \to Q]$$

*kann für $G(z)$ eine nicht-triviale Lösung nur dann besitzen, wenn die Konstanten $a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$) den Relationen*

$$(8.22)\qquad \begin{cases} a_2^2 - a_3 a_5 - a_2 = 0, & a_1 a_2 - a_3 a_4 = 0, \\ a_1^2 - a_3 a_6 - a_1 = 0, & a_1 a_5 - a_2 a_4 + a_4 = 0, \\ a_1 a_4 - a_2 a_6 - a_4 = 0 & \end{cases}$$

*genügen.*

Beweis. Wegen der Assoziativität der Operation $z_1 * z_2$ gilt auch

$$G[(z_1 * \zeta) * z_2] = G[z_1 * (\zeta * z_2)],$$

d. h. ausführlich ausgeschrieben

$$\begin{aligned} & a_1 G(z_1 * \zeta) + a_1 G(z_2) + a_2 G(z_1 * \zeta)\psi(z_2) + a_2 G(z_2)\psi(z_1)\psi(\zeta) + \\ & + a_3 G(z_1 * \zeta) G(z_2) + a_4\psi(z_1)\psi(\zeta) + a_4\psi(z_2) + a_5\psi(z_1)\psi(\zeta)\psi(z_2) + a_6 = \\ & = a_1 G(z_1) + a_1 G(\zeta * z_2) + a_2 G(z_1)\psi(\zeta)\psi(z_2) + a_2 G(\zeta * z_2)\psi(z_1) + \\ & + a_3 G(z_1) G(\zeta * z_2) + a_4\psi(z_1) + a_4\psi(\zeta)\psi(z_2) + a_5\psi(z_1)\psi(\zeta)\psi(z_2) + a_6. \end{aligned}$$

Das kann man auch in der Form

$$\begin{aligned} & a_1 \Delta[G(z_1 * \zeta), 1] + a_1 \Delta[1, G(z_2)] + a_2 \Delta[G(z_1 * \zeta), \psi(z_2)] + \\ & + a_2\psi(\zeta)\Delta[\psi(z_1), G(z_2)] + a_3 \Delta[G(z_1 * \zeta), G(z_2)] + \\ & + a_4\psi(\zeta)\Delta[\psi(z_1), 1] + a_4 \Delta[1, \psi(z_2)] = 0 \end{aligned}$$

schreiben. Auf Grund von (8. 21) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} & a_1 \Delta[a_1 G(z_1) + a_1 G(\zeta) + a_2 G(z_1)\psi(\zeta) + a_2 G(\zeta)\psi(z_1) + a_3 G(z_1) G(\zeta) + \\ & + a_4\psi(z_1) + a_4\psi(\zeta) + a_5\psi(z_1)\psi(\zeta) + a_6, 1] - a_1 \Delta[G(z_1), 1] + \\ & + a_2 \Delta[a_1 G(z_1) + a_1 G(\zeta) + a_2 G(z_1)\psi(\zeta) + a_2 G(\zeta)\psi(z_1) + a_3 G(z_1) G(\zeta) + \\ & + a_4\psi(z_1) + a_4\psi(\zeta) + a_5\psi(z_1)\psi(\zeta) + a_6, \psi(z_2)] - a_2\psi(\zeta)\Delta[G(z_1), \psi(z_2)] + \\ & + a_3 \Delta[a_1 G(z_1) + a_1 G(\zeta) + a_2 G(z_1)\psi(\zeta) + a_2 G(\zeta)\psi(z_1) + a_3 G(z_1) G(\zeta) + \\ & + a_4\psi(z_1) + a_4\psi(\zeta) + a_5\psi(z_1)\psi(\zeta) + a_6, G(z_2)] + \end{aligned}$$

[6]) Folglich ist $G(z) \not\equiv 0$.
[7]) Vgl. die Fußnote 2).

$$+a_4\psi(\zeta)\Delta[\psi(z_1),1]-a_4\Delta[\psi(z_1),1] =$$
$$= a_1^2\Delta[G(z_1),1]+a_1a_2\psi(\zeta)\Delta[G(z_1),1]+a_1a_2G(\zeta)\Delta[\psi(z_1),1]+$$
$$+a_1a_3G(\zeta)\Delta[G(z_1),1]+a_1a_4\Delta[\psi(z_1),1]+a_1a_5\psi(\zeta)\Delta[\psi(z_1),1]-$$
$$-a_1\Delta[G(z_1),1]+a_1a_2\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]-a_1a_2G(\zeta)\Delta[\psi(z_1),1]+$$
$$+a_2^2\psi(\zeta)\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]+a_2a_3G(\zeta)\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]-a_2a_4\psi(\zeta)\Delta[\psi(z_1),1]-$$
$$-a_2a_6\Delta[\psi(z_1),1]-a_2\psi(\zeta)\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]-a_1a_3G(\zeta)\Delta[G(z_1),1]-$$
$$-a_2a_3G(\zeta)\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]-a_3a_4\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]-a_3a_4\psi(\zeta)\Delta[G(z_1),1]-$$
$$-a_3a_5\psi(\zeta)\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]-a_3a_6\Delta[G(z_1),1]+$$
$$+a_4\psi(\zeta)\Delta[\psi(z_1),1]-a_4\Delta[\psi(z_1),1] =$$
$$= [(a_2^2-a_3a_5-a_2)\psi(\zeta)+(a_1a_2-a_3a_4)]\Delta[G(z_1),\psi(z_2)]+$$
$$+[(a_1a_2-a_3a_4)\psi(\zeta)+(a_1^2-a_3a_6-a_1)]\Delta[G(z_1),1]+$$
$$+[(a_1a_5-a_2a_4+a_4)\psi(\zeta)+(a_1a_4-a_2a_6-a_4)]\Delta[\psi(z_1),1] = 0.$$

Da die Funktionen $G(z), \psi(z)$ und 1 nach unserer Voraussetzung voneinander linear unabhängig sind, müssen die im Satz ausgesprochenen Relationen für die Konstanten notwendigerweise gültig sein.

Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

**Hilfsatz 4.** *Es seien die Funktionen $G(z)$, $\psi(z)$ und 1 voneinander linear unabhängig*[8]). *So kann man die auf $Q_0$ geltende*[9]) *komplexe Funktionalgleichung* (8. 21) *in die Form*

(8. 23)
$$AG(z_1*z_2)+B\psi(z_1*z_2)+C = [AG(z_1)+B\psi(z_1)+C][AG(z_2)+B\psi(z_2)+C]$$

*dann und nur dann nicht-trivialerweise ($A\neq 0$) umschreiben, falls*

(8. 24)
$$a_2^2-a_3a_5-a_2 = 0,\quad a_1a_2-a_3a_4 = 0,\quad a_1^2-a_3a_6-a_1 = 0$$

*ist. In diesem Falle sind $A=a_3$, $B=a_2$ und $C=a_1$. Wenn aber die Konstanten $a_\nu$ ($\nu=1,2,\dots,6$) die Relationen* (8. 24) *befriedigen, dann gilt auch die Umformung* (8. 23), *dessen ungeachtet, ob die Funktionen $G(z)$, $\psi(z)$ und 1 voneinander linear abhängig oder unabhängig sind.*

Beweis. Auf Grund des Prinzips des Vergleiches der Koeffizienten, was wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $G(z), \psi(z)$ und 1 anwendbar ist, erhalten wir aus (8. 21) und (8. 23) die Gleichungen

(8. 25)
$$Aa_3 = A^2,\quad Aa_2 = AB,\quad Aa_1 = AC,$$

(8. 26)
$$Aa_5+B = B^2,\quad Aa_4 = BC,\quad Aa_6+C = C^2.$$

[8]) Folglich gilt $G(z_1)\psi(z_2)\not\equiv 0$.

[9]) Vgl. die Fußnote 5).

Wir suchen solche Lösungen $A, B, C$, wobei $A \neq 0$ gilt, also bekommen wir tatsächlich die Lösungen $A = a_3$, $B = a_2$, $C = a_1$. Diese müssen aber auch den Gleichungen (8. 26) genügen, woraus sich die Relationen (8. 24) ergeben. Demnach ist auch der zweite Teil des ausgesprochenen Satzes offenbar gültig.

Damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

Man sieht, daß die Relationen (8. 24) auch in (8. 22) enthalten sind. Aus den Hilfssätzen 3 und 4 bekommen wir also das

**Korollar 2.** *Wenn die Funktionen* $G(z)$, $\psi(z)$ *und* 1 *voneinander linear unabhängig sind und die auf* $Q_0$ *geltende Funktionalgleichung* (8. 21) *für* $G(z)$ *eine nichttriviale Lösung besitzt, dann kann man die Gleichung* (8. 21) *immer auch in die Form* (8. 23) *umschreiben.*

Jetzt beweisen wir den Satz 8.

Beweis (des Satzes 8). Wir können uns darüber leicht überzeugen, daß die im Satz 8 aufgezählten Funktionen tatsächlich Lösungen sind, d. h. sie genügen der Gleichung (8. 1). Im folgenden genügt es also zu zeigen, daß jede Lösung eine der Gestalten $(g_1)$, ..., $(g_5)$, oder die von ihnen durch die Vertauschung $(g)$ entstehenden Gestalten hat. Wegen der Assoziativität der Operation $z_1 * z_2$ gilt

$$\begin{aligned} F[(z_1 * \zeta) * z_2] &= F(z_1 * \zeta) + F(z_2) + G(z_1 * \zeta)H(z_2) + G(z_2)H(z_1 * \zeta) = \\ &= F(z_1) + F(\zeta * z_2) + G(z_1)H(\zeta * z_2) + G(\zeta * z_2)H(z_1) = F[z_1 * (\zeta * z_2)], \end{aligned}$$

was wir in der Form

$$\Delta[F(z_1 * \zeta), 1] + \Delta[1, F(z_2)] + \Delta[G(z_1 * \zeta), H(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta), G(z_2)] = 0$$

schreiben. Setzen wir jetzt die Gleichung (8. 1) in diese ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} &\Delta[F(z_1) + F(\zeta) + G(z_1)H(\zeta) + G(\zeta)H(z_1), 1] + \Delta[1, F(z_2)] + \\ &\quad + \Delta[G(z_1 * \zeta), H(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta), G(z_2)] = \\ &= \Delta[F(z_1), 1] + \Delta[G(z_1), H(\zeta)] + \Delta[H(z_1), G(\zeta)] + \\ &\quad + \Delta[1, F(z_2)] + \Delta[G(z_1 * \zeta), H(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta), G(z_2)] = 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$\Delta[G(z_1 * \zeta) - G(\zeta), H(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta) - H(\zeta), G(z_2)] = 0. \tag{8. 27}$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit $G(z)$, dann folgt

$$\Delta[G(z_1 * \zeta) - G(\zeta), G(z_2), H(z_3)] = 0,$$

was nur in den Fällen

**A.**

$$H(z) \equiv 0, \tag{8. 28}$$

**B.**

$$G(z) = c_1 H(z), \qquad (c_1 = konst.) \tag{8. 29}$$

**C.**

$$G(z * \zeta) - G(\zeta) = M(\zeta)G(z) + N(\zeta)H(z) \tag{8. 30}$$

erfüllt ist.

**A.** Wenn (8. 28) gilt, vereinfacht sich (8. 1) auf die Cauchysche Gleichung

(8. 31) $$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2).$$

Also ist $F(z) = \varphi(z)$ [vgl. (8. 2)], dabei wird $G(z)$ beliebig. Das liefert eben das Lösungssystem $(g_1)$.

Im folgenden schließen wir den speziellen Fall $H(z) \equiv 0$ aus.

Auch im weiteren bezeichnen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ (auch mit Indizes) *nur solche Funktionen*, die der Gleichung (8. 2) bzw. (8. 3) genügen.

**B.** Im Falle (8. 29) ergibt sich aus (8. 27)

$$\begin{aligned}\Delta[c_1 H(z_1 * \zeta) - c_1 H(\zeta), H(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta) - H(\zeta), c_1 H(z_2)] &= \\ = 2c_1 \Delta[H(z_1 * \zeta) - H(\zeta), H(z_2)] &= 0,\end{aligned}$$

woraus mindestens eine der Fälle

**B. 1.** $$c_1 = 0,$$

**B. 2.**

(8. 32) $$H(z * \zeta) - H(\zeta) = M(\zeta) H(z)$$

folgt.

**B. 1.** Wenn $c_1 = 0$ ist, erhalten wir aus (8. 29) $G(z) \equiv 0$ und dabei ist $H(z)$ *beliebig*. Also vereinfacht sich (8. 1) wieder auf (8. 31). Wegen der erwähnten Symmetrie enthält $(g_1)$ aber auch diesen Fall.

