Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

Wir betrachten geordnete Halbmoduln $\mathfrak{M}$ (Halbgruppen mit additiv geschriebener Verknüpfung), welche hinsichtlich ihrer Ordnung außer der Trichotomie (JI) und der Transitivität (JII) sowie dem Monotoniegesetz der Addition (JIII: Aus $a<b$ folgt $a+c \leqq b+c$ und $c+a \leqq c+b$ für alle $c \in \mathfrak{M}$) noch folgende Eigenschaft besitzen:

JIV: *Zu $a \in \mathfrak{M}$ und $b \in \mathfrak{M}$ mit $a<b$ existieren $x \in \mathfrak{M}$ und $y \in \mathfrak{M}$ mit $a+x = y+a = b$.*

Sie unterscheiden sich von den von CLIFFORD [2] eingeführten natürlich geordneten Halbmoduln dadurch, daß in ihnen nicht alle Elemente positiv zu sein brauchen; wir nehmen im Folgenden die Existenz negativer Elemente an. Ist $\mathfrak{M}$ dann archimedisch geordnet, so ist $\mathfrak{M}$ sogar (kommutativer) Modul (Satz 3) [1]); im anderen Falle besitzt $\mathfrak{M}$ bei Voraussetzung der Kommutativität eine (zur CLIFFORDschen Zerlegung kommutativer natürlich geordneter Halbmoduln analoge) Zerlegung in irreduzible Halbmoduln mit JIV, deren Aufbau wir näher beschreiben (Sätze 4—10).

Zur Charakterisierung negativer Elemente machen wir zunächst folgende Bemerkungen: Ein Element $c \in \mathfrak{M}$ heiße *linkspositiv* bzw. *rechtspositiv*, wenn $t \leqq c+t$ bzw. $t \leqq t+c$ für alle $t \in \mathfrak{M}$ gilt, und entsprechend *linksnegativ* bzw. *rechtsnegativ*, falls ein $u \in \mathfrak{M}$ bzw. $v \in \mathfrak{M}$ existiert mit $c+u < u$ bzw. $v+c < v$. In einem beliebigen geordneten Halbmodul $\mathfrak{M}$ kann dabei ein Element $c \in \mathfrak{M}$ durchaus etwa linkspositiv und rechtsnegativ sein; z. B. wähle man c als Minimum einer geordneten Menge $\mathfrak{M}$ mit der Verknüpfung $a+b = b$. Auch kann $c \in \mathfrak{M}$ etwa rechtsnegativ sein, ohne daß $t+c \leqq t$ für alle $t \in \mathfrak{M}$ gilt; als Beispiel wähle man hier im eben erwähnten Halbmodul $\mathfrak{M}$ das Element c so, daß Elemente $s \in \mathfrak{M}$ und $v \in \mathfrak{M}$ mit $s<c<v$ existieren. Ferner ist ein Element $c \in \mathfrak{M}$ mit $c+c < c$ sicher links- und rechtsnegativ, aber man kann nicht umgekehrt schließen. Dagegen erhalten wir:

Satz 1. *In einem Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *gilt:*

a) *Ein linksnegatives Element $c \in \mathfrak{M}$ erfüllt $c+t \leqq t$ und ein rechtsnegatives Element $c \in \mathfrak{M}$ entsprechend $t+c \leqq t$ für alle $t \in \mathfrak{M}$.*

b) *Jedes linksnegative Element ist auch rechtnegativ und umgekehrt, weshalb wir nur noch von negativen und entsprechend von positiven Elementen schlechthin zu sprechen brauchen.*

---

[1]) Es handelt sich hierbei um die Verallgemeinerung eines bei LUGOWSKI [4] unter Voraussetzung der Regularität ausgesprochenen Sachverhalts.

c) *Die negativen Elemente $c \in \mathfrak{M}$ sind gekennzeichnet durch $c+c < c$, die positiven entsprechend durch $c \leqq c+c$.*

Beweis. Es sei $c \in \mathfrak{M}$ linksnegativ, also $c+u < u$ für geeignetes $u \in \mathfrak{M}$. Ist dann $t < u$, so gibt es nach JIV ein $k \in \mathfrak{M}$ mit $t+k = u$, woraus $c+u = c+t+k < t+k = u$ folgt; aus einer solchen echten Ungleichung kann man aber wegen JI und JIII gleiche Elemente auf beiden Seiten weglassen, so daß wir $c+t < t$ erhalten. Ist dagegen $u < t$, also $u+k = t$, so ergibt sich unmittelbar aus JIII: $c+t = c+u+k \leqq u+k = t$. Setzt man ferner $c+u = w$, so folgt nach obigem wegen $w < u$ auch $c+w < w$, also $c+c+u < c+u$ und damit $c+c < c$. Für rechtsnegative Elemente schließt man analog.

