

Über eine gemeinsame Verallgemeinerung zweier Funktionalgleichungen von Jensen

Herrn A. Ostrowski bei Gelegenheit seines 70-sten Geburtstages
mit freundlicher Verehrung gewidmet

Von J. ACZÉL (Debrecen) und E. VINCZE (Miskolc)

§ 1.

1. 1. An der Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach im September 1962 hat Herr G. N. SAKOWITSCH einen Beweis vorgelegt, wonach die Funktionalgleichung

$$(1. 1) \quad f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2|y|g(x)$$

nur dann eine Lösung hat, wenn $g(x) \equiv 0$ ist. Herr A. OSTROWSKI hat den Beweis des Herrn Sakowitsch noch an derselben Tagung vereinfacht.

In der vorliegenden Note wollen wir einen ganz kurzen Beweis des obigen Satzes geben, mit einem Kunstgriff, der in gewissen Fällen auch auf die allgemeinere Funktionalgleichung

$$(1. 2) \quad f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2g(x)h(y)$$

angewandt werden kann. Nach Untersuchung der letzteren Frage lösen wir dann (1. 2) in voller Allgemeinheit auch dann, wenn die in (1. 2) auftretenden Funktionen auf einer beliebigen (additiv geschriebenen) Abelschen Gruppe definiert sind und komplexe Werte haben. Die Gleichung (1. 2) enthält zwei von J. L. W. V. JENSEN untersuchte Funktionalgleichungen. Die eine ist

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$$

(vgl. [1] Nr. 2. 1. 3, 2. 2. 7, 2. 2. 8), die mit $u = x+y$, $v = x-y$ in

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 0$$

übergeht, und die andere ist

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2f(y)$$

(vgl. [4], [6]). Beide Gleichungen spielen in der Lösung von (1. 2) eine wichtige Rolle.

Auf (1.1) und (1.2) führt die Theorie der verallgemeinerten quasiglatten Funktionen, die durch

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \leq 2|y|g(x)$$

oder allgemeiner durch

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \leq 2h(y)g(x)$$

definiert sind (vgl. [5]).

§ 1 ist die Arbeit des ersten, § 2 des zweiten Verf., wechselseitige Bemerkungen wurden aber weitgehend in Betracht genommen.

1.2. Setzen wir in

$$(1.1) \quad f(x+y)+f(x-y)-2f(x) = 2|y|g(x)$$

der Reihe nach $x-y$, $x+y$ für x bzw. $2y$ für y dann erhalten wir

$$(1.3) \quad f(x)+f(x-2y)-2f(x-y) = 2|y|g(x-y),$$

$$(1.4) \quad f(x+2y)+f(x)-2f(x+y) = 2|y|g(x+y),$$

bzw.

$$(1.5) \quad f(x+2y)+f(x-2y)-2f(x) = 4|y|g(x).$$

Wenn wir (1.5) von der Summe aus (1.4) und (1.3) und aus dem zweifachen von (1.1) subtrahieren, so bleibt nur

$$2|y|[g(x+y)+g(x-y)] = 0,$$

also

$$(1.6) \quad g(x-y) = -g(x+y) \text{ für alle } y \neq 0.$$

Wegen der Symmetrie der rechten Seite ist auch die linke symmetrisch:

$$g(x-y) = g(y-x) \quad (x \neq 0, y \neq 0),$$

also $g(t)$ gerade für alle t

$$g(-t) = g(t),$$

während ebenfalls (1.6) mit $x=0$, $y=t$

$$-g(t) = g(-t) = g(t) \quad (t \neq 0)$$

ergibt. Dies ist nur dann möglich, wenn

$$(1.7) \quad g(t) = 0$$

ist, was dann auch für $t=0$ gültig bleibt [z. B. aus (1.6) mit $y=x \neq 0$], d. h. aus (1.1) folgt notwendigerweise, daß $g(t)$ identisch verschwindet.

So geht (1.1) in

$$(1.8) \quad f(x+y)+f(x-y)-2f(x) = 0$$

über, was mit

$$(1.9) \quad x+y = u, \quad x-y = v$$

eben die Jensensche Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$$

ergibt (vgl. [1] Nr. 2. 1. 3). Diese kann auf die Cauchysche zurückgeführt werden, was aber auch direkt mit (1. 8) gemacht werden kann, wenn wir in (1. 8)

$$(1. 10) \quad \varphi(x) = f(x) - f(0)$$

schreiben:

$$(1. 11) \quad \varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x),$$

und hierin $x=0$ setzen:

$$\varphi(-y) = -\varphi(y)$$

[wegen (1. 10) ist $\varphi(0)=0$], d. h. φ ist ungerade und so erhalten wir durch Addition von (1. 11) und von der aus ihr durch Vertauschen von x und y gewonnenen Gleichung

$$\varphi(x+y) - \varphi(x-y) = 2\varphi(y)$$

schon das Bestehen von

$$(1. 12) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

und mit (1. 10) sehen wir, daß

$$(1. 13) \quad f(x) = \varphi(x) + \alpha$$

mit einer beliebigen Konstanten α und mit einer beliebigen Lösung $\varphi(x)$ der Cauchyschen Gleichung (1. 12) die allgemeinste Lösung von (1. 8) und damit auch von (1. 1) ist.

(1. 13) erfüllt auch (1. 8) immer falls (1. 12) erfüllt ist.

1. 3. Wir untersuchen jetzt, unter welchen Bedingungen der obige Lösungsprozess durchführbar ist. Dies ist immer der Fall, wenn der Definitionsbereich der Funktionen [und zugleich der Gültigkeitsbereich der Funktionalgleichung (1. 1)] eine beliebige Abelsche Gruppe \mathbf{Q}_0 ist (in der wir die Operation mit $+$, das neutrale Element mit 0 , die Inverse von t mit $-t$ bezeichnen), vorausgesetzt, daß wir in (1. 1) $|y|$ durch eine beliebige Funktion $h(y)$ ersetzen, die

$$(1. 14) \quad h(2y) = 2h(y) \neq 0 \text{ für } y \neq 0$$

erfüllt, was das einzige war, was wir in (1. 5) ausgenützt haben. [Für die Durchführung der Substitution (1. 9) hatten wir auch die Lösbarkeit von $2x=s (=u+v)$ (bzw. von $2y=t=u-v$) für alle s (bzw. t) nötig gehabt, davon haben wir aber keinen Gebrauch gemacht.] Die Werte von f, g und h mögen in einem beliebigen Körper \mathbf{K} mit von 2 verschiedener Charakteristik liegen. [(1. 12) bedeutet also, daß φ ein Homomorphismus von \mathbf{Q}_0 in die additive Gruppe von \mathbf{K} ist.] Wir haben so den

Satz 1. Die allgemeinste Lösung des Funktionalgleichungssystems

$$(1. 2) \quad f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2g(x)h(y),$$

$$(1. 14) \quad h(2y) = 2h(y) \neq 0 \quad (y \neq 0),$$

wo die Veränderlichen eine beliebige Abelsche Gruppe \mathbf{Q}_0 durchlaufen und die Funktionswerte in einem beliebigen Körper \mathbf{K} mit Charakteristik ungleich 2 liegen, sind

$$(1.15) \quad f(x) = \varphi(x) + \alpha, \quad g(x) = 0,$$

wo φ eine beliebige Lösung der Funktionalgleichung

$$(1.12) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist, während h mit der Einschränkung (1.14) beliebig ist.