**B. 2.** Wegen der Kommutativität der Operation $z_1 * z_2$ folgt aus (8. 32)

$$\Delta(M-1, H) = 0,$$

woraus wir wegen $H(z) \not\equiv 0$ die Gleichung

(8. 33) $$M(z) - 1 = c_2 H(z) \qquad (c_2 = konst.)$$

erhalten.

Hier unterscheiden wir die Fälle

**B. 2. 1.** $$c_2 = 0,$$

**B. 2. 2.** $$c_2 \neq 0.$$

**B. 2. 1.** Wenn $c_2 = 0$ ist, bekommen wir aus den Gleichungen (8. 33) und (8. 32) die Cauchysche Gleichung

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2),$$

d. h. es ist $H(z) = \varphi_2(z)$. Aus (8. 29) ergibt sich $G(z) = c_1 \varphi_2(z)$. Damit geht die Gleichung (8. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + 2c_1 \varphi_2(z_1) \varphi_2(z_2)$$

über, woraus auch

$$F(z_1 * z_2) - c_1 \varphi_2(z_1 * z_2)^2 = F(z_1) - c_1 \varphi_2(z_1)^2 + F(z_2) - c_1 \varphi_2(z_2)^2$$

folgt. Das liefert die Lösung

$$F(z) = c_1 \varphi_2(z)^2 + \varphi_3(z).$$

Das ist tatsächlich ein Spezialfall von $(g_2)$ [$\alpha = 0$ und $\varphi_1(z) = c_1 \varphi_2(z)$].

**B. 2. 2.** Im Falle $c_2 \neq 0$ erhalten wir aus (8. 33) und (8. 32) eine Cauchysche Gleichung von Typus (8. 3):

$$H(z_1 * z_2) - H(z_2) = [c_2 H(z_2) + 1] H(z_1),$$
$$c_2 H(z_1 * z_2) + 1 = [c_2 H(z_1) + 1][c_2 H(z_2) + 1].$$

Daraus ergeben sich

$$H(z) = \frac{1}{c_2}[\psi(z) - 1],$$

und aus (8. 29)

$$G(z) = \frac{c_1}{c_2}[\psi(z) - 1].$$

Damit geht die Gleichung (8. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + \frac{2c_1}{c_2^2}[\psi(z_1) - 1][\psi(z_2) - 1]$$

über, woraus auch

$$F(z_1 * z_2) - \frac{2c_1}{c_2^2}[\psi(z_1 * z_2) - 1] = F(z_1) - \frac{2c_1}{c_2^2}[\psi(z_1) - 1] + F(z_2) - \frac{2c_1}{c_2^2}[\psi(z_2) - 1]$$

folgt. Das ergibt die Lösung

$$F(z) = \varphi_2(z) + \frac{2c_1}{c_2^2}[\psi(z) - 1].$$

Alle die Lösungen $(g_3)$, $(g_4)$ und $(g_5)$ enthalten dieses Lösungssystem; z. B. $(g_3)$ im Falle $\varphi_1(z) \equiv 0$, $\alpha = c_1/c_2$ und $\beta = 1/c_2$, usw.

Damit ist der Fall **B** schon erledigt. Im weiteren können wir also voraussetzen, daß die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ voneinander unabhängig[10]) sind.

**C.** Aus (8. 30) folgt die Gleichung

$$G(z_1 * z_2) = M(z_1)G(z_2) + N(z_1)H(z_2) + G(z_1) =$$
$$= M(z_2)G(z_1) + N(z_2)H(z_1) + G(z_2),$$

was wir in die Form

(8. 34) $$\Delta(M-1, G) + \Delta(N, H) = 0$$

umschreiben. „Erweitern" wir jetzt diese mit $H$, dann ergibt sich

$$\Delta(M-1, G, H) = 0,$$

was wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ nur im Falle

(8. 35) $$M(z) - 1 = c_1 G(z) + c_2 H(z) \qquad (c_1, c_2 = konst.)$$

[10]) Vgl. die Fußnote 3).

erfüllt ist. Setzen wir dies in (8. 34) ein, dann erhalten wir

$$\Delta(M-1, G)+\Delta(N, H) = \Delta(c_1G+c_2H, G)+\Delta(N, H) =$$
$$= \Delta(-c_2G, H)+\Delta(N, H) = \Delta(N-c_2G, H) = 0,$$

woraus wegen $H(z)\not\equiv 0$

$$N(z)-c_2G(z) = c_3H(z) \qquad (c_3 = konst.) \tag{8. 36}$$

folgt. Mit den Funktionen (8. 35) und (8. 36) ergibt sich aus (8. 30)

$$G(z_1 * z_2) = c_1G(z_1)G(z_2)+c_2G(z_1)H(z_2)+ \tag{8. 37}$$
$$+c_2G(z_2)H(z_1)+c_3H(z_1)H(z_2)+G(z_1)+G(z_2).$$

Wir werden jetzt eine ähnliche Gleichung für $H(z_1 * z_2)$ ableiten. Um das zu erreichen, setzen wir (8. 37) in (8. 27) ein:

$$\Delta\{[c_1G(\zeta)+c_2H(\zeta)+1]G(z_1)+[c_2G(\zeta)+c_3H(\zeta)]H(z_1), H(z_2)\}+$$
$$+\Delta[H(z_1*\zeta)-H(\zeta), G(z_2)] =$$
$$= -[c_1G(\zeta)+c_2H(\zeta)+1]\Delta[H(z_1), G(z_2)]+\Delta[H(z_1*\zeta)-H(\zeta), G(z_2)] =$$
$$= \Delta\{H(z_1*\zeta)-H(\zeta)-[c_1G(\zeta)+c_2H(\zeta)+1]H(z_1), G(z_2)\} = 0.$$

Da die vorausgesetze lineare Unabhängigkeit der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ auch $G(z)\not\equiv 0$ nach sich zieht, erhalten wir aus der vorigen Gleichung

$$H(z*\zeta)-H(\zeta)-[c_1G(\zeta)+c_2H(\zeta)+1]H(z) = P(\zeta)G(z).$$

Wie wir das üblich machen, schreiben wir auf Grund der Kommutativität der Operation $z_1 * z_2$ die Gleichung

$$H(z_1*z_2)-c_2H(z_1)H(z_2)-H(z_1)-H(z_2) =$$
$$= P(z_1)G(z_2)+c_1G(z_1)H(z_2) = P(z_2)G(z_1)+c_1G(z_2)H(z_1)$$

auf, d. h.

$$\Delta(P, G)+\Delta(c_1G, H) = \Delta(P-c_1H, G) = 0$$

ist. Daraus folgt die Gleichung

$$P(z)-c_1H(z) = c_4G(z), \qquad (c_4 = konst.)$$

weil $G(z)\not\equiv 0$ gilt. Mit dieser Lösung erhalten wir eine zu (8. 37) ähnliche Gleichung für $H(z_1 * z_2)$, und zwar die folgende:

$$H(z_1*z_2) = c_4G(z_1)G(z_2)+c_1G(z_1)H(z_2)+ \tag{8. 38}$$
$$+c_1G(z_2)H(z_1)+c_2H(z_1)H(z_2)+H(z_1)+H(z_2).$$

Wir suchen also jetzt solche voneinander linear unabhängigen Funktionen $G(z)$ und $H(z)$, die den Funktionalgleichungen (8. 37) und (8. 38) *gleichzeitig* genügen.

Wenden wir den Hilfssatz 1 an, dann müssen die Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4$ den Relationen

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_2 & c_1 - c_1 \\ c_3 & c_2 - c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_4 & c_1 - c_1 \\ c_1 & c_2 - c_2 \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Die zwei letztere Gleichungen sind trivialerweise erfüllt und aus der ersten Gleichung folgt mindestens eine der Fälle

**C. 1.** $$c_1 = c_3 = 0,$$

**C. 2.** $$c_2 = c_4 = 0,$$

**C. 3.** $$c_1 = c_4 = 0,$$

**C. 4.** $$c_2 = c_3 = 0,$$

**C. 5.**, **C. 6.**
$$\left.\begin{aligned} &c_2 = c_5^2 c_3 \quad \textit{und} \quad c_4 = c_5^2 c_1, \\ &c_2 = c_5^2 c_4 \quad \textit{und} \quad c_3 = c_5^2 c_1, \end{aligned}\right\} (c_5 = \textit{konst.};\ c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \neq 0).$$

**C. 1.** Im Falle $c_1 = c_3 = 0$ erhalten wir aus (8. 37) und (8. 38) das Gleichungssystem

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) + c_2 G(z_1) H(z_2) + c_2 G(z_2) H(z_1), \tag{8. 39}$$

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2) + c_4 G(z_1) G(z_2) + c_2 H(z_1) H(z_2). \tag{8. 40}$$

Man sieht gleich, daß die Gleichung (8. 39) mit den Bezeichnungen

$$S(z) \stackrel{\text{def}}{=} G(z) \quad \text{und} \quad C(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + c_2 H(z)$$

in (5. 1) übergeht. Da die Funktionalgleichung[11]) (5. 1) bzw. (8. 39) nach dem Satz 5 nur zwei voneinander linear unabhängige Lösungspaare besitzt, genügt es nur die Fälle

**C. 1. 1.**
$$G(z) = \psi(z)\varphi_1(z),$$
$$1 + c_2 H(z) = \psi(z);$$

**C. 1. 2.**
$$G(z) = c_5[\psi_1(z) - \psi_2(z)] \qquad (c_5 = \textit{konst.})$$
$$1 + c_2 H(z) = \tfrac{1}{2}[\psi_1(z) + \psi_2(z)]$$

zu behandeln.

**C. 1. 1.** Im ersten Falle müssen wir noch eine weitere Fallunterscheidung treffen, und zwar

**C. 1. 1. a.** $$c_2 = 0,$$

**C. 1. 1. b.** $$c_2 \neq 0.$$

---

[11]) Es sei hier bemerkt, daß die Gruppeneigenschaft der Menge $Q_0$ nur bei der Lösung dieser Funktionalgleichung ausgenützt wurde, sonst wäre es genug, die Menge $Q_0$ für jeden weiteren Fall nur als Abelsche Halbgruppe zu voraussetzen.

**C. 1. 1. a.** Falls $c_2=0$ ist, folgt $\psi(z)\equiv 1$, also ist $G(z)=\varphi_1(z)$. Damit ergibt sich aus (8. 40)

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1)+H(z_2)+c_4\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2),$$

also gilt auch die Cauchysche Gleichung

$$H(z_1 * z_2)-3\alpha\varphi_1(z_1 * z_2)^2 = H(z_1)-3\alpha\varphi_1(z_1)^2+H(z_2)-3\alpha\varphi_1(z_2)^2$$
$$(3\alpha=\tfrac{1}{2}c_4),$$

d. h. die Lösung ist

$$H(z) = 3\alpha\varphi_1(z)^2+\varphi_2(z).$$

Weiter erhalten wir mit diesen Lösungen aus (8. 1) die Gleichung

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\varphi_1(z_1)[3\alpha\varphi_1(z_2)^2+\varphi_2(z_2)]+$$
$$+\varphi_1(z_2)[3\alpha\varphi_1(z_1)^2+\varphi_2(z_1)].$$

Addieren wir zu beiden Seiten den Ausdruck

$$-\alpha\varphi_1(z_1 * z_2)^3 = -\alpha[\varphi_1(z_1)^3+\varphi_1(z_2)^3]-$$
$$-3\alpha\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2)[\varphi_1(z_1)+\varphi_1(z_2)],$$

dann erhalten wir die Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2)-\alpha\varphi_1(z_1 * z_2)^3-\varphi_1(z_1 * z_2)\varphi_2(z_1 * z_2) =$$
$$= F(z_1)-\alpha\varphi_1(z_1)^3-\varphi_1(z_1)\varphi_2(z_1)+F(z_2)-\alpha\varphi_1(z_2)^3-\varphi_1(z_2)\varphi_2(z_2),$$

die vom Typus (8. 2) ist. Daraus folgt die Lösung

$$F(z) = \alpha\varphi_1(z)^3+\varphi_1(z)\varphi_2(z)+\varphi_3(z).$$

Diese Lösungen sind tatsächlich die Funktionen ($g_2$).