Nach Satz 1 ist ein Element $c \in \mathfrak{M}$ bereits dann positiv, wenn ein Element $s \in \mathfrak{M}$ mit $s < c+s$ oder $s < s+c$ existiert; insbesondere sind also die in JIV auftretenden Elemente x und y stets positiv. Ferner entnehmen wir dem obigen Beweis noch, daß ein negatives Element $c \in \mathfrak{M}$ wegen $c+c < c$ jedes kleinere $t \in \mathfrak{M}$ sogar echt verkleinert: Aus $t < c$ folgt $c+t < t$ und analog $t+c < t$. Daraus ergibt sich weiter, daß die natürlichen Vielfachen nc eines negativen Elementes $c \in \mathfrak{M}$ eine streng monoton abnehmende Folge bilden; denn wegen $nc \leqq c+c$ für $n \geqq 2$ folgt $nc < c$ und damit $(n+1)c = c+nc < nc$. Insbesondere ist daher ein endlicher Halbmodul mit JIV stets sogar natürlich geordnet.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$ den Positivitätsbereich von $\mathfrak{M}$, mit $\mathfrak{P}'$ den Bereich aller negativen Elemente von $\mathfrak{M}$. $(\mathfrak{P}', \mathfrak{P})$ ist im Falle $\mathfrak{P}' \neq \emptyset$ ein Schritt in $\mathfrak{M}$, wie unmittelbar aus der Definition negativer und positiver Elemente folgt. $\mathfrak{P}$ ist ein natürlich geordneter Halbmodul; auch $\mathfrak{P}'$ ist ein Halbmodul, denn mit c_1 und c_2 ist auch c_1+c_2 wegen $c_1+c_2 \leqq c_2$ negativ.

Nach Clifford [3] heißt ein geordneter Halbmodul $\mathfrak{M}$ *archimedisch*, wenn er folgende beiden Eigenschaften hat:

(1) Zu $a \neq 0$ und $b \neq 0$ mit $a \leqq a+a$, $b \leqq b+b$ existiert eine natürliche Zahl n mit $b \leqq na$.

(2) Zu $a \neq 0$ und $b \neq 0$ mit $a+a \leqq a$, $b+b \leqq b$ existiert eine natürliche Zahl n mit $na \leqq b$.

Während im allgemeinen beide Eigenschaften voneinander unabhängig sind, erhalten wir für Halbmoduln mit JIV jedenfalls:

Satz 2. *In einem Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *zieht die Gültigkeit von* (1) *die Gültigkeit von* (2) *nach sich, im allgemeinen aber nicht umgekehrt.*

Beweis. Wäre zwar (1), aber nicht (2) erfüllt, so gäbe es zwei Elemente $a \in \mathfrak{P}'$ und $b \in \mathfrak{P}'$ mit $a < nb$ für alle natürlichen Zahlen n. Wegen $a < b$ und $b+b < b$ gibt es dann Elemente $x \in \mathfrak{P}$ und $y \in \mathfrak{P}$ mit $a+x = b$ und $b+b+y = b$, wobei aus der letzten Gleichung $(n+2)b+(n+1)y = b$ für alle n folgt. Dies liefert aber für alle n

$$a+(n+1)y \leqq (n+2)b+(n+1)y = b < b+y = a+x+y,$$

also $ny < x$ im Widerspruch zu (1).

Ein Beispiel für einen Halbmodul mit JIV, der zwar (2), aber nicht (1) erfüllt, ist die geordnete Summe $\mathfrak{M} = \Gamma \mathbin{\stackrel{<}{\smile}} N$ des Moduls Γ der ganzen Zahlen und des (davon unterschiedenen) Halbmoduls N der natürlichen Zahlen, d. h. die Vereinigungsmenge $\Gamma \cup N$, in welcher die Ordnung durch $a_1 < a_2$ und die Addition durch $a_1 + a_2 = a_2$ für $a_1 \in \Gamma$ und $a_2 \in N$ erklärt ist, während in den Teilmengen Γ und N von $\mathfrak{M}$ wie vordem gerechnet wird.

