ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СУММ ЭКСПОНЕНЦИАЛОВ

Г. Н. САКОВИЧ (Киев)

1. Суммы экспоненциалов с полиномиальными коэффициентами $\Sigma P_i(x)e^{\alpha_i x}$ очень просто описываются с помощью дифференциальных уравнений: они удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.[1]) (При этом от решений заранее требуется сильное свойство „регулярности" — многократная дифференцируемость). Ниже рассматривается несколько почти столь же простых описаний сумм экспоненциалов с помощью функциональных уравнений. (Априорные требования регулярности здесь гораздо слабее). Результаты имеют интересные применения в теории вероятностей ([1], [3]), которые мы надеемся изложить в другом месте. Другие применения — к описанию тригонометрических функций (существует обширная литература от Абеля и Коши до наших дней), в близком виде — к термодинамике ([9][2])).

2. В дальнейшем всюду f — неизвестная функция (которая окажется суммой экспоненциалов), а все прочие функции могут считаться вспомогательными неизвестными функциями.

Г. В. Пексидер [13] показал, что уравнение

$$f(x+y) = p(x)g(y) \tag{1}$$

имеет единственное „регулярное" решение

$$f(x) = Ce^{\alpha x}; \quad C = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}. \tag{2}$$

(Несколько обобщая его результат,) достаточно требовать только измеримость f и g и выполнение (1) только при $y > x_0 = \text{const}$, $x+y > x_0$. (Результат (2) получится для $x > x_0$, но может быть продолжен на все x. Такое продолжение имеет значение в теории вероятностей при изучении марковских процессов).

Уравнение (1) допускает несколько обобщений на случай, когда f есть сумма двух экспоненциалов, напр.:

$$f(x+y) = a_{11}f(x)f(y) + a_{12}f(x)g(y) + a_{21}g(x)f(y) + a_{22}g(x)g(y) \tag{3}$$

[1]) Настоящее сообщение является дополненным текстом доклада автора на Международной конференции по функциональным уравнениям в Обервольфахе (сентябрь 1962 г.) Автор благодарен доц. В. С. Королюку, обратившему его внимание на уравнение [5], проф. Я. Ацелю за постоянный интерес к работе, проф. Э. Винце за обсуждение вопроса и проф. А. Островскому, зачитавшему этот доклад на конференции.

[2]) Будь работа [9] известна авторам [1], она облегчила бы им получение вероятностных результатов.

где $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ — постоянная матрица (очевидно, симметричная). Уравнение (3) предполагается справедливым при любых $x, y > \text{const}$ (а выполняется на деле даже для всех x, y от $-\infty$ до $+\infty$).

$$(4) \qquad f(x+y) = p(x)g(y) + q(x)h(y)$$

(для тех же значений аргументов).

$$(5) \qquad f(x+y+z) = A(x, y)f(x+z) + B(x, y)f(y+z) \quad \text{при} \quad x \neq y$$

(это ограничение существенно).

Абель рассматривал уравнение (3) при $a_{11} = a_{22} = 0$; в общем же случае (и даже для суммы n экспоненциалов) оно было решено Стефаносом [18], Леви-Чивита [11] и Штеккелем [17], в предположении аналитичности f и g. Это ограничение ослабил Сато [16]. — Уравнение (4) было решено Винце [19]. Еще раньше Рейхенбах [15] и Ацель [5] рассматривали уравнение

$$(4') \qquad f(x+y) = p(x)g(y) + q(x)$$

(решения $f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2$ и $C_1 x + C_2$). — Уравнение (5) предложил нам для решения Королюк в связи с [1].

Мы будем решать уравнения:

$$(6) \qquad f(x+y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i(x) f_j(y)$$

(без ограничения общности $f = f_1$);

$$(7) \qquad f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$$

$$(8) \qquad f(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(s - x_i) \quad \text{при} \quad x_i \neq x_j$$

$$(9) \qquad f(s) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) f_i(s - x_i) = b(x_1, \ldots, x_{n-1}) g(s)$$

$$\text{при } 0 \neq x_i \neq x_j, \; b(x_1, \ldots, x_{n-1}) \not\equiv \text{const}$$

(случай $b(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv \text{const}$ тривиально сводится к (8)).