**C. 1. 1. b.** Es sei jetzt $c_2\neq 0$. Dann geht (8. 1) mit den Lösungen

$$G(z) = \psi(z)\varphi_1(z),$$
$$H(z) = \beta[\psi(z)-1] \qquad (\beta=1/c_2)$$

in die Gleichung

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\beta\varphi_1(z_1)\psi(z_1)[\psi(z_2)-1]+$$
$$+\beta\varphi_1(z_2)\psi(z_2)[\psi(z_1)-1]$$

über, was man auch in der Form

$$F(z_1 * z_2)-\beta\varphi_1(z_1 * z_2)\psi(z_1 * z_2) =$$
$$=F(z_1)-\beta\varphi_1(z_1)\psi(z_1)+F(z_2)-\beta\varphi_1(z_2)\psi(z_2)$$

schreiben kann. Das ist wieder eine Cauchysche Gleichung von der Form (8. 2), also ist

$$F(z) = \beta\varphi_1(z)\psi(z)+\varphi_2(z).$$

Im Falle $\alpha=0$ enthält die Lösung $(g_3)$ auch dieses Lösungssystem. Es sei hier noch bemerkt, daß diese Lösungen $G(z)\not\equiv 0$ und $H(z)\not\equiv 0$ auch der Funktionalgleichung (8. 40) nur im Falle $c_4=0$ genügen.

**C. 1. 2.** Bei dem anderen Lösungssystem der vorliegenden Funktionalgleichung (8. 39) unterscheiden wir wieder zwei Unterfälle:

**C. 1. 2. a.** $$c_2=0,$$

**C. 1. 2. b.** $$c_2\neq 0.$$

**C. 1. 2. a.** Wenn $c_2=0$ ist, ergibt sich

$$\psi_2(z) = 2-\psi_1(z).$$

Da aber die Funktion $\psi_2(z)$ auch der Gleichung (8. 3) genügt, gilt auch

$$2-\psi_1(z_1 * z_2) = [2-\psi_1(z_1)][2-\psi_1(z_2)],$$

woraus wir die Gleichung

$$[\psi_1(z_1)-1][\psi_1(z_2)-1] = 0$$

erhalten. Es ist also $\psi_1(z)\equiv 1$ und folglich gilt auch $\psi_2(z)\equiv 1$. Das zieht aber die triviale Lösung $G(z)\equiv 0$ nach sich, also bleibt dieser Fall außer acht.

**C. 1. 2. b.** Es sei jetzt $c_2\neq 0$. Dann folgen die Lösungen

$$G(z)=\alpha\gamma[\psi_1(z)-\psi_2(z)], \qquad (\alpha\gamma=c_5\neq 0)$$

$$H(z) = \alpha[\psi_1(z)+\psi_2(z)-2], \qquad \left(\alpha=\frac{1}{2c_2}\right)$$

womit die Gleichung (8. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\alpha^2\gamma[\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)][\psi_1(z_2)+\psi_2(z_2)-2]+ \\ +\alpha^2\gamma[\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)][\psi_1(z_1)+\psi_2(z_1)-2]$$

übergeht. Das kann man aber auch folgendermaßen umformen:

$$F(z_1 * z_2)-2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_1 * z_2)-\psi_2(z_1 * z_2)] = \\ = F(z_1)-2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)]+F(z_2)-2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)].$$

Das ist wieder eine Cauchysche Gleichung von Typus (8. 2), also ist die Lösung

$$F(z) = 2\alpha^2\gamma[\psi_1(z)-\psi_2(z)]+\varphi(z).$$

Diese Lösungen gehören eben zu $(g_5)$. Es sei sämlich dort $\beta = -\alpha$, dann bekommen wir tatsächlich diese.

Wir erwähnen noch, daß die Gleichung (8. 40) nur im Falle $c_4=1/(2\alpha\gamma^2)$ erfüllt ist.

Damit ist der Fall **C. 1** erledigt.

**C. 2.** Jetzt untersuchen wir den Fall $c_2=c_4=0$, womit wir aus (8. 37) und (8. 38) das Gleichungspaar

$$G(z_1*z_2) = G(z_1)+G(z_2)+c_1G(z_1)G(z_2)+c_3H(z_1)H(z_2),$$
$$H(z_1*z_2) = H(z_1)+H(z_2)+c_1G(z_1)H(z_2)+c_1G(z_2)H(z_1)$$

erhalten. Dieses liefert aber keine weitere Lösungen, sondern ist schon im Falle **C. 1** erledigt. Schreiben wir nämlich statt $G(z)$ die Funktion $H(z)$ und umgekehrt, weiter statt $c_1$ und $c_3$ die Konstanten $c_2$ und $c_4$, dann ergibt sich wieder das Gleichungssystem (8. 40), (8. 39). Wegen der erwähnten Symmetrie enthalten die Lösungen ($g_2$), ($g_3$) und ($g_5$) auch diejenige, die aus **C. 2** herrühren.

Damit ist der Fall **C. 2** erledigt.

**C. 3.** Es sei jetzt $c_1=c_4=0$. Dann bekommen wir aus (8. 37) und (8. 38) das Gleichungssystem

(8. 41)
$$G(z_1*z_2) = G(z_1)+G(z_2)+c_2G(z_1)H(z_2)+ \\ +c_2G(z_2)H(z_1)+c_3H(z_1)H(z_2),$$

(8. 42)
$$H(z_1*z_2) = H(z_1)+H(z_2)+c_2H(z_1)H(z_2).$$

Hier können wir voraussetzen, daß $c_2\neq 0$ ist. Gegenfalls ist $c_1=c_2=c_4=0$, das ist aber im Falle **C.2** schon erledigt. Wegen $c_2\neq 0$ ergibt sich aus (8. 42)

$$1+c_2H(z) = \psi(z),$$
$$H(z) = \beta[\psi(z)-1], \qquad \left(\beta=\frac{1}{c_2}\right).$$

Aus (8. 41) folgt weiter

$$G(z_1*z_2) = G(z_1)\psi(z_2)+G(z_2)\psi(z_1)- \\ -\alpha[\psi(z_1*z_2)-\psi(z_1)-\psi(z_2)+1], \qquad \left(\alpha=-\frac{c_3}{c_2^2}\right)$$

was man mit elementaren Umformungen auch in der Form

$$\frac{G(z_1*z_2)+\alpha}{\psi(z_1*z_2)}-\alpha = \frac{G(z_1)+\alpha}{\psi(z_1)}-\alpha+\frac{G(z_2)+\alpha}{\psi(z_2)}-\alpha$$

schreiben kann. Das ist aber wieder eine Cauchysche Gleichung der Gestalt (8. 2), also ist

$$G(z) = \alpha[\psi(z)-1]+\varphi_1(z)\psi(z).$$

Mit diesen Lösungen $G(z)$ und $H(z)$ erhalten wir aus (8. 1) die Funktionalgleichung

$$F(z_1*z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\beta[\psi(z_1)-1][\varphi_1(z_2)\psi(z_2)+\alpha\psi(z_2)-\alpha]+ \\ +\beta[\psi(z_2)-1][\varphi_1(z_1)\psi(z_1)+\alpha\psi(z_1)-\alpha],$$

was wir wieder in eine Cauchysche Gleichung von Typus (8. 2) umschreiben können, und zwar:

$$F(z_1*z_2)-\beta\varphi_1(z_1*z_2)\psi(z_1*z_2)-2\alpha\beta\psi(z_1*z_2)+2\alpha\beta = \\ = F(z_1)-\beta\varphi_1(z_1)\psi(z_1)-2\alpha\beta\psi(z_1)+2\alpha\beta+ \\ +F(z_2)-\beta\varphi_1(z_2)\psi(z_2)-2\alpha\beta\psi(z_2)+2\alpha\beta.$$

Daraus folgt die Lösung

$$F(z) = 2\alpha\beta[\psi(z)-1]+\beta\varphi_1(z)\psi(z)+\varphi_2(z).$$

Diese sind tatsächlich die Lösungen $(g_3)$, womit auch der Fall **C. 3** schon erledigt ist.

**C. 4.** Jetzt untersuchen wir den Fall $c_2=c_3=0$. Dann vereinfacht sich das Gleichungssystem (8. 37)—(8. 38) auf

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1)+G(z_2)+c_1G(z_1)G(z_2),$$

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1)+H(z_2)+c_4G(z_1)G(z_2)+c_1G(z_1)H(z_2)+c_1G(z_2)H(z_1).$$

Das liefert aber keine weiteren Lösungen. Schreiben wir nämlich hier statt $G(z)$ die Funktion $H(z)$ und umgekehrt, weiter ersetzen wir die Konstanten $c_1$ und $c_4$ mit $c_2$ und $c_3$, dann erhalten wir eben das Gleichungssystem (8. 42), (8. 41), was in **C. 3** schon erledigt ist. Das Lösungssystem, was also hier käme, ist wegen der erwähnten Symmetrie in $(g_3)$.

Damit ist auch der Fall **C. 4** erledigt.

**C. 5.** Betrachten wir den Fall, wo $c_2=c_5^2c_3$ und $c_4=c_5^2c_1$ $(c_1c_2c_3c_4c_5\neq 0)$ sind, dann erhalten wir aus (8. 37) bzw. (8. 38) mit den Bezeichnungen $c_6^2=c_1$ und $c_7^2=c_3$ die Gleichungen

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1)+G(z_2)+c_6^2G(z_1)G(z_2)+c_5^2c_7^2G(z_1)H(z_2)+ \\ +c_5^2c_7^2G(z_2)H(z_1)+c_7^2H(z_1)H(z_2), \tag{8. 43}$$

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1)+H(z_2)+c_5^2c_6^2G(z_1)G(z_2)+c_6^2G(z_1)H(z_2)+ \\ +c_6^2G(z_2)H(z_1)+c_5^2c_7^2H(z_1)H(z_2). \tag{8. 44}$$

Die Gleichungen (8. 43) und (8. 44) haben die Gestalten (8. 11) und (8. 12), also können wir den Hilfssatz 2 anwenden. Die Konstanten $c_6^2$, $c_5^2c_7^2$, $c_7^2$, $c_5^2c_6^2$ befriedigen die Relation (8. 14), d. h.

$$c_6^2\cdot c_5^2c_7^2-c_7^2\cdot c_5^2c_6^2 = 0,$$

also existieren solche Konstanten[12]) $A$, $B$ und $C$, mit denen eine Cauchysche Gleichung von Form (8. 13) folgt. Diese sind nach dem Hilfsatz 2

$$A_1 = c_6^2+c_5^2c_6c_7, \quad B_1 = c_5^2c_7^2+c_6c_7, \quad C_1 = 1, \tag{8. 45}$$

oder

$$A_2 = c_6^2-c_5^2c_6c_7, \quad B_2 = c_5^2c_7^2-c_6c_7, \quad C_2 = 1. \tag{8. 46}$$

Da aber die Konstanten $c_5$, $c_6$, $c_7$ unbekannt sind, wissen wir nicht, welches Lösungssystem hier nicht-trivial ist. Demgemäß unterscheiden wir also drei weitere Unterfälle:

**C. 5. 1.** $\quad c_6+c_5^2c_7=0, \quad (c_6-c_5^2c_7\neq 0),$

**C. 5. 2.** $\quad c_6+c_5^2c_7\neq 0, \quad c_6-c_5^2c_7=0,$

**C. 5. 3.** $\quad c_6+c_5^2c_7\neq 0, \quad c_6-c_5^2c_7\neq 0,$

$(c_5c_6c_7\neq 0).$

[12]) Man sieht, daß wir zu dieser Umformung auch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ nicht brauchen.

Da $c_6^2 = c_1 \neq 0$ gilt, können wir den Fall $c_6^2 + c_5^2 c_6 c_7 = c_6^2 - c_5^2 c_6 c_7 = 0$ außer acht lassen.

**C. 5. 1.** Es sei $c_6 + c_5^2 c_7 = 0$. Hier ist etwas einfacher[13]), wenn wir die Umformung (8. 13) nicht anwenden. Dann erhalten wir auf Grund der Gleichungen (8. 43) und (8. 44) die Cauchysche Gleichung

$$c_6 G(z_1 * z_2) + c_7 H(z_1 * z_2) = c_6^2 (c_6 + c_5^2 c_7) G(z_1) G(z_2) +$$
$$+ c_7^2 (c_6 + c_5^2 c_7) H(z_1) H(z_2) + c_6 c_7 (c_6 + c_5^2 c_1)[G(z_1) H(z_2) + G(z_2) H(z_1)] +$$
$$+ c_6 [G(z_1) + G(z_2)] + c_7 [H(z_1) + H(z_2)] =$$
$$= c_6 G(z_1) + c_7 H(z_1) + c_6 G(z_2) + c_7 H(z_2),$$

also ist

$$c_6 G(z) + c_7 H(z) = \varphi_1(z). \tag{8. 47}$$

Aus (8. 44) ergibt sich einerseits

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2) + c_5^2 [\varphi_1(z_1) - c_7 H(z_1)][\varphi_1(z_2) - c_7 H(z_2)] +$$
$$+ c_6 H(z_2)[\varphi_1(z_1) - c_7 H(z_1)] + c_6 H(z_1)[\varphi_1(z_2) - c_7 H(z_2)] + c_5^2 c_7^2 H(z_1) H(z_2),$$

d. h. wegen $c_6 = -c_5^2 c_7$ gilt

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2) + 4 c_5^2 c_7^2 H(z_1) H(z_2) - \tag{8. 48}$$
$$- 2 c_5^2 c_7 [H(z_1) \varphi_1(z_2) + H(z_2) \varphi_1(z_1)] + c_5^2 \varphi_1(z_1) \varphi_1(z_2).$$

Dieselbe Gleichung folgt auch aus (8. 43), aber mit etwas längerer Berechnung.