Ist z. B. \mathbf{G} die Additionsgruppe der reellen Zahlen (vgl. [3]), so kann man alle Funktionen, die der Gleichung

$$(1.16) \quad h(2y) = 2h(y) \quad \text{für } y \neq 0$$

genügen, folgenderweise bestimmen: Wir setzen in (1.16) für positive y

$$y = 2^t$$

um

$$(1.17) \quad h(2^{t+1}) = 2h(2^t)$$

zu erhalten und wenn \mathbf{K} die positiven Zahlen (mit ihrer üblichen Multiplikation) enthält, so folgt aus (1.17) durch Division mit 2^{t+1}

$$\frac{h(2^{t+1})}{2^{t+1}} = \frac{h(2^t)}{2^t},$$

d. h. die Funktion

$$(1.18) \quad p_1(t) = h(2^t)/2^t$$

ist periodisch mit Periode 1. Aus (1.18) folgt mit $2^t = y$

$$(1.19) \quad h(y) = yp_1(\log_2 y) \quad (y > 0).$$

Für $y < 0$ folgt mit

$$y = -2^t \quad \text{und} \quad p_{-1}(t) = h(-2^t)/2^t$$

wieder

$$p_{-1}(t+1) = \frac{h(-2^{t+1})}{2^{t+1}} = \frac{2h(-2^t)}{2^{t+1}} = p_{-1}(t)$$

und

$$(1.20) \quad h(y) = |y|p_{-1}(\log_2 |y|) \quad (y < 0).$$

Als Zusammenfassung von (1.19) und (1.20) erhalten wir

$$h(y) = |y|p_{\text{sgn } y}(\log_2 |y|)$$

mit beliebigen periodischen $p_1(t) = p_1(t+1)$ und $p_{-1}(t) = p_{-1}(t+1)$ als allgemeinste reelle Lösung von (1.16) [die (1.16) — wie man leicht sieht — auch tatsächlich erfüllt]. Soll $h(y) = 0$ für $y \neq 0$ gelten, dann muß $p_1(t) = 0$, $p_{-1}(t) = 0$ für alle reelle t sein.

Im folgenden wollen wir (1.2) ohne die Einschränkung (1.14) in voller Allgemeinheit untersuchen.

§ 2.

2.1. Jetzt wollen wir also die Funktionalgleichung

$$(2.1) \quad f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2g(x)h(y) \\ [x, y, x+y, x-y \in \mathbf{Q}_0; f(x), g(x), h(x): \mathbf{Q}_0 \rightarrow \mathbf{Q}]$$

lösen, wobei \mathbf{Q}_0 eine beliebige (additiv geschriebene) Abelsche Gruppe und \mathbf{Q} den Körper der komplexen Zahlen bedeutet (die Ergebnisse sind auch in allgemeineren, z. B. quadratischen Körpern der Charakteristik 0 gültig).

Wir zeigen, daß die Funktionalgleichung (2.1) bzw. ihre Spezialfälle auf schon bekannte und grundlegende Funktionalgleichungen zurückgeführt werden können. Insbesondere brauchen wir die Cauchyschen Funktionalgleichungen

$$(2.2) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$(2.3) \quad \psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$$

$$[x, y, x+y \in \mathbf{Q}_0; \varphi, \psi: \mathbf{Q}_0 \rightarrow \mathbf{Q}].$$

Fast jede Lösung von (2.1) wird eine algebraische Kombination der den Gleichungen (2.2) und (2.3) genügenden Funktionen φ und ψ sein. Hier und auch im weiteren bedeuten $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ (auch mit Indizes) immer solche Funktionen, die den Gleichungen (2.2) bzw. (2.3) genügen.

Es sei hier noch bemerkt, daß die Funktionalgleichung (2.3) auch eine nicht-triviale gerade Lösung $\psi_0(x)$ besitzen kann. Z. B. sei \mathbf{Q}_0 die Menge der reellen ganzen Zahlen (die bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe bildet) und es sei

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \text{ gerade,} \\ -1 & \text{wenn } x \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Dann ist die Funktion $\psi_0(x)$ offenbar gerade und genügt auch der Gleichung (2.3). Auf Grund von (2.3) folgt weiter, wenn $\psi_0(x) \not\equiv 0$ gerade ist, daß auch $|\psi_0(x)| = 1$ notwendigerweise gilt, nämlich ist

$$1 = \psi_0(0) = \psi_0(x)\psi_0(-x) = \psi_0(x)^2.$$

Wenn \mathbf{Q}_0 mit jedem Element x auch $x/2$ enthält, dann ist $\psi_0(x) \equiv 1$ die einzige nichtverschwindende gerade Lösung von (2.3). Nämlich gilt

$$\psi_0(x) = \psi_0\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \psi_0\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1.$$

Demnach erhalten wir $\psi_0(x) \equiv 0$ oder $\psi_0(x) \equiv 1$.

Wie bekannt, ist jede Lösung $\psi(x)$ der auf einer Gruppe \mathbf{Q}_0 geltenden Funktionalgleichung (2.3) entweder überall oder nirgends 0 in \mathbf{Q}_0 :

$$\psi(x_0) = 0 \Rightarrow \psi(x) = \psi(x_0)\psi(x-x_0) \equiv 0.$$

2.2. Der Einfachigkeit halber schicken wir die Fälle voraus, wo

$$(2.4) \quad g(x)h(y) \equiv 0$$

ist. Dann folgt aus (2. 1)

$$(2. 5) \quad f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 0.$$

Wie wir in 1. 2 gesehen haben, ist die allgemeine Lösung von (2. 5)

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha, \quad \alpha = f(0) = \text{konst.}$$

Die Gleichung (2. 4) besteht aber nur dann, wenn entweder $g(x) \equiv 0$ und $h(x)$ beliebig oder $g(x)$ beliebig und $h(x) \equiv 0$ sind. Wir haben also schon zwei (spezielle) Lösungssysteme

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1) \quad & f(x) = \varphi(x) + \alpha, \\ & g(x) \equiv 0, \\ & h(x) \text{ eine beliebige komplexe Funktion;} \\ (\mathcal{L}_2) \quad & f(x) = \varphi(x) + \alpha, \\ & g(x) \text{ eine beliebige komplexe Funktion,} \\ & h(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Des weiteren können wir voraussetzen, daß $g(x)h(y) \neq 0$ ist.