Ein Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV ist also als archimedischer Halbmodul bereits durch (1) allein festgelegt, d. h. durch die Forderung, daß der Positivitätsbereich $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ archimedisch ist. Wie stark jedoch die gleichzeitige Forderung von archimedisch und JIV bei Anwesenheit von negativen Elementen ist, zeigt folgender Satz:

Satz 3. *Ein archimedischer Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV, *der negative Element enthält, ist bereits (kommutativer) Modul.*

Beweis. a) Für ein negatives Element $c \in \mathfrak{M}$ gilt $c+c < c$, also $c+c+x = c$ mit $x \in \mathfrak{P}$. Dieses Element x erfüllt die Gleichung

$$c+c+x = c+x+c.$$

Sonst wäre nämlich entweder $c+c+x < c+x+c$ oder $c+c+x > c+x+c$. Wir führen die erste Annahme mit Hilfe von (1) zum Widerspruch; für den zweiten Fall schließt man analog mit (2). Aus $c = c+c+x < c+x+c$ folgt $c+x < x+c$ sowie $c+x \leqq c+x+c+x$ und $x+c \leqq x+c+x+c$ und außerdem $c+x \neq 0$ und $x+c \neq 0$ (für ein eventuell in $\mathfrak{M}$ vorhandenes Nullelement 0). Also gibt es nach (1) eine natürliche Zahl n mit $x+c \leqq n(c+x)$. Ersetzt man in der hieraus folgenden Ungleichung

$$c+x+c \leqq c+c+x+c+x+\ldots+c+x$$

sukzessive $c+c+x$ durch c, so ergibt sich der Widerspruch $c+x+c \leqq c$.

b) Aus $c = c+c+x = c+x+c$ folgt die Idempotenz von $c+x$; ferner gilt $c+c < c = c+c+x$, also $c+c+x = c < c+x$ und damit $c+x < x$. Dies liefert $c+x = 0$ und mithin $x = -c$, denn aus $c+x \neq 0$ und $c+x < x$ würde sonst $n(c+x) < x$ für alle natürlichen Zahlen n folgen im Widerspruch zu (1).

c) Um nun die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{M}$ nachzuweisen, zeigen wir, daß die Gleichung $a+x = b$ in $\mathfrak{M}$ stets lösbar ist; die Lösbarkeit von $y+a = b$ folgt dann analog. Hierzu bleibt nur noch der Fall $a > b$ zu betrachten. Nach JIV gibt es ein $x_1 \neq 0$ aus $\mathfrak{P}$ mit $b+x_1 = a$; ferner gilt auch $0 \neq -c \in \mathfrak{P}$, da sonst wegen der Halbmoduleigenschaft von $\mathfrak{P}'$ die Summe $c+(-c) = 0$ negativ wäre. Daher existiert eine natürliche Zahl n mit

$$x_1 \leqq n(-c) = -nc,$$

woraus $a = b+x_1 \leqq b+(-nc)$, also $a+nc \leqq b$ folgt; im Falle $a+nc < b$ verhilft dann nochmalige Anwendung von JIV zur gesuchten Lösung von $a+x = b$.

d) Die Kommutativität von $\mathfrak{M}$ ist dann auf Grund der archimedischen Ordnung klar (vgl. etwa Birkhoff [1; S. 226]).

Im Folgenden untersuchen wir die Struktur *nichtarchimedisch geordneter Halbmoduln $\mathfrak{M}$ mit* JIV *unter Voraussetzung der Kommutativität*. Ist $\mathfrak{M}$ dann sogar natürlich geordnet, so gilt nach Clifford [2; Theorem 1], daß $\mathfrak{M}$ sich auf eine einzige Weise als geordnete Summe einer geordneten Menge ordnungsirreduzibler natürlich geordneter Halbmoduln $\mathfrak{S}_\tau$ schreiben läßt (T geordnete Indexmenge):

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\tau \in T}^{<} \mathfrak{S}_\tau \text{ mit } a_\sigma < b_\tau \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma < \tau \text{ oder} \\ \sigma = \tau,\ a_\sigma < b_\sigma \text{ wie in } \mathfrak{S}_\sigma; \end{cases}$$

$$a_\sigma + b_\tau = \begin{cases} b_\tau \text{ für } \sigma < \tau \\ a_\sigma + b_\tau \text{ wie in } \mathfrak{S}_\sigma \text{ für } \sigma = \tau; \end{cases}$$

ordnungsirreduzibel heißt dabei ein solcher Halbmodul, wenn er sich nicht mehr derartig zerlegen läßt. CLIFFORD bemerkt in [3], daß sich analog auch die entsprechende Aussage für positiv geordnete (d. h. nur aus positiven Elementen bestehende) Halbmoduln beweisen läßt; für uns ist interessant, daß dies ebenso für Halbmoduln mit JIV richtig ist:

Satz 4. *Jeder kommutative Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *besitzt eine* CLIFFORD*sche Zerlegung in ordnungsirreduzible Halbmoduln $\mathfrak{S}_\tau$ mit* JIV.