In diesem Falle erhalten wir aus (8. 48) die Gleichung

$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2) + c_5^2 [2 c_7 H(z_1) - \varphi_1(z_1)][2 c_7 H(z_2) - \varphi_1(z_2)],$$

die man auch in die Form

$$4 c_5^2 c_7^2 H(z_1 * z_2) - 2 c_5^2 c_7 \varphi_1(z_1 * z_2) + 1 =$$
$$= [4 c_5^2 c_7^2 H(z_1) - 2 c_5^2 c_7 \varphi_1(z_1) + 1][4 c_5^2 c_7^2 H(z_2) - 2 c_5^2 c_7 \varphi_1(z_2) + 1]$$

umschreiben kann. Da sie mit der Cauchyschen Gleichung (8. 3) equivalent ist, ergibt sich

$$4 c_5^2 c_7^2 H(z) - 2 c_5^2 c_7 \varphi_1(z) + 1 = \psi(z),$$

$$H(z) = \alpha\beta[\psi(z) - 1] + \beta \varphi_1(z), \qquad \left(\alpha = \frac{1}{2 c_5^2 c_7},\ \beta = \frac{1}{2 c_7}\right). \tag{8. 49}$$

Aus (8. 47) und (8. 49) folgt weiter

$$G(z) = \frac{\varphi_1(z) - c_7 H(z)}{c_6} = \alpha^2 [\psi(z) - 1] - \alpha \varphi_1(z), \tag{8. 50}$$

---

[13]) Wir wollen dieses andere Verfahren auch zur Abwechslung zeigen.

dabei auch $c_6 = -c_5^2 c_7$ in Betracht gezogen wurde. Setzen wir diese Lösungen in (8. 1) ein, dann bekommen wir die Gleichung

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + \alpha\beta[\alpha\psi(z_1) - \alpha - \varphi_1(z_1)][\alpha\psi(z_2) - \alpha + \varphi_1(z_2)] +$$
$$+ \alpha\beta[\alpha\psi(z_2) - \alpha - \varphi_1(z_2)][\alpha\psi(z_1) - \alpha + \varphi_1(z_1)] =$$
$$= F(z_1) + F(z_2) + 2\alpha^3\beta[\psi(z_1) - 1][\psi(z_2) - 1] - 2\alpha\beta\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2).$$

Daraus folgt die Cauchysche Gleichung (8. 2)

$$F(z_1 * z_2) - 2\alpha^3\beta[\psi(z_1 * z_2) - 1] + \alpha\beta\varphi_1(z_1 * z_2)^2 =$$
$$= F(z_1) - 2\alpha^3\beta[\psi(z_1) - 1] + \alpha\beta\varphi_1(z_1)^2 +$$
$$+ F(z_2) - 2\alpha^3\beta[\psi(z_2) - 1] + \alpha\beta\varphi_1(z_2)^2,$$

d. h. die Lösung ist

$$F(z) = 2\alpha^3\beta[\psi(z) - 1] - \alpha\beta\varphi_1(z)^2 + \varphi_2(z).$$

Diese Lösungen sind tatsächlich die Funktionen ($g_4$), womit der Fall **C. 5. 1** erledigt ist.

**C. 5. 2.** Falls $c_6 + c_5^2 c_7 \neq 0$ und $c_6 - c_5^2 c_7 = 0$ erfüllt sind, erhalten wir auf Grund von (8. 45) und (8. 13) die Cauchysche Gleichung

$$2c_5^4 c_7^2 G(z_1 * z_2) + 2c_5^2 c_7^2 H(z_1 * z_2) + 1 =$$
$$= [2c_5^4 c_7^2 G(z_1) + 2c_5^2 c_7^2 H(z_1) + 1][2c_5^4 c_7^2 G(z_2) + 2c_5^2 c_7^2 H(z_2) + 1)],$$

d. h. mit den Bezeichnungen $\alpha = -1/(2c_5^2 c_7)$ und $\beta = -1/(2c_7)$ ergibt sich

$$\frac{1}{2\alpha^2} G(z) + \frac{1}{2\alpha\beta} H(z) + 1 = \psi(z),$$

(8. 51) $$H(z) = 2\alpha\beta[\psi(z) - 1] - \frac{\beta}{\alpha} G(z).$$

Setzen wir dies in (8. 43) ein, dann folgt

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) + \frac{1}{4\alpha^2} G(z_1) G(z_2) +$$
$$+ \frac{1}{4\alpha\beta} G(z_1)\left[2\alpha\beta\psi(z_2) - 2\alpha\beta - \frac{\beta}{\alpha} G(z_2)\right] +$$
$$+ \frac{1}{4\alpha\beta} G(z_2)\left[2\alpha\beta\psi(z_1) - 2\alpha\beta - \frac{\beta}{\alpha} G(z_1)\right] +$$
$$+ \frac{1}{4\beta^2}\left[2\alpha\beta\psi(z_1) - 2\alpha\beta - \frac{\beta}{\alpha} G(z_1)\right]\left[2\alpha\beta\psi(z_2) - 2\alpha\beta - \frac{\beta}{\alpha} G(z_2)\right] =$$
$$= G(z_1) + G(z_2) + \alpha^2[\psi(z_1) - 1][\psi(z_2) - 1],$$

d. h. wir erhalten wieder eine Cauchysche Gleichung

$$G(z_1 * z_2) - \alpha^2[\psi(z_1 * z_2) - 1] =$$
$$= G(z_1) - \alpha^2[\psi(z_1) - 1] + G(z_2) - \alpha^2[\psi(z_2) - 1].$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich auch aus (8. 44), aber mit etwas längerer Berechnung. Die Lösung ist also

$$G(z) = \alpha^2[\psi(z) - 1] - \alpha\varphi_1(z). \tag{8. 52}$$

Weiter folgt aus (8. 51)

$$H(z) = \alpha\beta[\psi(z) - 1] + \beta\varphi_1(z). \tag{8. 53}$$

Da die Lösungen (8. 52) und (8. 53) mit den Funktionen (8. 50) und (8. 49) übereinstimmen, können wir hieraus weiter ebenso rechnen, wie im Falle **C. 5. 1**; dann erhalten wir wieder das Gleichungssystem $(g_4)$.

Damit ist der Fall **C. 5. 2** erledigt.

**C. 5. 3.** Es sei jetzt $(c_6 + c_5^2 c_7)(c_6 - c_5^2 c_7) \neq 0$. Dann bekommen wir auf Grund (8. 45) und (8. 13) die Cauchysche Gleichung

$$c_6(c_5^2 c_7 + c_6) G(z_1 * z_2) + c_7(c_5^2 c_7 + c_6) H(z_1 * z_2) + 1 = [c_6(c_5^2 c_7 + c_6) G(z_1) +$$
$$+ c_7(c_5^2 c_7 + c_6) H(z_1) + 1][c_6(c_5^2 c_7 + c_6) G(z_2) + c_7(c_5^2 c_7 + c_6) H(z_2) + 1],$$

d. h. mit den Bezeichnungen

$$\alpha = \frac{1}{2c_7(c_6 + c_5^2 c_7)}, \quad \beta = \frac{1}{2c_7(c_6 - c_5^2 c_7)}, \quad \gamma = \frac{c_7}{c_6} \tag{8. 54}$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2\alpha\gamma} G(z) + \frac{1}{2\alpha} H(z) + 1 = \psi_1(z),$$

$$H(z) = 2\alpha[\psi_1(z) - 1] - \frac{1}{\gamma} G(z). \tag{8. 55}$$

Setzen wir dies in (8. 43) ein und beachten wir auch (8. 54) bzw. die Relationen

$$\begin{cases} c_6^2 = \dfrac{\alpha+\beta}{4\alpha\beta\gamma}, \quad c_5^2 c_7^2 = \dfrac{\beta-\alpha}{4\alpha\beta}, \quad c_7^2 = \dfrac{(\alpha+\beta)\gamma}{4\alpha\beta}, \\ \qquad \alpha\beta\gamma \neq 0 \quad \textit{und} \quad (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \neq 0, \end{cases} \tag{8. 56}$$

dann folgt

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) + \frac{\alpha+\beta}{4\alpha\beta\gamma} G(z_1) G(z_2) +$$
$$+ \frac{\beta-\alpha}{4\alpha\beta} G(z_1)\left[2\alpha\psi_1(z_2) - 2\alpha - \frac{1}{\gamma} G(z_2)\right] + \frac{\beta-\alpha}{4\alpha\beta} G(z_2)\left[2\alpha\psi_1(z_1) - 2\alpha - \frac{1}{\gamma} G(z_1)\right] +$$
$$+ \frac{(\alpha+\beta)\gamma}{4\alpha\beta}\left[2\alpha\psi_1(z_1) - 2\alpha - \frac{1}{\gamma} G(z_1)\right]\left[2\alpha\psi_1(z_2) - 2\alpha - \frac{1}{\gamma} G(z_2)\right],$$

d. h. die Gleichung

$$(8.57)\qquad G(z_1 * z_2) = G(z_1)+G(z_2)+\frac{(\alpha+\beta)\alpha\gamma}{\beta}[\psi_1(z_1)-1][\psi_1(z_2)-1]-$$
$$-\frac{\alpha}{\beta}G(z_1)[\psi_1(z_2)-1]-\frac{\alpha}{\beta}G(z_2)[\psi_1(z_1)-1]+\frac{1}{\beta\gamma}G(z_1)G(z_2)$$

gilt. Mit etwas längerer Rechnung ergibt sich dieselbe Gleichung auch aus (8. 44).

Man sieht, daß die Gleichung (8. 57) dieselbe Form hat, wie (8. 21). Wir können also den Hilfsatz 4 anwenden. Die Relationen (8. 24) sind erfüllt, weil die Gleichungen

$$\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{1}{\beta\gamma}\frac{(\alpha+\beta)\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=0,$$
$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)-\frac{1}{\beta\gamma}\left[\frac{-(\alpha+\beta)\alpha\gamma}{\beta}\right]=0,$$
$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{1}{\beta\gamma}\frac{(\alpha+\beta)\alpha\gamma}{\beta}-\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)=0$$

tatsächlich gelten. So gilt auch die Umformung (8. 23) mit den Konstanten

$$A=\frac{1}{\beta\gamma},\quad B=-\frac{\alpha}{\beta},\quad C=1+\frac{\alpha}{\beta}.$$

Dann erhalten wir aus (8. 57) die Gleichung

$$\frac{1}{\beta\gamma}G(z_1 * z_2)-\frac{\alpha}{\beta}\psi_1(z_1 * z_2)+\frac{\alpha}{\beta}+1=$$
$$=\left[\frac{1}{\beta\gamma}G(z_1)-\frac{\alpha}{\beta}\psi_1(z_1)+\frac{\alpha}{\beta}+1\right]\left[\frac{1}{\beta\gamma}G(z_2)-\frac{\alpha}{\beta}\psi_1(z_2)+\frac{\alpha}{\beta}+1\right],$$

d. h. die Lösung ist

$$\frac{1}{\beta\gamma}G(z)-\frac{\alpha}{\beta}\psi_1(z)+\frac{\alpha}{\beta}+1=\psi_2(z),$$
$$G(z)=\alpha\gamma[\psi_1(z)-1]+\beta\gamma[\psi_2(z)-1].$$

Aus (8. 55) egibt sich

$$H(z)=\alpha[\psi_1(z)-1]-\beta[\psi_2(z)-1].$$

Mit diesen Lösungen folgt aus (8. 1)

$$F(z_1 * z_2)=F(z_1)+F(z_2)+$$
$$+\gamma\{\alpha[\psi_1(z_1)-1]+\beta[\psi_2(z_1)-1]\}\{\alpha[\psi_1(z_2)-1]-\beta[\psi_2(z_2)-1]\}+$$
$$+\gamma\{\alpha[\psi_1(z_2)-1]+\beta[\psi_2(z_2)-1]\}\{\alpha[\psi_1(z_1)-1]-\beta[\psi_2(z_1)-1]\}=$$
$$=F(z_1)+F(z_2)+2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_1)-1][\psi_1(z_2)-1]-$$
$$-2\beta^2\gamma[\psi_2(z_1)-1][\psi_2(z_2)-1],$$

d. h. die Cauchysche Gleichung

$$F(z_1 * z_2) - 2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_1 * z_2) - 1] + 2\beta^2\gamma[\psi_2(z_1 * z_2) - 1] =$$
$$= F(z_1) - 2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_1) - 1] + 2\beta^2\gamma[\psi_2(z_1) - 1] +$$
$$+ F(z_2) - 2\alpha^2\gamma[\psi_1(z_2) - 1] + 2\beta^2\gamma[\psi_2(z_2) - 1]$$

gilt. Die Lösung ist also

$$F(z) = 2\alpha^2\gamma[\psi_1(z) - 1] - 2\beta^2\gamma[\psi_2(z) - 1] + \varphi(z).$$

Diese Lösungen sind tatsächlich in ($g_5$) aufgezählt, womit auch der Fall **C. 5. 3** erledigt ist.