2. 3. Setzen wir jetzt in (2. 1) $y=0$ ein, so ist $g(x)h(0)=0$, und da $g(x) \neq 0$ nach unserer Voraussetzung gilt, ergibt sich

$$(2. 6) \quad h(0) = 0.$$

Weiter folgt aus (2. 1)

$$\begin{aligned} 2g(x)h(y) &= f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = \\ &= f[x - (-y)] + f[x + (-y)] - 2f(x) = 2g(x)h(-y), \end{aligned}$$

d. h. wegen $g(x) \neq 0$ ist $h(y)$ notwendigerweise eine gerade Funktion:

$$(2. 7) \quad h(y) = h(-y).$$

Es sei jetzt in (2. 1) $x=0$ dann folgt

$$(2. 8) \quad f(y) + f(-y) - 2f(0) = 2g(0)h(y),$$

wobei wir zwei Möglichkeiten unterscheiden, und zwar

$$(2. A) \quad g(0) = 0,$$

$$(2. B) \quad g(0) \neq 0.$$

A. Führen wir die Bezeichnung

$$(2. 9) \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(0)$$

ein, dann erhalten wir auf Grund von (2. 8) und (2. A) die Gleichung

$$(2. 10) \quad F(y) + F(-y) = 0,$$

d. h. $F(y)$ ist ungerade. Mit der Bezeichnung (2. 9) ergibt sich aus (2. 1)

$$(2. 11) \quad F(x+y) + F(x-y) - 2F(x) = 2g(x)h(y).$$

Vertauschen wir hier die Veränderlichen x und y , so ist

$$(2.12) \quad F(x+y) + F(y-x) - 2F(y) = 2g(y)h(x).$$

Wegen $F(x-y) + F(y-x) = 0$ erhalten wir aus (2.11) und (2.12) die Funktionalgleichung

$$(2.13) \quad F(x+y) = F(x) + F(y) + g(x)h(y) + g(y)h(x).$$

Aus (2.11) und (2.10) folgt weiter

$$\begin{aligned} -2g(x)h(y) &= -[F(x+y) + F(x-y) - 2F(x)] = \\ &= F(-x+y) + F(-x-y) - 2F(-x) = 2g(-x)h(y), \end{aligned}$$

und da $h(y) \neq 0$ nach unserer Voraussetzung gilt, ist $g(x)$ eine ungerade Funktion:

$$(2.14) \quad g(x) = -g(-x).$$

Wir suchen also nur solche Lösungen der Funktionalgleichung (2.13), bei denen auch (2.6), (2.7), (2.10), und (2.14) gleichzeitig erfüllt sind. Dies vereinfacht den Lösungsgang wesentlich. Darauf werden wir später noch zurückkehren.

B. Auch im Falle $g(0) \neq 0$ verwenden wir die Bezeichnung (2.9), weiter sei

$$(2.15) \quad G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(x)}{g(0)}.$$

Wir erhalten auf Grund von (2.8) die Gleichung

$$(2.16) \quad h(y) = \frac{1}{2g(0)} [F(y) + F(-y)],$$

d. h. aus (2.1) und (2.15) folgt

$$(2.17) \quad F(x+y) + F(x-y) - 2F(x) = G(x)[F(y) + F(-y)].$$

Vertauschen wir in (2.17) die Veränderlichen x und y dann wird

$$\begin{aligned} F(x+y) &= -F(x-y) + 2F(x) + G(x)[F(y) + F(-y)] = \\ &= -F(y-x) + 2F(y) + G(y)[F(x) + F(-x)], \end{aligned}$$

woraus sich

$$(2.18) \quad \begin{aligned} F(x-y) - F(y-x) &= 2F(x) - 2F(y) + \\ &+ G(x)[F(y) + F(-y)] - G(y)[F(x) + F(-x)] \end{aligned}$$

ergibt. Schreiben wir hier $-y$ statt y und beachten wir, daß die linke Seite von (2.18) dadurch in x und y symmetrisch wird, so erhalten wir

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{aligned} &F(x+y) - F(-x-y) = \\ &= 2F(x) - 2F(-y) + G(x)[F(y) + F(-y)] - G(-y)[F(x) + F(-x)] = \\ &= 2F(y) - 2F(-x) + G(y)[F(x) + F(-x)] - G(-x)[F(y) + F(-y)]. \end{aligned} \right.$$

Daraus folgt

$$(2.20) \quad [F(x) + F(-x)][G(y) + G(-y) - 2] = [F(y) + F(-y)][G(x) + G(-x) - 2].$$

Hier müssen wir wieder eine Fallunterscheidung treffen:

$$(2. B. 1) \quad F(x) + F(-x) \equiv 0 \quad [F(0) = 0],$$

$$(2. B. 2) \quad F(x) + F(-x) \not\equiv 0.$$

B. 1. Falls (2. B. 1) erfüllt ist, ergibt sich aus (2. 17)

$$F(x+y) + F(x-y) = 2F(x),$$

was mit (1. 11) äquivalent ist, d. h. die Lösung ist $F(x) = \varphi(x)$ und folglich $f(x) = \varphi(x) + f(0)$. Damit geht die Gleichung (2. 1) in

$$2g(x)h(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x) \equiv 0$$

über. Dieser Fall ist aber schon erledigt.

B. 2. Wir können also das Bestehen von (2. B. 2) voraussetzen. Aus (2. B. 2) und (2. 20) ergibt sich

$$(2. 21) \quad G(x) + G(-x) - 2 = 2a[F(x) + F(-x)]$$

$$\left[2a = \frac{G(y_0) + G(-y_0) - 2}{F(y_0) + F(-y_0)} = \text{konst.}, F(y_0) + F(-y_0) \neq 0 \right].$$

Wegen (2. 19) folgt weiter durch Mittelbildung

$$F(x+y) - F(-x-y) = F(x) - F(-x) + F(y) - F(-y) + \\ + \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)][G(y) - G(-y)] + \frac{1}{2}[F(y) + F(-y)][G(x) - G(-x)].$$