Уравнения (6)—(9) предполагаются справедливыми для всех достаточно больших значений аргументов функций f_i и f. Они сводятся последовательно: (9) → (8) → (7) → (6) → (10) к уравнению Коши—Гамеля

$$(10) \qquad H(x+y) = H(x) + H(y).$$

При достаточно общих предположениях последнее уравнение имеет единственное регулярное (напр., измеримое) решение: $H(x) = \alpha x$; тогда все решения уравнений (6)—(9) записываются в виде

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{k} P_i(x) e^{\alpha_i x},$$

где сумма степеней полиномов $P_i(x)$ равна $n-k$. Обратно, любая сумма экспоненциалов (11) является решением некоторого уравнения вида (6), а также (7), (8), (9). Например, для уравнения (5) ($s = x+y+z$)

$$(12) \qquad \begin{cases} f(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}, \\ A(x, y) = \dfrac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{e^{\alpha_1 (x-y)} - e^{\alpha_2 (x-y)}}, \quad B(x, y) = \dfrac{e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_2 y}}{e^{\alpha_1 (y-x)} - e^{\alpha_2 (y-x)}} \end{cases}$$

или

$$(12') \qquad \begin{cases} f(x) = (C_1 x + C_2) e^{\alpha x}, \\ A(x, y) = \dfrac{x e^{\alpha y}}{x-y}, \quad B(x, y) = \dfrac{y e^{\alpha x}}{y-x}. \end{cases}$$

Заметим еще, что в уравнениях (8) и (9) все f_i можно считать равными f; например, справедливо тождество

$$(13) \qquad f(s) = \frac{d(0, y)}{d(x, y)} f(s-x) + \frac{d(x, 0)}{d(x, y)} f(s-y) + \frac{D(x, y)}{d(x, y)} g(s),$$

где

$$(14) \qquad \begin{cases} f(s) = C_1 e^{\alpha_1 s} + C_2 e^{\alpha_2 s} + C_3 e^{\alpha_3 s}, \\ g(s) = p_1 e^{\alpha_1 s} + p_2 e^{\alpha_2 s} + p_3 e^{\alpha_3 s}, \\ d(x, y) \equiv d(x, y;\, p_1, p_2, p_3) = \begin{vmatrix} C_1 e^{-\alpha_1 x} & C_1 e^{-\alpha_1 y} & p_1 \\ C_2 e^{-\alpha_2 x} & C_2 e^{-\alpha_2 y} & p_2 \\ C_3 e^{-\alpha_3 x} & C_3 e^{-\alpha_3 y} & p_3 \end{vmatrix}, \\ D(x, y) = d(x, y;\, C_1, C_2, C_3). \end{cases}$$

(Для проверки проще всего заметить, что

$$a_1(x, y) = \frac{d(0, y)}{d(x, y)}, \quad a_2(x, y) = \frac{d(x, 0)}{d(x, y)}, \quad b(x, y) = \frac{D(x, y)}{d(x, y)}$$

удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (15_1) \quad a_1(x, y) \cdot C_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2(x, y) \cdot C_1 e^{-\alpha_1 y} + b(x, y) \cdot p_1 = C_1, \\ (15_2) \quad a_1(x, y) \cdot C_2 e^{-\alpha_2 x} + a_2(x, y) \cdot C_2 e^{-\alpha_2 y} + b(x, y) \cdot p_2 = C_2, \\ (15_3) \quad a_1(x, y) \cdot C_3 e^{-\alpha_3 x} + a_2(x, y) \cdot C_3 e^{-\alpha_3 y} + b(x, y) \cdot p_3 = C_3. \end{cases}$$

Умножая (15_1) на $e^{\alpha_1 s}$, (15_2) на $e^{\alpha_2 s}$, (15_3) на $e^{\alpha_3 s}$ и складывая, получим (13)).