Zusatz. *Hat $\mathfrak{M}$ negative Elemente, so existiert in dieser Zerlegung von $\mathfrak{M}$ ein erster ordnungsirreduzibler Halbmodul $\mathfrak{M}^*$, und dieser enthält alle negativen Elemente von $\mathfrak{M}$.*

BEWEIS. In der Tat bedarf der CLIFFORDsche Beweis des Theorems für kommutative natürlich geordnete Halbmoduln nur geringfügiger Abänderungen, um die Richtigkeit von Satz 4 nachzuweisen. Es bleibt also nur der Zusatz zu zeigen. Ist aber $c \in \mathfrak{S}_\tau$ ein negatives Element, so enthält $\mathfrak{S}_\tau$ wegen $c + c < c$ und $c + c \in \mathfrak{S}_\tau$ auf Grund von JIV auch ein positives Element x mit $c + c + x = c$; da alle negativen Elemente kleiner als alle positiven Elemente sind, gilt sogar $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{S}_\tau$ und $\tau = \operatorname{Min} T$.

Zur genaueren Aufklärung der Struktur von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ führen wir folgende Aufteilung von $\mathfrak{M}$ in zwei Teilmengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ durch: $\mathfrak{M}_1$ bestehe aus $\mathfrak{P}'$ und der Menge $\mathfrak{P}_1$ aller derjenigen Elemente p_1 von $\mathfrak{P}$, für welche Elemente $a' \in \mathfrak{P}'$ und $b' \in \mathfrak{P}'$ mit $a' + p_1 = b'$ existieren; $\mathfrak{M}_2$ sei die Komplementärmenge $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{P}$. Dann gilt:

Satz 5. *Die Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ eines kommutativen Halbmoduls $\mathfrak{M}$ mit* JIV *ist im Falle $\mathfrak{M}_2 \neq \emptyset$ ein Schnitt in $\mathfrak{M}$.*

BEWEIS. Es ist nur zu zeigen, daß für beliebige Elemente $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ und $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ stets $m_1 < m_2$ gilt. Für $m_1 \in \mathfrak{P}'$ ist dies klar; es sei also $m_1 \in \mathfrak{P}_1$ und $a' + m_1 = b'$ mit $a' \in \mathfrak{P}'$ und $b' \in \mathfrak{P}'$. Dann gilt jedenfalls $m_1 \neq m_2$. Wäre nun $m_2 < m_1$, also wegen JIV $m_2 + x = m_1$ mit $x \in \mathfrak{P}$, so folgte wegen $m_2 \in \mathfrak{P}$

$$a' + x \leqq a' + x + m_2 = a' + m_1 = b',$$

also $a' + x = c' \in \mathfrak{P}'$ und damit

$$c' + m_2 = b'$$

im Widerspruch zu $m_2 \notin \mathfrak{P}_1$.

Wir untersuchen diese beiden Teilmengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von $\mathfrak{M}$ im Hinblick auf ihre Struktur.

Satz 6. *In der Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ eines kommutativen Halbmoduls $\mathfrak{M}$ mit* JIV *ist $\mathfrak{M}_1$ ein Modul mit $\mathfrak{P}_1$ als Positivitätsbereich.*

BEWEIS. a) $\mathfrak{M}_1$ ist ein Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{P}_1$ als Positivitätsbereich. In der Tat: Mit $a \in \mathfrak{P}'$ und $b \in \mathfrak{P}'$ gilt auch $a+b \in \mathfrak{P}'$. Aus $a \in \mathfrak{P}_1$ und $b \in \mathfrak{P}_1$ sowie $a'+a = b'$, $c'+b = d'$ (a', b', c', d' aus $\mathfrak{P}'$) folgt

$$(a'+c')+(a+b) = b'+d' \quad \text{mit} \quad a'+c' \in \mathfrak{P}',\, b'+d' \in \mathfrak{P}',$$

also $a+b \in \mathfrak{P}_1$. Schließlich gilt für $a \in \mathfrak{P}'$, $b \in \mathfrak{P}_1$ mit $c'+b = d'$ entweder $a+b \in \mathfrak{P}'$ oder $a+b \in \mathfrak{P}$, im letzteren Falle aber wegen

$$c'+a+b = a+d' \in \mathfrak{P}'$$

dann sogar $a+b \in \mathfrak{P}_1$.