Führen wir hier die Bezeichnungen

$$(2. 22) \quad \begin{cases} L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)], \\ K(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)] \neq 0, \\ M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[G(x) - G(-x)] \end{cases}$$

ein, dann geht die vorige Funktionalgleichung in

$$(2. 23) \quad L(x+y) = L(x) + L(y) + K(x)M(y) + K(y)M(x)$$

über, was wieder die Form (2. 13) hat. Aus (2. 22) ist offenbar, daß $L(x)$ und $M(x)$ ungerade Funktionen sind, $K(x)$ dagegen eine gerade Funktion ist:

$$(2. 24) \quad L(-x) = -L(x), \quad M(-x) = -M(x), \quad K(-x) = K(x),$$

weiter daß auch

$$(2. 25) \quad K(0) = 0$$

wegen $F(0) = 0$ gilt. Außerdem müssen die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ auch der Gleichung (2. 21) genügen, d. h.

$$(2. 26) \quad \frac{1}{2}[G(x) + G(-x)] = 2aK(x) + 1.$$

Die gesuchten Lösungen der Funktionalgleichung (2. 1) sind nach (2. 22), (2. 9), (2. 15), (2. 26) und (2. 16)

$$(2. 27) \quad f(x) = F(x) + f(0) = K(x) + L(x) + f(0),$$

$$(2. 28) \quad g(x) = g(0)G(x) = g(0)[M(x) + 2aK(x) + 1],$$

$$(2. 29) \quad h(x) = \frac{1}{2g(0)} [F(x) + F(-x)] = \frac{1}{g(0)} K(x).$$

Es ist interessant, daß beide Grundfälle (2. A) und (2. B) durch dieselben Funktionalgleichungen (2. 13) bzw. (2. 23) auflösbar sind, und daß in diesen beiden Fällen auch F und L sowie g und M gleichzeitig ungerade, h und K dagegen gleichzeitig gerade sind. Tatsächlich entsprechen laut (2. 7), (2. 10), (2. 14) den Relationen (2. 24) die Beziehungen

$$(2. 30) \quad h(-x) = h(x), \quad F(-x) = -F(x), \quad g(-x) = -g(x) \quad \text{falls } g(0) = 0$$

ist.

2. 4. Aus dem vorigen ist es klar, daß wir die Lösungen von

$$(2. 31) \quad p(x+y) = p(x) + p(y) + q(x)r(y) + q(y)r(x)$$

[vgl. (2. 13) und (2. 23)] unter den Nebenbedingungen

$$(2. 32) \quad p(-x) = -p(x),$$

$$(2. 33) \quad q(-x) = -q(x),$$

$$(2. 34) \quad r(-x) = r(x),$$

$$(2. 35) \quad r(x) \neq 0,$$

$$(2. 36) \quad r(0) = 0$$

[vgl. (2. 30), (2. 24), (2. 25)] nötig haben. Aus diesen können dann die Lösungen von

$$(2. 1) \quad f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = 2g(x)h(y)$$

mit den Formeln

$$(2. 37) \quad \begin{cases} f(x) = p(x) + \delta, \\ g(x) = q(x) \neq 0, \\ h(x) = r(x) \neq 0, \end{cases}$$

bzw.

$$(2. 38) \quad \begin{cases} f(x) = p(x) + r(x) + \delta, \\ g(x) = \gamma[q(x) + 2ar(x) + 1] \quad (\gamma \neq 0), \\ h(x) = \frac{1}{\gamma} r(x) \neq 0 \end{cases}$$

[vgl. (2. 9), (2. 27), (2. 28), (2. 29)] erhalten werden. Die Gleichung (2. 31) wurde in [7] gelöst, unsere Aufgabe reduziert sich auf die Spezialisierung dieser Lösungen, so daß (2. 32)–(2. 36) erfüllt seien und die durch (2. 37) und (2. 38) erhältlichen Funktionen auch der ursprünglichen Gleichung (2. 1) genügen (was, wie wir sehen werden, keine triviale Sache ist).

Zuerst wollen wir aber die Symmetrie der Anwendungen (2. 37) und (2. 38) der Lösungen von (2. 31) in dem Sinne vollständiger machen, daß wir nicht nur im Falle (2. 37) sondern auch bei (2. 38) $q(x) \neq 0$ als Gegenstück zu (2. 35) voraussetzen wollen. Deshalb erledigen wir zuerst den Fall $q(x) \equiv 0$ in (2. 38), (2. 31), (2. 1). Ist

$$(2. 39) \quad q(x) \equiv 0,$$

dann folgt aus (2. 31)

$$p(x+y) = p(x) + p(y),$$

also [vgl. (2. 2)]

$$(2. 40) \quad p(x) = \varphi(x)$$

und wenn wir (2. 38) in (2. 1) mit diesen $p(x)$ und $q(x)$ einsetzen, dann ist

$$(2. 41) \quad r(x+y) + r(x-y) - 2r(x) = 2[2ar(x) + 1]r(y).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist $a=0$, dann geht (2. 41) in

$$(2. 42) \quad r(x+y) + r(x-y) = 2r(x) + 2r(y)$$

über. Wir wollen die Lösungen dieser, u. a. von J. L. W. V. JENSEN [4] (vgl. [6] und [1] Nr. 2. 2. 8) untersuchten Funktionalgleichung mit $\lambda(x)$ bezeichnen:

$$(2. 43) \quad \lambda(x+y) + \lambda(x-y) = 2\lambda(x) + 2\lambda(y),$$

also ist

$$(2. 44) \quad r(x) = \lambda(x)$$

und aus (2. 38), (2. 39), (2. 40) und (2. 44) erhalten wir das Lösungssystem

$$(E_3) \quad \begin{aligned} f(x) &= \varphi(x) + \lambda(x) + \delta, \\ g(x) &= \gamma \neq 0, \\ h(x) &= \frac{1}{\gamma} \lambda(x) \end{aligned}$$

von (2. 1). Dieses erfüllt (2. 1) immer, wenn (2. 2) und (2. 43) erfüllt sind.

Ist dagegen $a \neq 0$, so schreiben wir in (2. 41)

$$(2. 45) \quad \varkappa(x) = 2ar(x) + 1$$

und erhalten für \varkappa die d'Alembertsche Funktionalgleichung

$$(2. 46) \quad \varkappa(x+y) + \varkappa(x-y) = 2\varkappa(x)\varkappa(y),$$

(vgl. etwa [2], [8] und [1] Nr. 2. 4. 1). Aus (2. 38), (2. 39), (2. 40) und (2. 45) ent-

springt mit $\beta = \frac{1}{2a}$ das Lösungssystem

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_4) \quad & f(x) = q(x) + \beta[\varkappa(x) - 1] + \delta, \\
 & g(x) = \gamma\varkappa(x), \\
 & h(x) = \frac{\beta}{\gamma}[\varkappa(x) - 1] \quad (\gamma \neq 0)
 \end{aligned}$$

von (2. 1). Dieses erfüllt (2. 1) immer, wenn (2. 2) und (2. 46) erfüllt sind. — Damit ist der Fall (2. 39) vollständig erledigt und wir können im folgenden neben (2. 32)–(2. 36) auch

$$(2. 47) \quad q(x) \neq 0$$

voraussetzen.