**C. 6.** Es seien schließlich $c_2 = c_5^2 c_4$ und $c_3 = c_5^2 c_1$, wobei auch $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \neq 0$. Dann vereinfachen sich die Gleichungen (8. 37) und (8. 38) auf

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) + c_1 G(z_1) G(z_2) +$$
$$+ c_5^2 c_4 G(z_1) H(z_2) + c_5^2 c_4 G(z_2) H(z_1) + c_5^2 c_1 H(z_1) H(z_2),$$
$$H(z_1 * z_2) = H(z_1) + H(z_2) + c_4 G(z_1) G(z_2) +$$
$$+ c_1 G(z_1) H(z_2) + c_1 G(z_2) H(z_1) + c_5^2 c_4 H(z_1) H(z_2).$$

Das können wir aber auf den vorigen Fall **C. 5** zurückführen. Führen wir nämlich hier die Bezeichnungen

(8. 58) $$c_1 = k_6^2, \quad c_4 = k_5^2 k_6^2, \quad c_5^2 = \frac{k_7^2}{k_6^2},$$

ein, dann erhalten wir genau das aus den Gleichungen (8. 43) und (8. 44) bestehende Gleichungssystem (statt $c_\nu$ steht $k_\nu$; $\nu = 5, 6, 7$). Da die Substitutionen (8. 58) für alle $c_1$, $c_4$, $c_5$ ($c_1 c_4 c_5 \neq 0$) durchführbar sind, stimmt dieser Fall mit **C. 5** tatsächlich überein.

Damit ist auch der Fall **C. 6** erledigt, womit auch der Beweis des Satzes 8 vollendet ist.

## § 9.

Jetzt behandeln wir die Funktionalgleichung

(9. 1) $$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + G(z_1) G(z_2) + H(z_1) H(z_2)$$
$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0;\ F(z), G(z), H(z)\colon Q_0 \to Q].$$

Der Umstand, daß mehrere Unterfälle dieser Funktionalgleichung mit den Unterfällen der Gleichung (8. 1) fast übereinstimmen, wird den Lösungsgang wesentlich vereinfachen.

Wir beweisen den

**Satz 9.** *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf $Q_0$ geltenden Funktionalgleichung* (9. 1) *sind die folgenden Funktionen:*

($h_1$) $F(z) = \varphi(z)$,
$G(z) = iH(z)$,
*$H(z)$ beliebige komplexe Funktion;*

$$(\mathrm{h}_2)\qquad \begin{aligned} F(z) &= \alpha^2[\psi_1(z)-1]+\beta^2[\psi_2(z)-1]+\varphi(z),\\ G(z) &= \alpha[\psi_1(z)-1],\\ H(z) &= \beta[\psi_2(z)-1]; \end{aligned}$$

$$(\mathrm{h}_3)\qquad \left.\begin{aligned} F(z) &= 2\beta\gamma^2[(\alpha+\beta)\psi_2(z)-(\alpha-\beta)\psi_1(z)-2\beta],\\ G(z) &= \gamma[(\alpha+\beta)\psi_2(z)-(\alpha-\beta)\psi_1(z)-2\beta],\\ H(z) &= \pm i\gamma[\psi_1(z)-\psi_2(z)]; \end{aligned}\right\}\ (\alpha^2-\beta^2=1)$$

$$(\mathrm{h}_4)\qquad \begin{aligned} F(z) &= \alpha^2[\psi(z)+\psi(z)\varphi_1(z)-1]+\varphi_2(z),\\ G(z) &= \alpha[\psi(z)+\psi(z)\varphi_1(z)-1],\\ H(z) &= \pm i\alpha\psi(z)\varphi_1(z); \end{aligned}$$

$$(\mathrm{h}_5)^{14)}\qquad \begin{aligned} F(z) &= \alpha\varphi_1(z)^3+\tfrac{1}{2}\varphi_1(z)^2\pm i\varphi_1(z)\varphi_2(z)+\varphi_3(z),\\ G(z) &= 3\alpha\varphi_1(z)^2\pm i\varphi_2(z)+\varphi_1(z),\\ H(z) &= \mp 3i\alpha\varphi_1(z)^2+\varphi_2(z); \end{aligned}$$

$$(\mathrm{h}_6)\qquad \begin{aligned} F(z) &= \gamma^2(1+\beta^2)[\psi(z)-1]+\tfrac{1}{2}(1+\beta^2)\varphi_1(z)^2+\varphi_2(z),\\ G(z) &= \gamma[\psi(z)-1]-\beta\varphi_1(z),\\ H(z) &= \beta\gamma[\psi(z)-1]+\varphi_1(z); \end{aligned}$$

*wobei* $\varphi(z)$, $\varphi_\nu(z)$ $(\nu=1,2,3)$ *bzw.* $\psi(z)$, $\psi_\mu(z)$ $(\mu=1,2)$ *den auf* $Q_0$ *geltenden Funktionalgleichungen* (8. 2) *bzw.* (8. 3) *genügende, sonst aber beliebige komplexe Funktionen bezeichnen und* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *beliebige komplexe Konstanten sind. Weitere Lösungen sind auch noch diejenige Funktionen* $F(z)$, $G(z)$, $H(z)$, *die aus den vorigen mit der Vertauschung der Funktionen*

$$(\mathrm{h})\qquad G(z)\leftrightarrow H(z)$$

*entstehen. Es gibt keine andere Lösung.*

Beweis. Wir können uns darüber leicht überzeugen, daß die im vorigen aufgezählten Funktionen $(\mathrm{h}_1)$—$(\mathrm{h}_6)$ der Gleichung (9. 1) tatsächlich genügen. Weiter sind die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ in (9. 1) wegen ihrer symmetrischen Rolle in der Tat vertauschbar. Im folgenden genügt es also zu zeigen, daß jede Lösung eine der Gestalten $(\mathrm{h}_1)$—$(\mathrm{h}_6)$, bzw. die von ihnen durch die Vertauschung (h) entstehenden Gestalten hat. Auch im weiteren bezeichnen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ *nur solche Funktionen*, die den Gleichungen (8. 2) bzw. (8. 3) genügen.

Wegen der Assoziativität der Operation $z_1 * z_2$ gilt

$$\begin{aligned} F[(z_1*\zeta)*z_2] &= F(z_1*\zeta)+F(z_2)+G(z_1*\zeta)G(z_2)+H(z_1*\zeta)H(z_2) =\\ &= F(z_1)+F(\zeta*z_2)+G(z_1)G(\zeta*z_2)+H(z_1)H(\zeta*z_2) = F[z_1*(\zeta*z_2)], \end{aligned}$$

d. h. mit der $\Delta$-Bezeichnung ist

$$\Delta[F(z_1*\zeta),1]+\Delta[1,F(z_2)]+\Delta[G(z_1*\zeta),G(z_2)]+\Delta[H(z_1*\zeta),H(z_2)] = 0.$$

[14]) Man muß überall das obere oder überall das untere Vorzeichen nehmen.

Setzen wir jetzt die Gleichung (9. 1) in dieses ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}&\Delta[F(z_1)+F(\zeta)+G(z_1)G(\zeta)+H(z_1)H(\zeta), 1]+\Delta[1, F(z_2)]+\\&+\Delta[G(z_1*\zeta), G(z_2)]+\Delta[H(z_1*\zeta), H(z_2)] =\\&= \Delta[F(z_1), 1]+\Delta[G(z_1), G(\zeta)]+\Delta[H(z_1), H(\zeta)]+\Delta[1, F(z_2)]+\\&+\Delta[G(z_1*\zeta), G(z_2)]+\Delta[H(z_1*\zeta), H(z_2)] = 0,\end{aligned}$$

also gilt

$$\Delta[G(z_1*\zeta)-G(\zeta), G(z_2)]+\Delta[H(z_1*\zeta)-H(\zeta), H(z_2)] = 0. \tag{9. 2}$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit $H(z)$, dann folgt

$$\Delta[G(z_1*\zeta)-G(\zeta), G(z_2), H(z_3)] = 0,$$

was nur in den Fällen

**D.**

$$H(z)\equiv 0, \tag{9. 3}$$

**E.**

$$G(z) = k_1 H(z), \qquad (k_1 = konst.) \tag{9. 4}$$

**F.**

$$G(z*\zeta)-G(\zeta) = M(\zeta)G(z)+N(\zeta)H(z) \tag{9. 5}$$

erfüllt ist.

**D.** Es sei $H(z)\equiv 0$, dann ergibt sich aus (9. 2)

$$\Delta[G(z_1*\zeta)-G(\zeta), G(z_2)] = 0,$$

also gilt entweder

**D. 1.** $$G(z)\equiv 0,$$

oder

**D. 2.**

$$G(z*\zeta)-G(\zeta) = M(\zeta)G(z). \tag{9. 6}$$

**D. 1.** Im Falle $G(z)\equiv H(z)\equiv 0$ vereinfacht (9. 1) sich auf die Cauchysche Gleichung (8. 2)

$$F(z_1*z_2) = F(z_1)+F(z_2),$$

also ist $F(z)=\varphi(z)$. Dieses Lösungssystem ist in jedem der Lösungen $(h_1)$—$(h_6)$ enthalten.

**D. 2.** Aus (9. 6) folgt [vgl. (8. 32)] die Gleichung

$$G(z_1*z_2) = k_1 G(z_1)G(z_2)+G(z_1)+G(z_2), \qquad (k_1 = konst.)$$

was nur die Lösungen

**D. 2. 1.** $$G(z)=\varphi_1(z). \qquad (k_1=0)$$

**D. 2. 2.** $$G(z)=\alpha[\psi(z)-1] \qquad \left(\alpha=\frac{1}{k_1},\ k_1\neq 0\right)$$

besitzt (vgl. **B. 2**).

**D. 2. 1.** Wenn $G(z)=\varphi_1(z)$ und $H(z)\equiv 0$ sind, ergibt sich aus (9. 1)

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2),$$

deren Lösung (vgl. **B. 2. 1**)

$$F(z) = \tfrac{1}{2}\varphi_1(z)^2+\varphi_2(z)$$

ist. Das ist ein Spezialfall von $(h_5)$ $[\alpha=0$ und $\varphi_2(z)\equiv 0]$.

**D. 2. 2.** Mit den Lösungen $G(z) = \alpha[\psi(z)-1]$ und $H(z)\equiv 0$ geht (9. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\alpha^2[\psi(z_1)-1][\psi(z_2)-1]$$

über, deren Lösung (vgl. **B. 2. 2**)

$$F(z) = \alpha^2[\psi(z)-1]+\varphi(z)$$

ist. Dieses Lösungssystem ist in $(h_2)$ $[\beta=0$ oder $\psi_2(z)\equiv 1]$ enthalten.

Damit ist der Fall **D** erledigt.

Des weiteren können wir, auch *wegen der symmetrischen Rolle der Funktionen* $G(z)$ *und* $H(z)$, voraussetzen, daß $G(z_1)H(z_2)\not\equiv 0$ ist.

**E.** Es sei jetzt $G(z)=k_1H(z)$, wo $k_1\neq 0$ wegen $G(z)\not\equiv 0$ besteht. Dann folgt aus (9. 2)

$$(k_1^2+1)\Delta[H(z_1 * \zeta)-H(\zeta), H(z_2)] = 0, \tag{9. 7}$$

wobei wir zwei Unterfälle unterscheiden:

**E. 1.** $k_1 = \pm i,$ $(i^2=-1)$

**E. 2.** $k_1^2+1\neq 0.$

**E. 1.** Wenn in (9. 7) $k_1=\pm i$ ist, erhalten wir aus (9. 1) für $F(z)$ eine Cauchysche Gleichung von Typus (8. 2), d. h. die Lösungen sind $F(z)=\varphi(z)$, $G(z)=iH(z)$ und $H(z)=$ *beliebig*. Dieses Lösungssystem ist eben $(h_1)$.