b) $\mathfrak{M}_1$ erfüllt JIV. Zu $a \in \mathfrak{M}_1$ und $b \in \mathfrak{M}_1$ mit $a < b$ existiert nämlich nach Voraussetzung über $\mathfrak{M}$ jedenfalls ein $x \in \mathfrak{P}$ mit $a+x = b$. Gilt nun $b \in \mathfrak{P}'$ und damit $a \in \mathfrak{P}'$, so folgt $x \in \mathfrak{P}_1$ nach Definition von $\mathfrak{P}_1$. Ist aber $b \in \mathfrak{P}_1$ und $c'+b = d'$ mit $c' \in \mathfrak{P}'$, $d' \in \mathfrak{P}'$, so erhalten wir im Fall $a \in \mathfrak{P}_1$

$$c'+x \leqq c'+x+a = c'+b = d',$$

also $c'+x = e' \in \mathfrak{P}'$ und damit $x \in \mathfrak{P}_1$, während sich $x \in \mathfrak{P}_1$ im Falle $a \in \mathfrak{P}'$ wegen $c'+a \in \mathfrak{P}'$ direkt aus $c'+a+x = d'$ ergibt.

c) $\mathfrak{P}_1$ enthält wenigstens ein Idempotent; denn aus $c \in \mathfrak{P}'$ folgt $c+c < c$, also $c+c+x = c$ mit $x \in \mathfrak{P}_1$ und damit

$$c+x+c+x = c+x \in \mathfrak{P}_1.$$

d) $\mathfrak{P}_1$ enthält höchstens ein Idempotent. Dazu stellen wir zunächst fest, daß $\mathfrak{P}_1$ als natürlich geordneter Halbmodul gemäß dem oben genannten Theorem 1 von CLIFFORD in ordnungsirreduzible natürlich geordnete Unterhalbmoduln zerfällt. Jedenfalls liegt dann in jedem dieser Unterhalbmoduln jeweils höchstens ein Idempotent; dieses ist dann maximales Element des Unterhalbmoduls und absorbiert jedes seiner Elemente (CLIFFORD [2], Theorem 2). Daher bestehen zwischen jedem Element $p \in \mathfrak{P}_1$ und jedem Idempotent $e \in \mathfrak{P}_1$ folgende Beziehungen:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\text{Aus } p < e \quad \text{folgt} \quad p+e = e,\\ &\text{aus } e < p \quad \text{folgt} \quad e+p = p. \end{aligned}$$

Es seien nun e und f Idempotente von $\mathfrak{P}_1$. Dann existieren nach Definition von $\mathfrak{P}_1$ Elemente u und a bzw. v und b aus $\mathfrak{P}'$ mit

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} a &= u+e = u+e+e = a+e,\\ b &= v+f = v+f+f = b+f. \end{aligned}$$

Ferner existieren wegen $a < e$ und $b < f$ Elemente $x \in \mathfrak{P}_1$ und $y \in \mathfrak{P}_1$ mit

$$\text{(3)} \qquad a+x = e \quad \text{und} \quad b+y = f.$$

Wir zeigen nun $e = f$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leqq b$ annehmen dürfen. Ist dabei sogar $a < b$, so gibt es ein Element $z \in \mathfrak{P}_1$ mit $a+z = b$, woraus sich wegen $(2)_1$ ergibt

$$\text{(4)} \qquad b = a+z = a+e+z = b+e;$$

für $a=b$ stimmt aber die Aussage $b = b+e$ in (4) mit $(2)_1$ selbst überein. Die Annahme $f<e$ liefert dann wegen $(3)_2$, (4), $(3)_2$ und $(1)_1$ den Widerspruch

$$f = b+y = b+e+y = f+e = e.$$

Um auch die Annahme $e<f$ zum Widerspruch zu führen, verwenden wir, daß wegen $b<e$ ein Element $t \in \mathfrak{P}_1$ mit $b+t = e$ existiert; daraus ergibt sich nämlich unter Benutzung von $(1)_2$ und $(2)_2$ wieder

$$f = e+f = b+t+f = b+t = e.$$

e) Wir bezeichnen das gemäß c) und d) einzig in $\mathfrak{P}_1$ vorhandene Idempotent mit 0 und zeigen, daß 0 Nullelement von $\mathfrak{M}_1$ ist. Jedenfalls gilt gemäß c) $c+0 = c$ für jedes $c \in \mathfrak{P}'$ und gemäß $(1)_2$ $p+0 = p$ für jedes $p \in \mathfrak{P}_1$ mit $p>0$. Wäre nun 0 nicht Nullelement von $\mathfrak{M}_1$, so müßte daher wenigstens ein Element $p \in \mathfrak{P}_1$ mit $p<0$ existieren. Aus $p \in \mathfrak{P}_1$ und $p<0$ folgt aber für jedes $c \in \mathfrak{P}'$

$$c+p \leqq c+0 = c \leqq c+p, \quad \text{also} \quad c+p = c.$$

Wegen $c<p$ gibt es jedoch ein Element $s \in \mathfrak{P}_1$ mit $c+s = p$; dies liefert

$$c+c+s = c, \quad \text{also} \quad c+s+c+s = c+s$$

und damit $p+p = p$ im Widerspruch dazu, daß 0 doch das einzige Idempotent von $\mathfrak{P}_1$ ist.