Wir untersuchen jetzt einzeln die Lösungen von (2. 31), wie sie in [7] unter (g_1) – (g_5) aufgezählt wurden [bzw. doppelt, da — wie auch in [7] betont wurde — durch Vertauschen von $q(x)$ und $r(x)$ (g_i) in zwei Lösungen $(g_i, 1)$ und $(g_i, 2)$ ($i=1, 2, \dots, 5$) zerfällt], bezüglich ihrer Anwendung auf (2. 1) durch (2. 31)–(2. 38) und (2. 47).

2. 5. Die Lösungen

$$(g_1, 1) \quad p(x) = q(x), \quad q(x) \text{ beliebig}, \quad r(x) \equiv 0,$$

und

$$(g_1, 2) \quad p(x) = q(x), \quad q(x) \equiv 0, \quad r(x) \text{ beliebig}$$

fallen wegen (2. 35) und (2. 47) weg.

Die Lösung

$$(g_2, 1) \quad \begin{cases} p(x) = \alpha\varphi_1(x)^3 + \varphi_1(x)\varphi_3(x) + \varphi_2(x), \\ q(x) = \varphi_1(x), \\ r(x) = 3\alpha\varphi_1(x)^2 + \varphi_3(x) \end{cases}$$

erfüllt (2. 34) wegen $\varphi_j(-x) = -\varphi_j(x)$, $j=1, 2, 3$ [eine einleuchtende Eigenschaft der Lösungen von (2. 2)] nur dann, wenn $\varphi_3(x) \equiv 0$ ist. Die so erhaltene Lösung

$$(2. 48) \quad \begin{cases} p(x) = \alpha\varphi_1(x)^3 + \varphi_2(x), \\ q(x) = \varphi_1(x), \\ r(x) = 3\alpha\varphi_1(x)^2 \end{cases}$$

ergibt mittels (2. 37) das Lösungssystem

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_5) \quad & f(x) = \alpha\varphi_1(x)^3 + \varphi_2(x) + \delta, \\
 & g(x) = \varphi_1(x), \\
 & h(x) = 3\alpha\varphi_1(x)^2
 \end{aligned}$$

von (2. 1). Es erfüllt (2. 1) immer, wenn $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die Cauchysche Gleichung (2. 2) erfüllen.

Das aus (2. 48) mittels (2. 38) erhältliche Lösungssystem

$$(2. 49) \quad \begin{cases} f(x) = \alpha\varphi_1(x)^3 + 3\alpha\varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x) + \delta, \\ g(x) = \gamma[6\alpha\varphi_1(x)^2 + \varphi_1(x) + 1], \\ h(x) = \frac{3\alpha}{\gamma}\varphi_1(x)^2 \quad (\gamma \neq 0) \end{cases}$$

— in welchem wegen $h(x) \neq 0$ notwendigerweise $\alpha \neq 0$ und $\varphi_1(x) \neq 0$ sein muss — erfüllt (2. 1) nur falls

$$\begin{aligned} & \alpha[\varphi_1(x) + \varphi_1(y)]^3 + 3\alpha[\varphi_1(x) + \varphi_1(y)]^2 + \varphi_2(x) + \varphi_2(y) + \delta + \\ & + \alpha[\varphi_1(x) - \varphi_1(y)]^3 + 3\alpha[\varphi_1(x) - \varphi_1(y)]^2 + \varphi_2(x) - \varphi_2(y) + \delta - \\ & - 2\alpha\varphi_1(x)^3 - 6\alpha\varphi_1(x)^2 - 2\varphi_2(x) - 2\delta = 6\alpha\varphi_1(y)^2[6\alpha\varphi_1(x)^2 + \varphi_1(x) + 1], \end{aligned}$$

d. h.

$$36\alpha x^2 \varphi_1(x)^2 \varphi_1(y)^2 = 0$$

ist, also muß wegen $\alpha \neq 0$, $\varphi_1(x) \neq 0$ $a = 0$ bestehen und aus (2. 49) wird das Lösungssystem

$$(S_6) \quad \begin{cases} f(x) = \alpha\varphi_1(x)^3 + 3\alpha\varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x) + \delta, \\ g(x) = \gamma[\varphi_1(x) + 1], \\ h(x) = \frac{3\alpha}{\gamma}\varphi_1(x)^2, \quad (\gamma \neq 0), \end{cases}$$

was (2. 1) immer erfüllt, wenn $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ (2. 2) erfüllen.

Dagegen ergibt

$$(g_2, 2) \quad \begin{cases} p(x) = \alpha\varphi_1(x)^3 + \varphi_1(x)\varphi_3(x) + \varphi_2(x), \\ q(x) = 3\alpha\varphi_1(x)^2 + \varphi_3(x), \\ r(x) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

nichts neues, da $r(x)$ wegen (2. 34) gerade, wegen $\varphi_1(-x) = -\varphi_1(x)$ dagegen ungerade sein sollte, also $r(x) \equiv 0$ in Gegensatz zu (2. 35).

2. 6. Wir gehen zu den Lösungen (g_3) über:

$$(g_3, 1) \quad \begin{cases} p(x) = 2\alpha\beta[\psi(x) - 1] + \alpha\psi(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x), \\ q(x) = \beta[\psi(x) - 1] + \psi(x)\varphi_1(x), \\ r(x) = \alpha[\psi(x) - 1]. \end{cases}$$

Wegen (2. 35) ist

$$(2. 50) \quad \alpha[\psi(x) - 1] \neq 0$$

und wegen (2. 36)

$$(2. 51) \quad \psi(x) \neq 0.$$

Nun ist aber laut (2. 34) $r(x)$ gerade, also auch $\psi(x)$ gerade und nichtkonstant wegen (2. 50) und (2. 51), d. h. (vgl. 2. 1)

$$(2. 52) \quad \psi(x) = \psi_0(x) = \psi_0(-x).$$

Andererseits ist laut (2. 33) $q(x)$ ungerade, so daß (2. 52)

$$\beta[\psi(x) - 1] = 0,$$

d. h. wegen (2. 50)

$$\beta = 0$$

mit sich bringt. Die so erhaltene Lösung

$$(2. 53) \quad \begin{cases} p(x) = \alpha\psi_0(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x), \\ q(x) = \psi_0(x)\varphi_1(x), \\ r(x) = \alpha[\psi_0(x) - 1] \quad (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

ergibt mittels (2. 37) das Lösungssystem

$$(\mathcal{L}_7) \quad \begin{aligned} f(x) &= \alpha\psi_0(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \delta, \\ g(x) &= \psi_0(x)\varphi_1(x), \\ h(x) &= \alpha[\psi_0(x) - 1] \end{aligned}$$

von (2. 1). Dieses erfüllt (2. 1) immer, wenn $\psi_0(x)$ (2. 3) und (2. 52) erfüllt, während $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die Gleichung (2. 2) erfüllen.