3. Для сведения уравнения (7) к (6) нам понадобится решить уравнение, интересное и само по себе:

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_i(y)$$

или в матричной форме

$$(16') \qquad F'(x) G(y) = G'(x) F(y)$$

(F и G — вектора-столбцы, а штрих обозначает транспонирование).

Лемма. *Пусть из функций* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ *только* r *первые линейно независимы* $(0 \leqq r \leqq n)$. *Тогда решение уравнения* (16') *имеет вид:*

$$F = \begin{bmatrix} E & 0 \\ C' & 0 \end{bmatrix} \Phi, \quad G = \begin{bmatrix} S & -C \\ 0 & E \end{bmatrix} \Phi, \tag{17}$$

где компоненты вектора $\Phi' = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — *произвольные функции,* C — *произвольная, а* S — *произвольная симметричная постоянные матрицы размеров соответственно* $(n-r)\times r$ *и* $r \times r$, E *и* 0 — *единичные и нулевые матрицы надлежащих размеров.*

Здесь не требуется никаких предположений регулярности. В случае $r=0$, естественно, $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$, а $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ произвольны.

Доказательство. В силу предположения $f_{r+1}(x), \ldots, f_n(x)$ линейно выражаются через $f_1(x), \ldots, f_r(x)$; в обозначениях

$$F_1' = (f_1(x), \ldots, f_r(x)), \quad F_2' = (f_{r+1}(x), \ldots, f_n(x)),$$

$$G_1' = (g_1(x), \ldots, g_r(x)), \quad G_2' = (g_{r+1}(x), \ldots, g_n(x))$$

имеем: $F_2 = C'F_1$(C — некоторая постоянная матрица). Зафиксируем в (16) r разными способами $y: y = y_1, \ldots, y_r$ так, чтобы $\det f_i(y_j) \neq 0$ (если такого y_r не существует, то, разлагая этот детерминант по последнему столбцу, найдем, что $f_1(y), \ldots, f_r(y)$ линейно зависимы). Из полученной системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами вектор G_1 определится в виде: $G_1 = SF_1 - CG_2$, где S — другая постоянная матрица. Подставив это в (16'), убедимся, что матрица S симметрична; в остальном матрицы C, S и вектора F_1, G_2 произвольны.

Уравнение (16) решил Магнус [12] в предположении дифференцируемости F и G; без этого предположения им занимались Поповичиу [14] и Ацель [7].

Замечание. Доказанная лемма играет роль при решении многих функциональных уравнений. Частный случай ее: $n=2$ известен как ,,разделение переменных''. Разделение переменных иногда удается после симметризации функционального уравнения (см. напр. [6] или ниже № 5), но в более сложных случаях ту же роль выполняет применение этой леммы. — Подобным же образом может быть решено уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) = 0.$$

4. Уравнение (9) непосредственно сводится к (8). Именно, заменив x_{n-1} на еще не определявшееся x_n и исключив $g(s)$, получим:

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(s - x_i),$$

где при $1 \leqq i \leqq n-2$

$$A_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} a_i(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_{n-1}) & a_i(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n) \\ b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_{n-1}) & b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n) \end{vmatrix}}{b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n) - b(x_1, \ldots x_{n-2}; x_{n-1})},$$

$$A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{a_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_{n-1}) b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n)}{b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n) - b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_{n-1})}$$

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{-a_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n) b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_{n-1})}{b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_n) - b(x_1, \ldots, x_{n-2}; x_{n-1})},$$

$$f_n(s) = f_{n-1}(s).$$

Ввиду произвольности нумерации x-ов это рассуждение не годится только в случае $b(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv \text{const}$, когда сведение к (8) очевидно. $(f(s) - bg(s) = h(s)$ и т. д.)

Сходным образом (8) сводится к (7): фиксируются значения всех x-ов, кроме первого $(x_i = x_i', \ 2 \leqq i \leqq n)$ так, чтобы $a_1(x; x_2', \ldots, x_n') \not\equiv 0 \ (x = x_1)$; тогда

$$h(s-x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) g_i(s),$$

где

$$h(s) = f_1(s), \quad g_1(s) = f(s), \quad g_i(s) = f_i(s - x_i') \quad \text{при} \quad i > 1,$$

$$a_1(x) = \frac{1}{a_1(x; x_2', \ldots, x_n')}, \quad a_i(x) = -\frac{a_i(x; x_2', \ldots, x_n')}{a_1(x; x_2', \ldots, x_n')}.$$

Изменение в знаке перед x по сравнению с (7), очевидно, несущественно (устраняется, напр., продолжением с помощью функционального уравнения).