**E. 2.** Im Falle $k_1^2+1\neq 0$ ergibt sich aus (9. 1)

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+(1+k_1^2)H(z_1)H(z_2),$$

weiter erhalten wir aus (9. 7) auf bekannte Weise (vgl. **B. 2**) die Gleichung

$$H(z_1 * z_2) = k_2H(z_1)H(z_2)+H(z_1)+H(z_2) \qquad (k_2=\mathit{konst.}).$$

Im weiteren geht die Berechnung ähnlicherweise wie in **D. 2**, und die Lösungen sind

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2}(1+\alpha^2)\varphi_1(z)^2+\varphi_2(z), \\ G(z)&=\alpha\varphi_1(z), \quad H(z)=\varphi_1(z), \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha=k_1)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= (1+\beta^2)\gamma^2[\psi(z)-1]+\varphi(z), \\ G(z) &= \beta\gamma[\psi(z)-1], \\ H(z) &= \gamma[\psi(z)-1], \end{aligned}\right\} \qquad \left(\beta=k_1,\ \gamma=\frac{1}{k_2},\ k_2\neq 0\right).$$

Beide Lösungssysteme sind Spezialfälle von $(h_6)$ $[\gamma(\psi(z)-1)\equiv 0$ bzw. $\varphi_1(z)\equiv 0]$.

**F.** Jetzt betrachten wir die Gleichung (9. 5). Da diese mit der Gleichung (8. 30) übereinstimmt, folgt[15]) daraus (vgl. **C**)

$$(9.8)\qquad \begin{cases} G(z_1 * z_2) = k_1 G(z_1) G(z_2) + k_2 G(z_1) H(z_2) + \\ + k_2 G(z_2) H(z_1) + k_3 H(z_1) H(z_2) + G(z_1) + G(z_2) \\ (k_1, k_2, k_3 = konst.). \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (9. 2)

$$\begin{aligned} &\Delta\{[k_1 G(\zeta) + k_2 H(\zeta) + 1] G(z_1) + [k_2 G(\zeta) + k_3 H(\zeta)] H(z_1), G(z_2)\} + \\ &\quad + \Delta[H(z_1 * \zeta) - H(\zeta), H(z_2)] = \\ &= -[k_2 G(\zeta) + k_3 H(\zeta)] \Delta[G(z_1), H(z_2)] + \Delta[H(z_1 * \zeta) - H(\zeta), H(z_2)] = \\ &= \Delta\{H(z_1 * \zeta) - H(\zeta) - [k_2 G(\zeta) + k_3 H(\zeta)] G(z_1), H(z_2)\} = 0, \end{aligned}$$

woraus wegen $H(z) \not\equiv 0$

$$(9.9)\qquad H(z * \zeta) - H(\zeta) - k_2 G(z) G(\zeta) - k_3 G(z) H(\zeta) = P(\zeta) H(z)$$

folgt. Laut

$$\begin{aligned} H(z_1 * z_2) - k_2 G(z_1) G(z_2) &= P(z_2) H(z_1) + k_3 G(z_1) H(z_2) + H(z_2) = \\ &= P(z_1) H(z_2) + k_3 G(z_2) H(z_1) + H(z_1) \end{aligned}$$

gilt auch

$$\Delta(P - k_3 G - 1, H) = 0,$$

was für $P(z)$ wegen $H(z) \not\equiv 0$ die Lösung

$$P(z) = k_3 G(z) + k_4 H(z) + 1 \qquad (k_4 = konst.)$$

liefert. Damit ergibt sich aus (9. 9)

$$(9.10)\qquad \begin{aligned} H(z_1 * z_2) &= k_2 G(z_1) G(z_2) + k_3 G(z_1) H(z_2) + \\ &+ k_3 G(z_2) H(z_1) + k_4 H(z_1) H(z_2) + H(z_1) + H(z_2). \end{aligned}$$

Die Funktionalgleichungen (9. 8) und (9. 10) haben die Formen (8. 4) und (8. 5), wir können also den Hilfsatz 1 anwenden, d. h. für die Konstanten gilt die Gleichung[16])

$$\begin{vmatrix} k_2 & k_1 - k_3 \\ k_3 & k_2 - k_4 \end{vmatrix} = 0.$$

[15]) Bei der Ableitung von (8. 37) aus (8. 30) haben wir nur die lineare Unabhängigkeit von $G(z)$ und $H(z)$ [vgl. Fußnote 3)] und die Kommutativität der Operation $z_1 * z_2$ ausgenützt, welche auch hier gültig sind.

[16]) Die weiteren Beschränkungen, die sich für die Konstanten $k_1, \dots, k_4$ aus dem Hilfsatz 1 ergeben, liefern nur Identitäten.

Daraus folgen die folgenden Unterfälle:

**F. 1.** $k_2 = k_3 = 0,$

**F. 2.** $k_1 - k_3 = k_2 - k_4 = 0,$

**F. 3.** $k_2 = k_1 - k_3 = 0,$

**F. 4.** $k_3 = k_2 - k_4 = 0,$

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{F. 5.} & k_3 = k_5 k_2,\ k_2 - k_4 = k_5(k_1 - k_3), \\ \textbf{F. 6.} & k_1 - k_3 = k_5 k_2,\ k_2 - k_4 = k_5 k_3,\end{array}\right\} k_2 k_3 k_5 (k_1 - k_3)(k_2 - k_4) \neq 0.$$

**F. 1.** Wenn $k_2 = k_3 = 0$ ist, erhalten wir aus (9. 8) und (9. 10) das Gleichungssystem

$$G(z_1 * z_2) = k_1 G(z_1) G(z_2) + G(z_1) + G(z_2), \tag{9. 11}$$

$$H(z_1 * z_2) = k_4 H(z_1) H(z_2) + H(z_1) + H(z_2), \tag{9. 12}$$

wo wir noch die weiteren Unterfälle[17])

**F. 1. 1.** $k_1 = k_4 = 0,$

**F. 1. 2.** $k_1 = 0, \quad k_4 \neq 0,$

**F. 1. 3.** $k_1 k_4 \neq 0$

unterscheiden müssen.

**F. 1. 1.** Es sei $k_1 = k_4 = 0$, dann folgen die Lösungen $G(z) = \varphi_1(z)$ und $H(z) = \varphi_2(z)$ aus (9. 11) und (9. 12). Damit geht die Gleichung (9. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + \varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2) + \varphi_2(z_1)\varphi_2(z_2)$$

über, die ebenso wie die in **B. 2. 1** vorkommende ähnliche Gleichung gelöst werden kann. Die Lösung ist

$$F(z) = \frac{1}{2}\varphi_1(z)^2 + \frac{1}{2}\varphi_2(z)^2 + \varphi_3(z).$$

Dieses Lösungssystem ist in $(h_5)$ $[\alpha = 0$ und $\varphi_1(z) = \varphi(z) \pm i\varphi_2(z)]$ enthalten.

**F. 1. 2.** Wenn in (9. 11) und (9. 12) $k_1 = 0$ und $k_4 \neq 0$ sind, erhalten wir (vgl. **B. 2. 2**) die Lösungen

$$G(z) = \varphi_1(z), \quad H(z) = \alpha[\psi(z) - 1] \qquad \left(\alpha = \frac{1}{k_4}\right).$$

Damit ergibt sich aus (9. 1)

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) + \varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2) + \alpha^2[\psi(z_1) - 1][\psi(z_2) - 1],$$

deren Lösung (vgl. **C. 5. 1**)

$$F(z) = \alpha^2[\psi(z) - 1] + \tfrac{1}{2}\varphi_1(z)^2 + \varphi_2(z)$$

---

[17]) Wegen der symmetrischen Rolle der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ enthält **F. 1. 2** auch den Fall, wo $k_1 \neq 0$ und $k_4 = 0$ ist.

ist. Wegen des erwähnten Rollenwechsels von $G(z)$ und $H(z)$ enthält $(h_6)$ $[\beta=0$ und $\gamma=\alpha]$ auch dieses Lösungssystem.

**F. 1. 3.** Falls in (9. 11) und (9. 12) $k_1k_4\neq0$ ist, folgen (vgl. **B. 2. 2**) die Lösungen

$$G(z)=\alpha[\psi_1(z)-1], \qquad \left(\alpha=\frac{1}{k_1}\right)$$

$$H(z)=\beta[\psi_2(z)-1], \qquad \left(\beta=\frac{1}{k_4}\right)$$

womit wir aus (9. 1) die Gleichung

$$F(z_1*z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\alpha^2[\psi_1(z_1)-1][\psi_1(z_2)-1]+\beta^2[\psi_2(z_1)-1][\psi_2(z_2)-1]$$

erhalten. Das besitzt (vgl. **C. 5. 3**) die Lösung

$$F(z) = \alpha^2[\psi_1(z)-1]+\beta^2[\psi_2(z)-1]+\varphi(z).$$

Das ist eben das Lösungssystem $(h_2)$.

Damit ist der Fall **F. 1** erledigt.

**F. 2.** Es seien jetzt $k_1-k_3=0$ und $k_2-k_4=0$. Dann erhalten wir aus (9. 8) und (9. 10) das Gleichungssystem

(9. 13) $$G(z_1*z_2) = k_1G(z_1)G(z_2)+k_2G(z_1)H(z_2)+ +k_2G(z_2)H(z_1)+k_1H(z_1)H(z_2)+G(z_1)+G(z_2),$$

(9. 14) $$H(z_1*z_2) = k_2G(z_1)G(z_2)+k_1G(z_1)H(z_2)+ +k_1G(z_2)H(z_1)+k_2H(z_1)H(z_2)+H(z_1)+H(z_2),$$

wobei wir die Unterfälle[18])

**F. 2. 1.** $k_1=k_2=0,$

**F. 2. 2.** $k_1=0, \quad k_2\neq0,$

**F. 2. 3.** $k_1k_2\neq0$

unterscheiden.

**F. 2. 1.** Der Fall $k_1=k_2=0$ ist schon in **F. 1. 1** erledigt.

**F. 2. 2.** Wenn $k_1=0$ und $k_2\neq0$ sind, vereinfacht sich (9. 13) auf

$$G(z_1*z_2) = G(z_1)[k_2H(z_2)+1]+G(z_2)[k_2H(z_1)+1],$$

was von der Form (5. 1) ist. Wegen $G(z)\not\equiv0$ sind die Lösungen dieser Gleichung

**F. 2. 2. a.** $G(z) = \psi(z)\varphi_1(z), \quad 1+k_2H(z) = \psi(z);$

und

**F. 2. 2. b.** $G(z) = \alpha[\psi_1(z)-\psi_2(z)], \quad [\psi_1(z)\not\equiv\psi_2(z);\ \alpha\neq0,\ konst.]$

$$1+k_2H(z) = \tfrac{1}{2}[\psi_1(z)+\psi_2(z)].$$

---

[18]) Wegen der symmetrischen Rolle von $G(z)$ und $H(z)$ enthält **F. 2. 2** auch den Fall, wo $k_1\neq0$ und $k_2=0$ ist.

**F. 2. 2. a.** In diesem Falle ergibt sich keine Lösung. Aus (9. 14) folgt nämlich

$$-k_2^2G(z_1)G(z_2) = [k_2H(z_1)+1][k_2H(z_2)+1]-[k_2H(z_1*z_2)+1] =$$
$$= \psi(z_1)\psi(z_2)-\psi(z_1*z_2) \equiv 0,$$

was wegen $k_2 \neq 0$ den ausgeschlossenen Fall $G(z) \equiv 0$ nach sich zieht.

**F. 2. 2. b.** Aus der Gleichung (9. 14) erhalten wir

$$\frac{1}{2}[\psi_1(z_1*z_2)+\psi_2(z_1*z_2)] = k_2H(z_1*z_2)+1 =$$
$$= [k_2H(z_1)+1][k_2H(z_2)+1]+k_2^2G(z_1)G(z_2) =$$
$$= \frac{1}{4}[\psi_1(z_1)+\psi_2(z_1)][\psi_1(z_2)+\psi_2(z_2)]+k_2^2\alpha^2[\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)][\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)],$$

d. h. auch die Gleichung

$$\left(k_2^2\alpha^2-\frac{1}{4}\right)[\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)][\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)] = 0$$

gilt, woraus wegen $\psi_1(z) \not\equiv \psi_2(z)$ $1/2k_2 = \pm\alpha$ folgt. Damit haben wir die Lösung

$$H(z) = \pm\alpha[\psi_1(z)+\psi_2(z)-2]$$

und statt (9. 1) können wir die Gleichung

$$F(z_1*z_2) = F(z_1)+F(z_2)+\alpha^2[\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)][\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)]+$$
$$+\alpha^2[\psi_1(z_1)+\psi_2(z_1)-2][\psi_1(z_2)+\psi_2(z_2)-2] =$$
$$= F(z_1)+F(z_2)+2\alpha^2[\psi_1(z_1)-1][\psi_1(z_2)-1]+2\alpha^2[\psi_2(z_1)-1][\psi_2(z_2)-1]$$

schreiben, deren Lösung (vgl. **C. 5. 3**)

$$F(z) = 2\alpha^2[\psi_1(z)+\psi_2(z)-2]+\varphi(z)$$

ist. Wegen des erwähnten Rollenwechsels enthält der Fall $(h_3)$ $[\alpha=0, \beta=\pm i, \pm i\gamma=\alpha]$ auch dieses Lösungssystem.