Das aus (2. 53) mittels (2. 38) erhältliche Lösungssystem

$$(2. 54) \quad \begin{cases} f(x) = \alpha\psi_0(x)\varphi_1(x) + \alpha[\psi_0(x) - 1] + \varphi_2(x) + \delta, \\ g(x) = \gamma[\varphi_1(x)\psi_0(x) + 2\alpha\psi_0(x) - 2\alpha + 1], \\ h(x) = \frac{\alpha}{\gamma}[\psi_0(x) - 1] \quad (\alpha\gamma \neq 0) \end{cases}$$

erfüllt (2. 1) nur falls

$$\begin{aligned} & \alpha[\varphi_1(x) + \varphi_1(y)]\psi_0(x)\psi_0(y) + \alpha\psi_0(x)\psi_0(y) + \varphi_2(x) + \varphi_2(y) - \alpha + \delta + \\ & + \alpha[\varphi_1(x) - \varphi_1(y)]\psi_0(x)\psi_0(y) + \alpha\psi_0(x)\psi_0(y) + \varphi_2(x) - \varphi_2(y) - \alpha + \delta - \\ & - 2\alpha\varphi_1(x)\psi_0(x) - 2\alpha\psi_0(x) - 2\varphi_2(x) + 2\alpha - 2\delta = \\ & = 2\alpha\varphi_1(x)\psi_0(x)\psi_0(y) + 4\alpha x^2\psi_0(x)\psi_0(y) - 2\alpha(2\alpha - 1)\psi_0(y) - \\ & - 2\alpha\varphi_1(x)\psi_0(x) - 4\alpha x^2\psi_0(x) + 2\alpha(2\alpha - 1) \end{aligned}$$

[vgl. (2. 52)], d. h.

$$2\alpha(2\alpha - 1)[\psi_0(x) - 1][\psi_0(y) - 1] = 0$$

und wegen (2. 50)

$$2\alpha\alpha = 1$$

ist, so daß (2. 54) in das Lösungssystem

$$(\mathcal{L}_8) \quad \begin{aligned} f(x) &= \alpha\varphi_1(x)\psi_0(x) + \alpha[\psi_0(x) - 1] + \varphi_2(x) + \delta, \\ g(x) &= \gamma[\varphi_1(x) + 1]\psi_0(x), \\ h(x) &= \frac{\alpha}{\gamma}[\psi_0(x) - 1] \quad (\gamma \neq 0) \end{aligned}$$

von (2. 1) übergeht. Dieses erfüllt (2. 1) immer, wenn $\psi_0(x)$ die Gleichungen (2. 3) und (2. 52) erfüllt, während $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ (2. 2) erfüllen.

Dagegen ergibt

$$(g_3, 2) \quad \begin{cases} p(x) = 2\alpha\beta[\psi(x) - 1] + \alpha\psi(x)\varphi_1(x) + \varphi_2(x), \\ q(x) = \alpha[\psi(x) - 1], \\ r(x) = \beta[\psi(x) - 1] + \psi(x)\varphi_1(x) \end{cases}$$

keine neue Lösungen, da wegen (2. 47) wieder

$$(2. 55) \quad \alpha[\psi(x) - 1] \neq 0,$$

andererseits aber wegen (2. 33) $q(x)$ ungerade ist, d. h. $\psi(x) \neq 0$ und [vgl. (2. 3)]

$$-\alpha[\psi(x) - 1] = \alpha \left[\frac{1}{\psi(x)} - 1 \right], \quad \text{d. h.} \quad \alpha[\psi(x) - 1]^2 = 0$$

ist, im Gegensatz zu (2. 55).

Die Lösung

$$(g_4, 1) \quad \begin{cases} p(x) = 2\alpha^3\beta[\psi(x) - 1] - \alpha\beta\varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x), \\ q(x) = \alpha^2[\psi(x) - 1] - \alpha\varphi_1(x), \\ r(x) = \alpha\beta[\psi(x) - 1] + \beta\varphi_1(x) \end{cases}$$

gibt nichts neues. Wäre nämlich $\psi(x) \equiv 0$, so würde wegen (2. 33) $q(x)$ ungerade, d. h. $\alpha^2 = 0$ also $q(x) \equiv 0$ sein, im Gegensatz zu (2. 47). Für $\psi(x) \neq 0$ folgt ebenfalls aus (2. 33) und aus (2. 3)

$$-\alpha^2[\psi(x) - 1] = \alpha^2 \left[\frac{1}{\psi(x)} - 1 \right],$$

d. h.

$$\alpha^2[\psi(x) - 1]^2 = 0,$$

also

$$r(x) = \beta\varphi_1(x)$$

ungerade und zugleich laut (2. 34) gerade, somit $r(x) \equiv 0$ im Gegensatz zu (2. 35).

Ganz ähnlich führt auch $(g_4, 2)$ zu keiner neuen Lösung [da $q(x)$ und $r(x)$ in $(g_4, 1)$ und $(g_4, 2)$ ähnliche Gestalt haben]. Da nämlich $\psi(x) \equiv 0$ die Beziehung

$$r(x) = \alpha^2[\psi(x) - 1] - \alpha\varphi_1(x) = -\alpha^2 - \alpha\varphi_1(x)$$

also wegen (2. 36) $\alpha = 0$ und somit $r(x) \equiv 0$ zu Folge hätte [im Gegensatz zu (2. 35)], folgt aus (2. 33) wieder

$$-\alpha\beta[\psi(x) - 1] = \alpha\beta \left[\frac{1}{\psi(x)} - 1 \right]$$

d. h.

$$\alpha\beta[\psi(x) - 1]^2 \equiv 0,$$

also entweder $\beta = 0$, $q(x) \equiv 0$ [im Gegensatz zu (2. 47)] oder $r(x) = -\alpha\varphi_1(x)$ [im Gegensatz zu (2. 34) bzw. (2. 35)].