f) Jedes Element von $\mathfrak{M}_1$ hat sein Entgegengesetztes in $\mathfrak{M}_1$. Für ein Element $c \in \mathfrak{P}'$ ist dies nämlich das Element $x \in \mathfrak{P}_1$ mit $c+c+x = c$, welches ja nach c) und e) $c+x = 0$ erfüllt. Für ein Element $p \in \mathfrak{P}_1$ existieren aber Elemente $a' \in \mathfrak{P}'$ und $b' \in \mathfrak{P}'$ mit $a'+p = b'$, so daß hier $(-b')+a'+p = 0$ mit $(-b')+a' \in \mathfrak{M}_1$ gilt. Damit ist der Beweis von Satz 6 beendet.

Satz 7. *In der Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ eines kommutativen Halbmoduls $\mathfrak{M}$ mit* JIV *ist $\mathfrak{M}_2$ ein positiv, aber nicht notwendig natürlich geordneter Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Es seien a und b Elemente von $\mathfrak{M}_2$. Dann führt die Annahme, daß Elemente a' und b' aus $\mathfrak{P}'$ mit $a'+a+b = b'$ existieren würden, wegen $a'+a \notin \mathfrak{P}'$, also $a'+a = p \in \mathfrak{P}$ zu dem aus

$$p \leqq p+b = b'$$

führenden Widerspruch $p \in \mathfrak{P}'$. Als Beispiel für einen Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV, dessen Unterhalbmodul $\mathfrak{M}_2$ nicht natürlich geordnet ist, betrachten wir die Produktmenge $N_0 \times \Gamma$ aus dem Halbmodul N_0 aller nichtnegativen ganzen Zahlen und dem Modul Γ der ganzen Zahlen, in der wir die Addition komponentenweise und die Ordnung vermöge

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder } a_1 < b_1 \\ \text{oder } \qquad a_1 = b_1,\ a_2 < b_2 \end{cases}$$

erklären. Hier gilt

$$\mathfrak{P}' = \{0\} \times N', \quad \mathfrak{M}_1 = \{0\} \times \Gamma,$$
$$\mathfrak{P}_1 = \{0\} \times N_0, \quad \mathfrak{M}_2 = N \times \Gamma,$$

wobei N' bzw. N die Menge aller negativen bzw. positiven Zahlen von Γ bezeichne; und mit $a_1 \neq 0$ folgt aus

$$(a_1, a_2) < (a_1, b_2), \quad \text{also} \quad (a_1, a_2) + (x_1, x_2) = (a_1, b_2)$$

wegen $a_1 + x_1 = a_1, a_2 + x_2 = b_2$ mit $a_2 < b_2$

$$x_1 = 0, \; x_2 \in N, \quad \text{also} \quad (x_1, x_2) \in \mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1 .$$

Wir klären nun die Beziehungen zwischen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$:

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein kommutativer Halbmodul mit* JIV. *Dann gilt $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2$ im Sinne der Komplexaddition*[2]*); insbesondere erhält man $0 + m_2 = m_2$ für alle $m_2 \in \mathfrak{M}_2$, d. h., das Nullelement 0 des Moduls $\mathfrak{M}_1$ ist Nullelement von ganz $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Es sei $m_1 \in \mathfrak{M}_1$, $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ und $m_1 + m_2 = m$. Die Annahme $a' + m = b'$ mit $a' \in \mathfrak{P}'$, $b' \in \mathfrak{P}'$ führt dann wegen

$$a' + m_1 + m_2 = b'$$

für $m_1 \in \mathfrak{P}'$ sofort, für $m_1 \in \mathfrak{P}_1$ wegen $c' + m_1 = d'$ mit $c' \in \mathfrak{P}'$, $d' \in \mathfrak{P}'$ zum Widerspruch $m_2 \in \mathfrak{P}_1$. Also gilt jedenfalls $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Für jedes $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ gilt aber nach Satz 5 $m_1 < m_2$ für beliebiges $m_1 \in \mathfrak{M}_1$, also $m_1 + x = m_2$ nach JIV in $\mathfrak{M}$, und es muß x zu $\mathfrak{M}_2$ gehören, da sonst aus dieser Gleichung $m_2 \in \mathfrak{M}_1$ folgt. Also ist $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2$. Schließlich gilt insbesondere $0 < m_2$ für jedes $m_2 \in \mathfrak{M}_2$, also $0 + x = m_2$ mit $x \in \mathfrak{M}_2$ und damit

$$m_2 = 0 + x = 0 + 0 + x = 0 + m_2 .$$

Natürlich interessiert die Frage, wann die in Satz 8 ausgesprochene Gleichheit durchweg elementweise gilt, d. h. wann $\mathfrak{M}$ die geordnete Summe von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ ist.