Наконец, в (7) без ограничения общности можно считать $f = f_1$ (зафиксируйте такое y', чтобы $g_1(y') \neq 0$, исключите $f_1(x)$ и замените y на $y + y'$, x на $x - y'$). Далее, ввиду коммутативности $x + y$ правая часть (7) удовлетворяет уравнению (16); с помощью (17) (без ограничения общности $r = n$) придем к уравнению (6).

5. Рассмотрим, наконец, уравнение (3) (предположение $n = 2$ упрощает запись, не изменяя характера рассуждения; при $n > 2$ после симметризации используется лемма № 3). Предполагается, что оно справедливо, когда все аргументы больше некоторой константы. Уравнение (3) сразу сводится к (1), если f и g линейно зависимы, а также, если

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

(что a posteriori само сводится к линейной зависимости f и g: именно, если, напр., $a_{11} = t a_{12}$, $a_{21} = t a_{22}$, то

$$f(x+y) = [tf(x) + g(x)]\,[a_{12} f(y) + a_{22} g(y)],$$

и после решения этого уравнения вида (1) f и g окажутся пропорциональны экспоненциалу. — В общем случае в сумме (3) уменьшается число членов). Поэтому будем считать

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0 \tag{18}$$

и (в силу коммутативности)

$$a_{12} = a_{21}.$$

Сгруппируем члены („поляризуем" форму):

$$f(x+y) = [a_{11}f(y) + a_{12}g(y)]f(x) + [a_{12}f(y) + a_{22}g(y)]g(x). \tag{19}$$

Поэтому

$$f(x+y+z) = [a_{11}f(z) + a_{12}g(z)]\,[a_{11}f(y) + a_{12}g(y)]f(x) +$$
$$+ [a_{11}f(z) + a_{12}g(z)]\,[a_{12}f(y) + a_{22}g(y)]g(x) + [a_{12}f(z) + a_{22}g(z)]g(x+y).$$

Мы заключаем отсюда, что выражение

$$[a_{12}f(z) + a_{22}g(z)]\{g(x+y) - [a_{11}f(y) + a_{12}g(y)]g(x)\}$$

симметрично относительно y и z. Поэтому существует такая функция $h(x)$, что

$$g(x+y) = [a_{11}f(y) + a_{12}g(y)]g(x) + [a_{12}f(y) + a_{22}g(y)]h(x). \tag{20}$$

Дальше можно вывести аналогичную формулу для $h(x+y)$ и, заметив, что

$$\begin{bmatrix} f(x+y) & g(x+y) \\ g(x+y) & h(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y) & g(y) \\ g(y) & h(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ g(x) & h(x) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

воспользоваться результатами Приложения к ст. [2] [3]).

Другой прием — ввести теперь неопределенные константы k и l, связанные условием

$$a_{11} + a_{12}k + a_{22}l = 0, \tag{22}$$

тогда билинейная форма

$$l[a_{12}f(y) + a_{22}g(y)]f(x) - [(a_{11} + ka_{12})f(y) + (a_{12} + ka_{22})g(y)]g(x)$$

симметрична; добавляя ее к обеим частям (20), обнаружим симметричность относительно x и y формы

$$[h(x) - kg(x) + lf(x)]\,[a_{12}f(y) + a_{22}g(y)]. \tag{23}$$

---

[3]) Я весьма обязан проф. Я. Ацелю и А. Балогу, которые любезно обратили мое внимание на серию венгерских и румынских статей, предшествовавших [2] и покрывающих содержание этого Приложения (см. [8] и ссылки в этой работе, а также [9]). Впрочем, как указывалось в [2], результаты этого приложения не претендовали на новизну, вытекая из более ранних и более общих неэлементарных результатов (см. Хилле [4]). Работы же венгерских и румынских математиков (дополняющие друг друга) важны по элементарности методов.