2. 7. Endlich betrachten wir

$$(g_5, 1) \quad \begin{cases} p(x) = 2\alpha^2 \beta [\psi_1(x) - 1] - 2\varepsilon^2 \beta [\psi_2(x) - 1] + q(x), \\ q(x) = \alpha \beta [\psi_1(x) - 1] + \beta \varepsilon [\psi_2(x) - 1], \\ r(x) = \alpha [\psi_1(x) - 1] - \varepsilon [\psi_2(x) - 1]. \end{cases}$$

Würde $\psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 0$ sein, so wäre $r(x) = \varepsilon - \alpha$ laut (2. 36) gleich Null im Gegensatz zu (2. 35). Wäre dagegen z. B. $\psi_1(x) \equiv 0, \psi_2(x) \neq 0$, so würde wegen (2. 36) $\alpha = 0$ [da $\psi_2(0) = 1$] und wegen (2. 47) $\beta \varepsilon \neq 0, \psi_2(x) \neq 1$, wegen (2. 34) und (2. 33) dagegen

$$\psi_2(-x) = \psi_2(x), \quad \psi_2(-x) - 1 = 1 - \psi_2(x)$$

also doch $\psi_2(x) \equiv 1$ folgen. Ebenso ist $\psi_2(x) \equiv 0, \psi_1(x) \neq 0$ unmöglich, so daß

$$(2. 56) \quad \psi_1(x) \neq 0, \quad \psi_2(x) \neq 0,$$

d. h. $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ nirgends gleich 0 vorausgesetzt werden darf (vgl. 2. 1).

Wegen (2. 47) ist $\beta \neq 0$ und da laut (2. 33) bzw. (2. 34) $q(x)$ ungerade und $r(x)$ gerade ist, gelten die Beziehungen

$$(2. 57) \quad -\alpha [\psi_1(x) - 1] - \varepsilon [\psi_2(x) - 1] = \alpha [\psi_1(-x) - 1] + \varepsilon [\psi_2(-x) - 1],$$

$$(2. 58) \quad \alpha [\psi_1(x) - 1] - \varepsilon [\psi_2(x) - 1] = \alpha [\psi_1(-x) - 1] - \varepsilon [\psi_2(-x) - 1].$$

Wäre

$$\alpha [\psi_1(x) - 1] \equiv 0,$$

so würde aus (2. 57) und (2. 58)

$$\varepsilon [\psi_2(x) - 1] \equiv 0$$

folgen und umgekehrt, so daß $q(x) \equiv r(x) \equiv 0$ wäre, im Gegensatz zu (2. 35) und (2. 47). Wir können also

$$(2. 59) \quad \alpha \varepsilon [\psi_1(x) - 1] [\psi_2(x) - 1] \neq 0$$

voraussetzen. Aus (2. 57) und (2. 58) folgen wegen (2. 56)

$$(2. 60) \quad \alpha [\psi_1(x) - 1] = \frac{\varepsilon}{\psi_2(x)} [\psi_2(x) - 1]$$

und

$$\varepsilon [\psi_2(x) - 1] = \frac{\alpha}{\psi_1(x)} [\psi_1(x) - 1],$$

also

$$\alpha \varepsilon [\psi_1(x) - 1] [\psi_2(x) - 1] \left[1 - \frac{1}{\psi_1(x) \psi_2(x)} \right] = 0$$

und wegen (2. 59) bzw. wegen der Tatsache, daß auch für die Werte x_0 , bei denen $\psi_1(x_0) = 1$ besteht, laut (2. 60) auch $\psi_2(x_0) = 1$ ist — und umgekehrt, gilt immer auch

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\psi_1(x)}.$$

(2. 60) bringt dann

$$\varepsilon = -\alpha$$

mit sich. Die so erhaltene Lösung

$$(2. 61) \quad \begin{cases} p(x) = 2\alpha^2\beta \left[\psi(x) - \frac{1}{\psi(x)} \right] + \varphi(x), \\ q(x) = \alpha\beta \left[\psi(x) - \frac{1}{\psi(x)} \right], \\ r(x) = \alpha \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right] \end{cases}$$

ergibt mittels (2. 37) das Lösungssystem

$$(2. 62) \quad \begin{aligned} f(x) &= 2\alpha^2\beta \left[\psi(x) - \frac{1}{\psi(x)} \right] + \varphi(x) + \delta, \\ g(x) &= \alpha\beta \left[\psi(x) - \frac{1}{\psi(x)} \right], \\ h(x) &= \alpha \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right] \end{aligned}$$

von (2. 1). — Es erfüllt (2. 1) immer wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Gleichungen (2. 2) bzw. (2. 3) erfüllen.

Das aus (2. 61) mittels (2. 38) erhältliche Lösungssystem

$$(2. 62) \quad \begin{cases} f(x) = (\alpha + 2\alpha^2\beta)\psi(x) + (\alpha - 2\alpha^2\beta)\frac{1}{\psi(x)} + \varphi(x) + \delta - 2\alpha, \\ g(x) = \gamma(2\alpha\beta)\psi(x) + \gamma(2\alpha\beta)\frac{1}{\psi(x)} + \gamma(1 - 4\alpha\beta), \\ h(x) = \frac{\alpha}{\gamma} \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} + 2 \right] \end{cases}$$

erfüllt (2. 1) nur dann wenn

$$\begin{aligned} &(\alpha + 2\alpha^2\beta)\psi(x)\psi(y) + (\alpha - 2\alpha^2\beta)\frac{1}{\psi(x)\psi(y)} + \varphi(x) + \varphi(y) + \delta - 2\alpha + \\ &+ (\alpha + 2\alpha^2\beta)\frac{\psi(x)}{\psi(y)} + (\alpha - 2\alpha^2\beta)\frac{\psi(y)}{\psi(x)} + \varphi(x) - \varphi(y) + \delta - 2\alpha - \\ &- 2(\alpha + 2\alpha^2\beta)\psi(x) - 2(\alpha - 2\alpha^2\beta)\frac{1}{\psi(x)} - 2\varphi(x) - 2\delta + 4\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\alpha(2\alpha\alpha + \alpha\beta)\psi(x)\psi(y) + 2\alpha(2\alpha\alpha - \alpha\beta)\frac{\psi(y)}{\psi(x)} + 2\alpha(1 - 4\alpha\alpha)\psi(y) + \\
&\quad + 2\alpha(2\alpha\alpha + \alpha\beta)\frac{\psi(x)}{\psi(y)} + 2\alpha(2\alpha\alpha - \alpha\beta)\frac{1}{\psi(x)\psi(y)} + 2\alpha\frac{1 - 4\alpha\alpha}{\psi(y)} - \\
&\quad - 4\alpha(2\alpha\alpha + \alpha\beta)\psi(x) - 4\alpha(2\alpha\alpha - \alpha\beta)\frac{1}{\psi(x)} - 4\alpha(1 - 4\alpha\alpha)
\end{aligned}$$

ist. Daraus ergibt sich

$$\alpha(1 - 4\alpha\alpha) \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right] \left[\psi(y) + \frac{1}{\psi(y)} - 2 \right] \equiv 0$$

und da wegen $r(x) \neq 0$

$$\alpha \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right] \neq 0$$

ist, muß $1 - 4\alpha\alpha = 0$ gelten, so daß (2. 62) in das Lösungssystem

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{10}) \quad f(x) &= \alpha(1 + 2\alpha\beta)\psi(x) + \alpha(1 - 2\alpha\beta)\frac{1}{\psi(x)} + \varphi(x) + \delta - 2\alpha, \\
g(x) &= \gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\beta\right)\psi(x) + \gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\beta\right)\frac{1}{\psi(x)}, \\
h(x) &= \frac{\alpha}{\gamma} \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right]
\end{aligned}$$

von (2. 1) übergeht. Dieses erfüllt (2. 1) immer, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Gleichungen (2. 2) und (2. 3) erfüllen.