Satz 9. *Für einen kommutativen Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \circlearrowleft \mathfrak{M}_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist. Insbesondere tritt dies ein, falls $\mathfrak{M}_2$ ein Minimum hat.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \circlearrowleft \mathfrak{M}_2$ und $a \in \mathfrak{M}_2$, $b \in \mathfrak{M}_2$ mit $a < b$. Das wegen JIV in $\mathfrak{M}$ vorhandene Element x mit $a + x = b$ kann dann nicht in $\mathfrak{M}_1$ liegen, denn sonst folgte $a = a + x = b$.

Umgekehrt sei $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet. Nun gilt für $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ und $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ nach Satz 8 stets $m_1 + x = m_2$ mit $x \in \mathfrak{M}_2$. Es sei zunächst $m_1 \in \mathfrak{P}_1$. Dann ist jedenfalls $x \leqq m_2$. Wäre aber $x < m_2$, so gäbe es nach Voraussetzung über $\mathfrak{M}_2$ ein $y \in \mathfrak{M}_2$ mit $x + y = m_2$ und dazu ein $z \in \mathfrak{M}_2$ mit $m_1 + z = y$. Dies liefert

$$m_1 + z + x = y + x = m_2 = m_1 + x;$$

woraus wegen der Moduleigenschaft von $\mathfrak{M}_1$ und Satz 8 $z + x = x$ folgt, was wegen

$$z + x = x < m_2 = m_1 + x$$

den Widerspruch $z < m_1$ ergibt. Also gilt $x = m_2$, d. h. $m_1 + m_2 = m_2$ jedenfalls

[2]) $\mathfrak{M}_2$ ist also im Sinne von Clifford [3] ein konvexes Primideal von $\mathfrak{M}$.

für jedes $m_1 \in \mathfrak{P}_1$. Ist aber $m_1 \in \mathfrak{P}'$, so folgt daraus unter Verwendung von $m_1 < p_1$ für $p_1 \in \mathfrak{P}_1$, also $m_1 + x = p_1$ mit $x \in \mathfrak{P}_1$ ebenfalls

$$m_1 + m_2 = m_1 + x + m_2 = p_1 + m_2 = m_2.$$

Schließlich sei $\mu = \text{Min}\,\mathfrak{M}_2$. Dann gilt für jedes $m_1 \in \mathfrak{P}_1$ nach Satz 8 $m_1 + x = \mu$ mit $x \in \mathfrak{M}_2$, also $x \leqq m_1 + x = \mu$ und damit $x = \mu$ und $m_1 + \mu = \mu$. Jedes $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ erfüllt $\mu \leqq m_2$, also $\mu + y = m_2$ mit $y \in \mathfrak{M}$, mithin

$$m_1 + m_2 = m_1 + \mu + y = \mu + y = m_2.$$

Daraus folgt aber mit dem gleichen Schluß wie oben auch $m_1 + m_2 = m_2$ für jedes $m_1 \in \mathfrak{P}'$.

Die in Satz 4 genannte CLIFFORDsche Zerlegung eines kommutativen Halbmoduls mit JIV läßt sich damit wie folgt genauer beschreiben:

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein kommutativer Halbmodul mit* JIV *und $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* \mathbin{\dot{\lesssim}} \mathfrak{M}^{**}$, wo $\mathfrak{M}^*$ denjenigen ordnungsirreduziblen Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}$ bezeichne, der die negativen Elemente von $\mathfrak{M}$ enthält.*

Ist dann $\mathfrak{M}^*$ ein Modul, so gilt $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}^{**} = \mathfrak{M}_2$; in diesem Falle ist $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet.

Ist aber $\mathfrak{M}^*$ kein Modul, so gilt $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2^*$ mit

$$\mathfrak{M}_2^* = \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}^* \cap \mathfrak{M}_2,$$

$$\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2^*,\ \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2^* = \mathfrak{M}_2^*,\ \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2^* \mathbin{\dot{\lesssim}} \mathfrak{M}^{**}.$$

Dabei ist $\mathfrak{M}_2^*$ positiv, aber nicht natürlich geordnet, hat kein Minimum, ist selbst ordnungsirreduzibel und enthält höchstens ein Idempotent, welches dann sein Maximum ist und alle Elemente von $\mathfrak{M}^*$ absorbiert.