**F. 2. 3.** Es sei jetzt in (9. 13) und (9. 14) $k_1k_2 \neq 0$. Jetzt wenden wir auf dieses Gleichungssystem den Hilfsatz 2 an. Für die Konstanten $k_1$ und $k_2$ ist (8. 14) erfüllt. Weiter können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $k_1+k_2 \neq 0$ ist; gegenfalls berechnen wir mit $k_1-k_2 \neq 0$, weil $k_1+k_2$ und $k_1-k_2$ wegen $k_1k_2 \neq 0$ gleichzeitig nicht verschwinden können. So erhalten wir auf Grund (8. 13) die Gleichung

$$(9.\ 15) \qquad (k_1+k_2)[G(z_1*z_2)+H(z_1*z_2)]+1 =$$
$$= \{(k_1+k_2)[G(z_1)+H(z_1)]+1\}\{(k_1+k_2)[G(z_2)+H(z_2)]+1\},$$

woraus

$$(9.\ 16) \qquad G(z)+H(z) = 2\alpha[\psi(z)-1] \qquad \left(2\alpha=\frac{1}{k_1+k_2}\neq 0\right)$$

$$G(z)+H(z) = 2\alpha[\psi(z)-1]$$

folgt. Wegen $G(z) \not\equiv kH(z)$ ist $\psi(z) \not\equiv 1$. Bei der Gleichung (9. 15) müssen wir zwei weitere Unterfälle unterscheiden:

**F. 2. 3. a.** $k_1 = k_2$,

**F. 2. 3. b.** $k_1 \neq k_2$.

**F. 2. 3. a.** Wenn $k_1 = k_2$ ist, ergibt sich aus (9. 13) und (9. 14)

$$G(z_1 * z_2) - H(z_1 * z_2) = G(z_1) - H(z_1) + G(z_2) - H(z_2),$$

deren Lösung

$$G(z) - H(z) = 2\varphi_1(z) \tag{9. 17}$$

ist. Aus den Gleichungen (9. 16) und (9. 17) folgen

$$G(z) = \alpha[\psi(z) - 1] + \varphi_1(z),$$
$$H(z) = \alpha[\psi(z) - 1] - \varphi_1(z),$$

womit (9. 1) in

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1) + F(z_2) +$$
$$+ 2\alpha^2[\psi(z_1) - 1][\psi(z_2) - 1] + 2\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2)$$

übergeht. Diese Gleichung besitzt (vgl. **C. 5. 1**) die Lösung

$$F(z) = 2\alpha^2[\psi(z) - 1] + \varphi_1(z)^2 + \varphi_2(z).$$

Das ist ein Spezialfall von $(h_6)$ $[\beta = 1$ und $\varphi_1(z) = -\varphi(z)]$.

**F. 2. 3. b.** Wenn $k_1 - k_2 \neq 0$ ist, ergibt sich keine Lösung. Dann können wir nämlich auch eine zu (9. 15) ähnliche Gleichung statt $k_1 + k_2$ mit $k_1 - k_2$ aufschreiben, deren Lösung

$$G(z) + H(z) = 2\beta[\psi_2(z) - 1] \qquad \left(2\beta = \frac{1}{k_1 - k_2} \neq 0\right) \tag{9. 18}$$

ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ sind $\psi_1(z) \not\equiv konst.$ und $\psi_2(z) \not\equiv konst.$ in (9. 16) bzw. (9. 18). So erhalten wir aus (9. 16) und (9. 18), auch die Gleichung (8. 3) angewendet, die Relation $\alpha = \beta$, was aber den ausgeschlossenen Fall $k_2 = 0$ nach sich zieht.

Damit ist auch der Fall **F. 2** erledigt.

**F. 3.** Es seien jetzt in (9. 8) bzw. (9. 10) $k_2 = 0$ und $k_1 - k_3 = 0$, dann folgen

$$G(z_1 * z_2) = k_1 G(z_1) G(z_2) + k_1 H(z_1) H(z_2) + G(z_1) + G(z_2), \tag{9. 19}$$

$$H(z_1 * z_2) = k_1 G(z_1) H(z_2) + k_1 G(z_2) H(z_1) +$$
$$+ k_4 H(z_1) H(z_2) + H(z_1) + H(z_2). \tag{9. 20}$$

Hier ist $k_1 \neq 0$, sonst wäre auch $k_3 = 0$, diesen Fall haben wir aber in **F. 1** schon behandelt. So können wir (9. 19) auf (4. 1) zurückführen, und zwar gilt

$$k_1 G(z_1 * z_2) + 1 = [k_1 G(z_1) + 1][k_1 G(z_2) + 1] - (\pm i k_1)^2 H(z_1) H(z_2), \qquad (i^2 = -1)$$

deren Lösungen

**F. 3. 1.**
$$k_1 G(z)+1 = \frac{1}{2\beta}[(\alpha+\beta)\psi_2(z)-(\alpha-\beta)\psi_1(z)],$$
$$\pm ik_1 H(z) = \frac{1}{2\beta}[\psi_1(z)-\psi_2(z)],$$
$$(\alpha^2-\beta^2=1,\ \beta\neq 0);$$

**F. 3. 2.**
$$k_1 G(z)+1 = \psi(z)[1\pm\varphi_1(z)],$$
$$\pm ik_1 H(z) = \psi(z)\varphi_1(z)$$

sind, wobei die Vorzeichen $\pm$ (voneinander unabhängig) beliebig gewählt werden können.

**F. 3. 1.** Setzen wir die Lösungen $G(z)$ und $H(z)$ in (9. 1) ein, dann erhalten wir mit der Bezeichnung $\gamma=1/(2\beta k_1)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= F(z_1)+F(z_2)-\gamma^2[\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)][\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)]+ \\ &+\gamma^2[(\alpha+\beta)\psi_2(z_1)-(\alpha-\beta)\psi_1(z_1)-2\beta][(\alpha+\beta)\psi_2(z_2)-(\alpha-\beta)\psi_1(z_2)-2\beta] = \\ &= F(z_1)+F(z_2)+\gamma^2[(\alpha-\beta)^2-1]\psi_1(z_1*z_2)+\gamma^2[(\alpha+\beta)^2-1]\psi_2(z_1*z_2)+ \\ &+2\beta\gamma^2(\alpha-\beta)[\psi_1(z_1)+\psi_1(z_2)]-2\beta\gamma^2(\alpha+\beta)[\psi_2(z_1)+\psi_2(z_2)]+4\beta^2\gamma^2, \\ &[(\alpha-\beta)^2-1 = -2\beta(\alpha-\beta),\ (\alpha+\beta)^2-1 = 2\beta(\alpha+\beta)], \end{aligned}$$

deren Lösung

$$F(z) = 2\beta\gamma^2\big[(\alpha+\beta)\psi_2(z)-(\alpha-\beta)\psi_1(z)-2\beta\big]+\varphi(z)$$

ist. Das ist eben das Lösungssystem ($h_3$).

Es sei hier noch bemerkt, daß die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ auch der Gleichung (9. 20) nur im Falle $k_4 = \pm i\alpha/(\beta\gamma)$ genügen, was mit leichter Rechnung sofort folgt.

**F. 3. 2.** Mit der Bezeichnung $\alpha=1/k_1$ haben wir in diesem Falle statt (9. 1) die Gleichung

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= F(z_1)+F(z_2)-\alpha^2\psi(z_1)\varphi_1(z_1)\psi(z_2)\varphi_1(z_2)+ \\ &+\alpha^2\big[\psi(z_1)\pm\psi(z_1)\varphi_1(z_1)-1\big]\big[\psi(z_2)\pm\psi(z_2)\varphi_1(z_2)-1\big] = \\ &= F(z_1)+F(z_2)+\alpha^2\psi(z_1*z_2)\big[1\pm\varphi_1(z_1*z_2)\big]- \\ &-\alpha^2\psi(z_1)\big[1\pm\varphi_1(z_1)\big]-\alpha^2\psi(z_2)\big[1\pm\varphi_1(z_2)\big]+\alpha^2, \end{aligned}$$

welche (vgl. **C. 3**) die Lösung

$$F(z) = \alpha^2\big[\psi(z)\pm\varphi_1(z)\psi(z)-1\big]+\varphi_2(z)$$

liefert, wobei die Vorzeichen $\pm$ nur so gewählt werden können, wie bei der Lösung $G(z)$. Dieses Lösungssystem ist eben ($h_4$). Bei ($h_4$) haben wir das Vorzeichen $\pm$ in $\varphi_1(z)$ eingeschmolzen.

Wir bemerken noch, daß die Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ auch der Gleichung (9. 20) nur in den Fällen $k_4 = \pm 2i/\alpha_1$ genügen, wobei „+" steht falls in $G(z)$ und $H(z)$ die Vorzeichen $\pm$ übereinstimmen und „−" falls sie verschieden sind, was wir aber hier nicht spezifizieren.

Damit ist auch der Fall **F. 3** erledigt.

**F. 4.** Der Fall $k_3 = k_2 - k_4 = 0$ liefert keine weiteren Lösungen, weil das aus (9. 8) und (9. 10) erhaltbare Gleichungssystem

$$G(z_1 * z_2) = k_1 G(z_1) G(z_2) + k_2 G(z_1) H(z_2) + k_2 G(z_2) H(z_1) + G(z_1) + G(z_2),$$
$$H(z_1 * z_2) = k_2 G(z_1) G(z_2) + k_2 H(z_1) H(z_2) + H(z_1) + H(z_2)$$

wegen des erwähnten Rollenwechsels der Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ von (9. 19)—(9. 20) nicht verschieden ist.

**F. 5.** Jetzt untersuchen wir den Fall

$$k_3 - k_5 k_2 = k_2 - k_4 - k_5(k_1 - k_3) = 0, \quad k_2 k_3 k_5 (k_1 - k_3)(k_2 - k_4) \neq 0.$$

Damit erhalten wir aus (9. 8) und (9. 10) das Gleichungssystem

(9. 21)
$$G(z_1 * z_2) = k_1 G(z_1) G(z_2) + k_2 G(z_1) H(z_2) + $$
$$+ k_2 G(z_2) H(z_1) + k_5 k_2 H(z_1) H(z_2) + G(z_1) + G(z_2),$$

(9. 22)
$$H(z_1 * z_2) = k_2 G(z_1) G(z_2) + k_5 k_2 G(z_1) H(z_2) + k_5 k_2 G(z_2) H(z_1) + $$
$$+ (k_2 - k_5 k_1 + k_5^2 k_2) H(z_1) H(z_2) + H(z_1) + H(z_2),$$

woraus[19]) eine Gleichung von Form (4. 1) folgt:

(9. 23)
$$k_1 G(z_1 * z_2) + k_2 H(z_1 * z_2) + 1 =$$
$$= [k_1 G(z_1) + k_2 H(z_1) + 1][k_1 G(z_2) + k_2 H(z_2) + 1] -$$
$$- (\pm i k_2)[G(z_1) + k_5 H(z_1)](\pm i k_2)[G(z_2) + k_5 H(z_2)],$$

d. h. das Funktionspaar

(9. 24)
$$C(z) \stackrel{\text{def}}{=} k_1 G(z) + k_2 H(z) + 1,$$

(9. 25)
$$S(z) \stackrel{\text{def}}{=} \pm i k_2 G(z) + k_5 H(z)$$

genügt der Gleichung (4. 1). Im wesentlichen enthält (9. 25) zwei verschiedene Fälle, je nach dem, welches Vorzeichnen man nimmt. Des weiteren können wir aber diese gleichzeitig behandeln. Weiter sieht man gleich, daß $S(z) \not\equiv 0$ ist, sonst wären $G(z)$ und $H(z)$ voneinander linear abhängig.

Jetzt unterscheiden wir die Unterfälle

**F. 5. 1.** $\qquad k_2 - k_1 k_5 = 0,$

**F. 5. 2.** $\qquad k_2 - k_1 k_5 \neq 0.$

---

[19]) Für dieses Gleichungssystem können wir den Hilfsatz 2 nicht anwenden.