($g_5, 2$) führt auf dieselben Lösungssysteme (\mathcal{L}_9) und (\mathcal{L}_{10}), da ($g_5, 1$) mit

$$\alpha' = \alpha\beta, \quad \varepsilon' = -\varepsilon\beta, \quad \beta' = \frac{1}{\beta}$$

in ($g_5, 2$) übergeht.

So haben wir den folgenden

Satz 2. Die allgemeinsten Lösungen der Funktionalgleichung (2. 1) auf \mathbf{Q}_0 sind

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_1) \quad f(x) &= \varphi(x) + \alpha, \\
g(x) &\equiv 0, \\
h(x) &\text{ eine beliebige komplexe Funktion;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_2) \quad f(x) &= \varphi(x) + \alpha, \\
g(x) &\text{ eine beliebige komplexe Funktion,} \\
h(x) &\equiv 0;
\end{aligned}$$

- (\mathfrak{L}_3) $f(x) = \varphi(x) + \lambda(x) + \delta,$
 $g(x) = \gamma \neq 0,$
 $h(x) = \frac{1}{\gamma} \lambda(x);$
- (\mathfrak{L}_4) $f(x) = \varphi(x) + \beta[\varkappa(x) - 1] + \delta,$
 $g(x) = \gamma \varkappa(x),$
 $h(x) = \frac{\beta}{\gamma} [\varkappa(x) - 1] \quad (\gamma \neq 0);$
- (\mathfrak{L}_5) $f(x) = \alpha \varphi_1(x)^3 + \varphi_2(x) + \delta,$
 $g(x) = \varphi_1(x),$
 $h(x) = 3\alpha \varphi_1(x)^2;$
- (\mathfrak{L}_6) $f(x) = \alpha \varphi_1(x)^3 + 3\alpha \varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x) + \delta,$
 $g(x) = \gamma[\varphi_1(x) + 1],$
 $h(x) = \frac{3\alpha}{\gamma} \varphi_1(x)^2 \quad (\gamma \neq 0);$
- (\mathfrak{L}_7) $f(x) = \alpha \psi_0(x) \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \delta,$
 $g(x) = \psi_0(x) \varphi_1(x),$
 $h(x) = \alpha[\psi_0(x) - 1];$
- (\mathfrak{L}_8) $f(x) = \alpha \varphi_1(x) \psi_0(x) + \alpha[\psi_0(x) - 1] + \varphi_2(x) + \delta,$
 $g(x) = \gamma[\varphi_1(x) + 1] \psi_0(x),$
 $h(x) = \frac{\alpha}{\gamma} [\psi_0(x) - 1] \quad (\gamma \neq 0);$
- (\mathfrak{L}_9) $f(x) = 2\alpha^2 \beta \left[\psi(x) - \frac{1}{\psi(x)} \right] + \varphi(x) + \delta,$
 $g(x) = \alpha \beta \left[\psi(x) - \frac{1}{\psi(x)} \right],$
 $h(x) = \alpha \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right];$
- (\mathfrak{L}_{10}) $f(x) = \alpha(1 + 2\alpha\beta) \psi(x) + \alpha(1 - 2\alpha\beta) \frac{1}{\psi(x)} + \varphi(x) + \delta - 2\alpha,$
 $g(x) = \gamma \left(\frac{1}{2} + \alpha\beta \right) \psi(x) + \gamma \left(\frac{1}{2} - \alpha\beta \right) \frac{1}{\psi(x)},$
 $h(x) = \frac{\alpha}{\gamma} \left[\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} - 2 \right].$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Konstanten bezeichnen, während $q(x), q_1(x)$ und $q_2(x)$ beliebige Lösungen von (2. 2), $\psi(x)$ und $\psi_0(x)$ beliebige von 0 verschiedene bzw. beliebige gerade Lösungen von (2. 3), $\varkappa(x)$ und $\lambda(x)$ beliebige Lösungen von (2. 46) bzw. (2. 43) sind.

Was die Lösungen der Gleichungen (2. 46) und (2. 48) betrifft, wurde in [8] gezeigt, daß alle nicht identisch verschwindende Lösungen von (2. 46) die Gestalt

$$\varkappa(x) = \frac{1}{2} \left(\psi(x) + \frac{1}{\psi(x)} \right)$$

haben, so daß (\mathfrak{L}_4) in (\mathfrak{L}_{10}) fällt (während für $\varkappa(x) \equiv 0$ (\mathfrak{L}_4) doch Spezialfall von (\mathfrak{L}_1) ist). Dagegen (vgl. [4]) hat die allgemeine Lösung von (2. 43) die Gestalt

$$\lambda(x) = \Phi(x, x),$$

wo Φ eine beliebige symmetrische, in beiden Veränderlichen additive Funktion ist:

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x), \quad \Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y).$$

Literatur

- [1] J. ACZÉL, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. *Basel—Stuttgart und Berlin*, 1961.
- [2] A. L. CAUCHY, Cours d'analyse de l'École Polytechnique. 1. Analyse algébrique. V. Paris, 1821 (Oeuvres (2) 3, Paris, 1897).
- [3] Á. CSÁSZÁR, A 69. feladat megoldása, *Mat. Lapok* 6 (1955), 353—355.
- [4] J. L. W. V. JENSEN, Om Lösning af Funktionalligninger med det mindste Maal af Forudsætninger, *Mat. Tidsskrift B* 8 (1897), 25—27.
- [5] Г. Н. САКОВИЧ, Некоторые свойства обобщенно-квазигладких функций. *Киэв. Університет, Студ. наук. праці зб. ХУИ (Mat.)*, 1955, 119—150.
- [6] A. SYKORA, O rovnicih ukonovych, *Časopis* 33 (1904), 181—198.
- [7] E. VINCZE, Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, IV. *Publ. Math. Debrecen* 10 (1963), 279—314.
- [8] W. H. WILSON, On certain related functional equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 26 (1920), 300—312.

(Eingegangen am 18. April 1963.)