BEWEIS. Nach dem Vorangegangenen sind nur noch die letzten Behauptungen über $\mathfrak{M}_2^*$ zu zeigen:

$\mathfrak{M}_2^*$ ist mit $\mathfrak{M}^*$ ordnungsirreduzibel, denn jede Zerlegung $\mathfrak{M}_2^* = \mathfrak{A} \mathbin{\dot{\lesssim}} \mathfrak{B}$ würde eine Zerlegung $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{C} \mathbin{\dot{\lesssim}} \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{A}$ nach sich ziehen. In der Tat: Zunächst ist $\mathfrak{C}$ Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}^*$, da auch jede Summe $m_1 + a$ von Elementen $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ und $a \in \mathfrak{A}$ wegen $m_1 < a$, also $m_1 + a \leqq a + a \in \mathfrak{A}$ wieder in $\mathfrak{C}$ liegt. Ist nun $c \in \mathfrak{C}$ sogar Element von $\mathfrak{A}$, so gilt $c + b = b$ für jedes $b \in \mathfrak{B}$ nach Voraussetzung. Es sei also c Element von $\mathfrak{M}_1$ und zunächst $c \in \mathfrak{P}_1$. Für $a \in \mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{M}_2$ gilt dann $c < a$, also $c + x = a$ mit $x \in \mathfrak{M}_2$ und damit $x \leqq c + x = a$. Also liegt x sogar in $\mathfrak{A}$ und erfüllt $x + b = b$ für jedes $b \in \mathfrak{B}$. Dann gilt aber auch für jedes $b \in \mathfrak{B}$

$$c + b = c + x + b = a + b = b.$$

Ist dagegen $c \in \mathfrak{P}'$, so wählen wir ein Element $p_1 \in \mathfrak{P}_1$. Wegen $c < p_1$ gibt es dann ein $x \in \mathfrak{P}_1$ mit $c + x = p_1$, welches nach obigem $x + b = b$ für jedes $b \in \mathfrak{B}$ erfüllt. Damit folgt ebenfalls für jedes $b \in \mathfrak{B}$

$$c + b = c + x + b = p_1 + b = b.$$

Auf Grund der Irreduzibilität kann dann $\mathfrak{M}_2^*$ höchstens ein Idempotent enthalten.

Jedes solche Idempotent gibt nämlich zu einer Zerlegung von $\mathfrak{M}_2^*$ in die beiden Unterhalbmoduln

$$\mathfrak{A} = \{a\colon a \in \mathfrak{M}_2^*, a \leqq e\}, \quad \mathfrak{B} = \{b\colon b \in \mathfrak{M}_2^*, b > e\}$$

Anlaß. In der Tat handelt es sich dabei um Unterhalbmoduln von $\mathfrak{M}_2^*$; denn aus $a \leqq e, a' \leqq e$ folgt $a+a' \leqq e+e = e$, und aus $b > e$ folgt $b+b' \geqq b > e$ für jedes $b' \in \mathfrak{B}'$ Ferner gibt es zu $e < b$ jedenfalls ein $x \in \mathfrak{M}^*$ mit $e+x = b$, woraus wir

$$e+b = e+e+x = e+x = b$$

erhalten. Für $a \in \mathfrak{A}$ gilt dann wegen $e \leqq a+e \leqq e+e = e$ aber $a+e = e$ und damit auch für jedes $b \in \mathfrak{B}$

$$a+b = a+e+b = e+b = b.$$

Ein in $\mathfrak{M}_2^*$ enthaltenes Idempotent e ist daher Maximum von $\mathfrak{M}_2^*$ (und damit von $\mathfrak{M}^*$). Also absorbiert es jedenfalls alle Elemente von $\mathfrak{M}_2^*$ und $\mathfrak{P}_1$. Aber auch für jedes Element $p' \in \mathfrak{P}'$ folgt (unter Verwendung eines beliebigen Elementes $p_1 \in \mathfrak{P}_1$ mit $p'+x = p_1, x \in \mathfrak{P}_1$)

$$p'+e = p'+x+e = p_1+e = e.$$

Literatur

[1] G. Birkhoff, Lattice theory; 2. Aufl., *New York*, 1948.

[2] A. H. Clifford, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 631–646.

[3] A. H. Clifford, Totally ordered commutative semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958), 305–316.

[4] H. Lugowski, Über die Vervollständigung geordneter Halbringe, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 213–222.

(Eingegangen am 10. Mai 1963.)