f и g линейно независимы; в силу симметричности (23) используя „разделение переменных“ можно k в (22) выбрать так, чтобы

$$h(x)-kg(x)+lf(x)\equiv 0. \tag{24}$$

Пусть теперь t_1 и t_2 — корни уравнения $t^2+kt+l=0$, т. е.

$$t_1+t_2=-k,\quad t_1t_2=l, \tag{25}$$

тогда в силу (25), (22) и (24) имеем

$$a_{11}-t_{2,1}a_{12}=t_{1,2}(a_{12}-t_{2,1}a_{22})$$

$$t_{1,2}g(x)+h(x)=-t_{2,1}[t_{1,2}f(x)+g(x)].$$

Поэтому из (19) и (20)

$$t_{1,2}f(x+y)+g(x+y)=[t_{1,2}f(x)+g(x)][(a_{11}-t_{2,1}a_{12})f(y)+(a_{12}-t_{2,1}a_{22})g(y)]=$$
$$=(a_{12}-t_{2,1}a_{22})[t_{1,2}f(x)+g(x)][t_{1,2}f(y)+g(y)].$$

Очевидно, $a_{12}-t_{2,1}a_{22}\neq 0$. Таким образом, для функций

$$F(x)=[t_{1,2}f(x)+g(x)/[(a_{12}-t_{2,1}a_{22})$$

мы получаем одно из уравнений Коши:

$$F(x+y)=F(x)F(y),$$

так что в предположении, напр., измеримости f и g

$$\begin{cases} t_1f(x)+g(x)=(a_{12}-a_{22}t_2)^{-1}e^{\alpha_2x}, \\ t_2f(x)+g(x)=(a_{12}-a_{22}t_1)^{-1}e^{\alpha_1x}, \end{cases} \tag{26}$$

откуда при $t_1\neq t_2$ без труда определяются f и g. Случай $t_1=t_2$ также особых затруднений не доставляет: исключая $g(x)$ из (19) с помощью (26) и учитывая, что при $t_1=t_2=t$ $a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2=0$, мы получаем для функции

$$H(x)=e^{-\alpha x}f(x)-a_{22}(a_{12}-a_{22}t)^{-2}$$

другое уравнение Коши:

$$H(x+y)=H(x)+H(y).$$

Результаты этих вычислений можно представить в изящной форме:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{\alpha_1x}}{a_{11}-2a_{12}t_1+a_{22}t_1^2}+\dfrac{e^{\alpha_2x}}{a_{11}-2a_{12}t_2+a_{22}t_2^2}, \\ g(x)=\dfrac{-t_1e^{\alpha_1x}}{a_{11}-2a_{12}t_1+a_{22}t_2^2}+\dfrac{-t_2e^{\alpha_2x}}{a_{11}-2a_{12}t_2+a_{22}t_2^2}, \\ h(x)=\dfrac{t_1^2e^{\alpha_1x}}{a_{11}-2a_{12}t_1+a_{22}t_1^2}+\dfrac{t_2^2e^{\alpha_2x}}{a_{11}-2a_{12}t_2+a_{22}t_2^2}, \end{cases} \tag{27}$$

где числа α_1, α_2, t_1 произвольны, а t_2 связано с t_1 условием:

$$a_{11}-a_{12}(t_1+t_2)+a_{22}t_1t_2=0. \tag{28}$$

(поскольку

$$(a_{11}-2a_{12}t_1+a_{22}t_1^2)(a_{11}-2a_{12}t_2+a_{22}t_2^2) = (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(t_1-t_2)^2,$$

то ни один знаменатель в (27) не равен нулю), или же

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = (Cx+a_{22})e^{\alpha x}/(a_{11}a_{22}-a_{12}^2), \\ g(x) = -(tCx+a_{12})e^{\alpha x}/(a_{11}a_{22}-a_{12}^2), \\ h(x) = (t^2Cx+a_{11})e^{\alpha x}/a_{11}a_{22}-a_{12}^2), \end{array}\right. \tag{27'}$$

причем C и α произвольны, а

$$a_{11}-2a_{12}t+a_{22}t^2 = 0. \tag{28'}$$

Замечания. 1. Изложенного достаточно также для определения всех вспомогательных неизвестных функций в (7)—(9) или для решения (7)—(9) в случае, когда некоторые из этих функций заданы. На этом мы уже не будем останавливаться.