**F. 5. 1.** Wenn $k_2 = k_1 k_5$ ist, ergibt sich aus (9. 23)

$$\begin{aligned}(9.26)\qquad & k_1[G(z_1 * z_2) + k_5 H(z_1 * z_2)] = \\ &= k_1^2(1+k_5^2)[G(z_1)+k_5 H(z_1)][G(z_2)+k_5 H(z_2)] + \\ &+ k_1[G(z_1)+k_5 H(z_1)] + k_1[G(z_2)+k_5 H(z_2)], \qquad (k_1 \neq 0)\end{aligned}$$

wobei wir noch die Fälle

**F. 5. 1. a.** $\qquad 1 + k_5^2 = 0,$

**F. 5. 1. b.** $\qquad 1 + k_5^2 \neq 0$

unterscheiden müssen.

**F. 5. 1. a.** Wenn $k_5 = \pm i$ ist, folgt aus (9. 26)

$$(9.27)\qquad G(z) \pm iH(z) = \varphi_1(z).$$

Auch (9. 27) enthält wegen der Vorzeichen $\pm$ zwei verschiedene Fälle, die wir aber gleichzeitig behandeln können. Mit (9. 27) geht die Gleichung (9. 22) in

$$\begin{aligned} H(z_1 * z_2) &= \pm ik_1[\varphi_1(z_1) \mp iH(z_1)][\varphi_1(z_2) \mp iH(z_2)] - \\ &- k_1[\varphi_1(z_1) \mp iH(z_1)]H(z_2) - k_1[\varphi_1(z_2) \mp iH(z_2)]H(z_1) \mp \\ &\mp ik_1 H(z_1)H(z_2) + H(z_1) + H(z_2) = \pm 6i\alpha\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2) + H(z_1) + H(z_2) \\ & (6\alpha = k_1 \neq 0)\end{aligned}$$

über, deren Lösung (vgl. **B. 2. 1**)

$$H(z) = \pm 3i\alpha\varphi_1(z)^2 + \varphi_2(z)$$

ist. Mit aus (9. 27) erhaltbarer Lösung

$$G(z) = 3\alpha\varphi_1(z)^2 \mp i\varphi_2(z) + \varphi_1(z)$$

haben wir statt (9. 1) die Gleichung

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= F(z_1) + F(z_2) + [\pm 3i\alpha\varphi_1(z_1)^2 + \varphi_2(z_1)][\pm 3i\alpha\varphi_1(z_2)^2 + \varphi_2(z_2)] + \\ &+ [3\alpha\varphi_1(z_1)^2 \mp i\varphi_2(z_1) + \varphi_1(z_1)][3\alpha\varphi_1(z_2)^2 \mp i\varphi_2(z_2) + \varphi_1(z_2)] = \\ &= F(z_1) + F(z_2) + 3\alpha[\varphi_1(z_1)^2\varphi_1(z_2) + \varphi_1(z_2)^2\varphi_1(z_1)] \mp \\ &\mp i[\varphi_2(z_1)\varphi_1(z_2) + \varphi_2(z_2)\varphi_1(z_1)] + \varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2),\end{aligned}$$

woraus sich die Lösung (vgl. auch **C. 1. 1. a**)

$$F(z) = \alpha\varphi_1(z)^3 + \tfrac{1}{2}\varphi_1(z)^2 \mp i\varphi_1(z)\varphi_2(z) + \varphi_3(z)$$

ergibt. Dieses Lösungssystem ist eben ($h_5$).

**F. 5. 1. b.** Es sei $1 + k_5^2 \neq 0$, dann ist die Lösung von (9. 26) (vgl. **B. 2. 2**)

$$(9.28)\qquad G(z) + \beta H(z) = \alpha[\psi(z) - 1],$$
$$\left(\alpha = \frac{1}{k_1(1+k_5^2)} \neq 0,\ \beta = k_5 \neq 0\right),$$

womit die Gleichung (9. 22) in

$$H(z_1 * z_2) = \frac{\beta}{\alpha(1+\beta^2)}[\alpha\psi(z_1)-\alpha-\beta H(z_1)][\alpha\psi(z_2)-\alpha-\beta H(z_2)]+$$

$$+\frac{\beta^2}{\alpha(1+\beta^2)}\{[\alpha\psi(z_1)-\alpha-\beta H(z_1)]H(z_2)+[\alpha\psi(z_2)-\alpha-\beta H(z_2)]H(z_1)\}+$$

$$+\frac{\beta^3}{\alpha(1+\beta^2)}H(z_1)H(z_2)+H(z_1)+H(z_2)=$$

$$= H(z_1)+H(z_2)+\frac{\alpha\beta}{1+\beta^2}[\psi(z_1)-1][\psi(z_2)-1]$$

übergeht. Die Lösung ist (vgl. **C. 5. 2**)

$$H(z) = \frac{\alpha\beta}{1+\beta^2}[\psi(z)-1]+\varphi_1(z),$$

d. h. aus (9. 28) folgt

$$G(z) = \frac{\alpha}{1+\beta^2}[\psi(z)-1]-\beta\varphi_1(z).$$

Mit diesen haben wir statt (9. 1) die Gleichung

$$F(z_1 * z_2) = F(z_1)+F(z_2)+$$

$$+\left\{\frac{\alpha}{1+\beta^2}[\psi(z_1)-1]-\beta\varphi_1(z_1)\right\}\left\{\frac{\alpha}{1+\beta^2}[\psi(z_2)-1]-\beta\varphi_1(z_2)\right\}+$$

$$+\left\{\frac{\alpha\beta}{1+\beta^2}[\psi(z_1)-1]+\varphi_1(z_1)\right\}\left\{\frac{\alpha\beta}{1+\beta^2}[\psi(z_2)-1]+\varphi_1(z_2)\right\}=$$

$$= F(z_1)+F(z_2)+\frac{\alpha^2}{1+\beta^2}[\psi(z_1)-1][\psi(z_2)-1]+(1+\beta^2)\varphi_1(z_1)\varphi_1(z_2).$$

Die Lösung ist (vgl. **C. 5. 1**)

$$F(z) = \frac{\alpha^2}{1+\beta^2}[\psi(z)-1]+\frac{1+\beta^2}{2}\varphi_1(z)^2+\varphi_2(z).$$

Diese Lösungen wurden in ($h_6$) mit der kürzeren Bezeichnung $\gamma=\alpha/(1+\beta^2)$ aufgezählt.

**F. 5. 2.** Wenn $k_2-k_1k_5\neq 0$ ist, erhalten wir aus (9. 24) und (9. 25)

(9. 29) $$G(z) = \gamma\varepsilon[C(z)-1]\mp i\gamma S(z),$$

(9. 30) $$H(z) = \pm i\delta S(z)-\gamma[C(z)-1],$$

wobei die Bezeichnungen

$$(9.31)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{k_1 k_5 - k_2} \neq 0, \quad \delta = \dfrac{k_1}{k_2(k_1 k_5 - k_2)} \neq 0, \quad \varepsilon = k_5 \neq 0, \\ k_1 = \dfrac{\delta}{\gamma(\delta\varepsilon - \gamma)} \neq 0, \quad k_2 = \dfrac{1}{\delta\varepsilon - \gamma} \neq 0, \qquad (\delta\varepsilon - \gamma \neq 0) \end{cases}$$

benützt wurden. Da $S(z) \not\equiv 0$ wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von $G(z)$ und $H(z)$ [vgl. (9. 25)] gilt, genügt es hier nur die Fälle

**F. 5. 2. a.** $\quad C(z) = k_0 S(z), \qquad (k_0 = konst.)$

**F. 5. 2. b.** $\quad \Delta[C(z_1), S(z_2)] \not\equiv 0$

zu untersuchen.

**F. 5. 2. a.** Wenn $C(z) = k_0 S(z)$ gilt, ist die Lösung der Gleichung (9. 23) (vgl. § **4. B**)

$$(9.32)\qquad S(z) = \frac{k_0}{k_0^2 - 1}\psi(z) \qquad [k_0\psi(z) \not\equiv 0].$$

Hier ist $k_5^2 \neq 1$, sonst folgt $S(z) \equiv 0$ aus (4. 1). Weiter sieht man gleich, daß auch $\psi(z) \not\equiv 1$ besteht, gegenfalls folgt die ausgeschlossene lineare Abhängigkeit von $G(z)$ und $H(z)$ aus (9. 29) und (9. 30). Um die Konstanten $k_0$, $\gamma$, $\delta$ und $\varepsilon$ zu spezialisieren, setzen wir (9. 29), (9. 30), (9. 31) und (9. 32) in (9. 21) ein, so erhalten wir mit leichter Berechnung die Formel

$$\frac{k_0}{(k_0^2-1)^2}[\gamma(k_0\varepsilon \mp i) - k_0(\delta \pm ik_0\gamma)]\psi(z_1 * z_2) - \frac{k_0\gamma}{k_0^2 - 1}(k_0\varepsilon \mp i)[\psi(z_1) + \psi(z_2)] = 0.$$

Wegen $k_0\gamma\psi(z) \not\equiv konst.$ folgen $k_0\varepsilon \mp i = 0$ und $\delta \pm ik_0\gamma = 0$, womit sich (9. 29) und (9. 30) auf $G(z) \equiv -\gamma\varepsilon$ und $H(z) \equiv \gamma$ vereinfachen. Das ist aber ein Widerspruch, weil $G(z)$ und $H(z)$ in diesem Falle voneinander linear abhängig wären, also ergibt sich keine neuere Lösung.

**F. 5. 2. b.** Es seien jetzt die Funktionen $C(z)$ und $S(z)$ voneinander linear *unabhängig*. Unter derselben Bedingung haben wir (vgl. § **4. C**) aus (4. 1) für $S(z_1 * z_2)$ die Gleichung (4. 13), d. h.

$$(9.33)\qquad S(z_1 * z_2) = \beta_1 S(z_1) S(z_2) + S(z_1) C(z_2) + S(z_2) C(z_1) \qquad (\beta_1 = konst.)$$

erhalten. Auch das in Betracht genommen, vereinfacht sich die Gleichung (9. 21) mit (9. 29) und (9. 30) auf

$$(\mp i\beta_1\gamma + \delta) S(z_1) S(z_2) = 0,$$

was wegen $S(z) \not\equiv 0$ die Konstanten spezialisiert:

$$(9.34)\qquad \delta = \pm i\beta_1\gamma.$$

Ähnlicherweise reduziert sich (9. 22) mit (9. 29), (9. 30) und (9. 33) auf

$$(\pm i\beta_1\gamma + \gamma\varepsilon - \delta) S(z_1) S(z_2),$$

d. h. wegen $S(z)\not\equiv 0$ ist

$$\delta = \pm i\beta_1\gamma - \gamma\varepsilon. \tag{9. 35}$$

Das ist aber ein Widerspruch, weil wir entgegen unserer Voraussetzung aus (9. 34), (9. 35) und (9. 31) die Formel

$$\gamma\varepsilon = \frac{k_5}{k_1k_5-k_2} = 0$$

bekommen. Hieraus haben wir also keine Lösung.

Damit ist der Fall **F. 5** erledigt.

**F. 6.** Schließlich untersuchen wir den Fall

$$k_1-k_3-k_5k_2 = k_2-k_4-k_5k_3 = 0, \quad k_2k_3k_5(k_1-k_3)(k_2-k_4) \neq 0.$$

Damit haben wir aus (9. 8) und (9. 10) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} G(z_1 * z_2) &= k_1G(z_1)G(z_2)+k_2[G(z_1)H(z_2)+G(z_2)H(z_1)]+\\ &\quad +(k_1-k_5k_2)H(z_1)H(z_2)+G(z_1)+G(z_2),\\ H(z_1 * z_2) &= k_2G(z_1)G(z_2)+(k_1-k_5k_2)[G(z_1)H(z_2)+G(z_2)H(z_1)]+\\ &\quad +(k_2-k_1k_5+k_2k_5^2)H(z_1)H(z_2)+H(z_1)+H(z_2), \end{aligned}$$

welches auf das aus (9. 21) und (9. 22) bestehende Gleichungssystem zurückgeführt werden kann. Wir führen nämlich neue Konstanten $c_1, c_2, c_5$ ein, und zwar seien

$$k_1=c_1, \quad k_2=c_2\neq 0, \quad k_1-k_5k_2 = c_5c_2,$$

und damit gilt auch

$$k_2-k_1k_5+k_2k_5^2 = c_2-c_1c_5+c_2c_5^2.$$

Dann erhalten wir die Gleichungen (9. 21) und (9. 22) (statt $c_\nu$ steht $k_\nu$; $\nu=1, 2, 5$). Da die Substitutionen für alle $k_1, k_2\neq 0, k_5$ durchführbar sind, stimmen die Fälle **F. 5** und **F. 6** tatsächlich überein.

Damit ist auch dieser Fall erledigt, womit auch der Beweis des Satzes 9 vollendet ist.

*(Eingegangen am 11. April 1963.)*