2. Примененные здесь методы (фиксирование некоторых аргументов; исключение; симметризация, с использованием коммутативности или ассоциативности; разделение переменных; подбор параметра, при котором осуществляется факторизация) уже использовались (ср. [9] и [5]) и являются довольно сильными общими методами теории функциональных уравнений. Роль, аналогичную использованию „леммы Магнуса," может выполнять детерминантный метод Винце [20].

ЛИТЕРАТУРА

(дополнительные ссылки см. в [3], [5], и [8])

[1] В. М. Золотарёв и В. С. Королюк, Об одной гипотезе Б. В. Гнеденко, *Теор. вероятн. и ее примен.* **6** (1961), 469—474; исправление: **7** (1962), 120.

[2] Г. Н. Сакович, Решение одного многомерного функционального уравнения, *Украин. матем. журн.* **13** (1961), 173 (185)—189.

[3] М. Й. Ядренко, Дисертація, 1961 (Київ. університет); тж.: Про один клас ізотропних випадкових полів у нескінченновимірному просторі Лобачевського. *Доповіді Акад. наук Україн. РСР* (1962) 327—329.

[4] Э. Хилл [е], Функциональный анализ и полугруппы, *Москва*, 1953. (Hille E. Functional analysis and semi-groups.)

[5] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart*. 1960.

[6] J. Aczél, Miszellen über Funktionalgleichungen. I., *Math. Nachr.* **19** (1958), 88—99.

[7] J. Aczél, Sur une classe d'équations fonctionelles bilinéaires à pluiseurs fonctions inconnues. *Publ. Elektrotehn. Fak. Univ. u Beogradu, ser. mat. i fis.* **62** (1961), 12—20.

[8] A. Balogh, On determination of geometric objects with special transformation formulae. *Mathematica* (Cluj), **1** (1959), 199—219.

[9] T. W. Chaundy and J. B. McLeod, On a functional equation. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **9** (1958), 202—206.

[10] O. E. Gheorghiu—V. Mioc—B. Crstici, Soluţia generala masurabila a unui sistem de ecuaţii funcţionale, *Com. Acad. R. P.Romîne* **10** (1960), 17—21.

[11] T. Levi-Civita, Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)Y_i(y)$, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (5) **22** (1913), 181—183.

[12] L. J. MAGNUS, Über die Relationen der Funktionen, welche der Gleichung $F_1 y\varphi_1 x + F_2 y\varphi_2 x + \ldots + F_n y\varphi_n x = F_1 x\varphi_1 y + F_2 x\varphi_2 y + \ldots + F_n x\varphi_n y$ genug thun, *J. Reine Angew. Math.* **5** (1830), 365—373.

[13] H. W. PEXIDER, Notiz über Funktionaltheoreme, *Monatsh. Math. Phys.* **14** (1903), 293—301.

[14] T. POPOVICIU, Asupra unor ecuaţiei funcţionale, *Studii cerc. şti. Acad. RPR, Cluj* **6** (1955), 37—49.

[15] H. REICHENBACH, Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre, *Braunschweig*, 1924.

[16] R. SATO, A study of functional equations, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* (3) **10** (1928), 212—222.

[17] P. STÄCKEL, Sulla equazione funzionale $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) Y_i(y)$, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (5) **22** (1913), 392—393.

[18] C. STEPHANOS, Sur une catégorie d'équations fonctionelles. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 360—362.

[19] E. VINCZE, Über die Verallgemeinerung der trigonometrischen und verwandten Funktionalgleichungen, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math.* **3—4** (1960—61), 389—404.

[20] E. VINCZE, Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, I. *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 149—163.

(Поступило 31. 8. 1962., в измененной форме 11. 8. 1963.)