Über permutationsinvariante Matrizen

Von ANNA LEE (Budapest)

Einleitung

Die Symmetrieigenschaften der Matrizen wurden in der Literatur — von den symmetrischen Matrizen abgesehen — bis zur letzteren Zeit nur wenig untersucht. Der Grund hierfür läßt sich vielleicht darin finden, daß es oft recht schwierig ist diese allgemeineren Symmetrien geeignet zu formulieren. Obwohl zentrosymmetrische Matrizen in der Literatur schon früher aufgetreten sind, wurde ihre nähere Untersuchung erst dann unternommen, als A. C. AITKEN in seinem Buche [1] diese Matrizen in partitionierter Form aufgeschrieben hat, wodurch die übersichtliche und allgemeine Behandlung dieser Matrizen ermöglicht wurde. Selbst so wurde eine ausführlichere Untersuchung dieser Matrizen erst kürzlich von A. R. COLLAR [2] durchgeführt. Er zeigte, daß die Grundprobleme der quadratischen, zentrosymmetrischen Matrizen auf dieselben Probleme zweier Matrizen niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden können.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß auch Matrizen mit allgemeineren Symmetrieeigenschaft dieselbe Eigenschaft besitzen, und daß die zentrosymmetrischen Matrizen nur einen Spezialfall bilden. Unsere Untersuchungen führten weiterhin zu einer solchen Klasse von Matrizen, die eine noch allgemeinere Symmetrieeigenschaft aufweisen, undzwar sind sie gegenüber gewissen Permutationen der Zeilen und Spalten invariant. Diese Klasse der sogenannten *permutationsinvarianten Matrizen* wird in § 1. besprochen. In den weiteren Paragraphen werden die sogenannten *zentropermutierten Matrizen* behandelt, welche gegenüber speziellen Permutationen der Zeilen und Spalten invariant sind. § 2 enthält einige allgemeine Eigenschaften der zentropermutierten Matrizen. § 3 beschränkt sich auf quadratische *symmetrisch-zentropermutierte Matrizen*, deren Spezialfälle wohlbekannte Matrizen ergeben. Die bei der Untersuchung der Grundprobleme dieser Matrizen erhaltenen Relationen sind analog zu denen, welche A. R. COLLAR in seiner Arbeit [2] bezüglich der quadratischen zentrosymmetrischen Matrizen gefunden hat. Wegen der unterschiedlichen Verhaltens der Matrizen gerader und ungerader Ordnung ist die einheitliche Behandlung nicht durchführbar. Trotzdem besteht zwischen ihnen ein tieferer Zusammenhang. In § 4 wird gezeigt, daß jede symmetrisch-zentropermutierte Matrix ungerader Ordnung „im Wesentlichen" auf eine von gerader Ordnung reduziert werden kann (siehe (18)—(23)).

§ 1. Permutationsinvariante Matrizen

1. Betrachten wir die Matrizen $\mathbf{M}=[m_{jk}]$ über dem komplexen Zahlenkörper K, dessen Elemente gewisse Relationen

$$(1)\qquad \begin{gathered} m_{jk}=m_{\varphi(j,k)\psi(j,k)} \\ j=1,2,\ldots,n \\ k=1,2,\ldots,r \end{gathered}$$

erfüllen, wo $\varphi(j,k)$ und $\psi(j,k)$ für jedes Zahlenpaar (j,k) definierte ganzzahlige Funktionen sind und den Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} 1 \leqq \varphi(j,k) \leqq n \\ 1 \leqq \psi(j,k) \leqq r \end{aligned}\right\} \begin{aligned} j=1,2,\ldots,n \\ k=1,2,\ldots,r \end{aligned}$$

genügen.

Bei spezieller Wahl der Funktionen $\varphi(j,k)$ und $\psi(j,k)$ gelangt man zu wohlbekannten Matrizen. So z. B. ergeben die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(j,k)=k \\ \psi(j,k)=j \end{aligned}\right\} j,k=1,2,\ldots,n$$

die gewöhnlichen *symmetrischen* Matrizen, die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(j,k) &= n+1-k \\ \psi(j,k) &= n+1-j \end{aligned}\right\} j,k=1,2,\ldots,n$$

die auf die Nebendiagonale symmetrischen Matrizen.

2. In einer weiten Klasse der Matrizen sind die Funktionen $\varphi(j,k)$ und $\psi(j,k)$ Permutationen, undzwar $\varphi(j,k)$ eine Permutation der Zeilenindizes, $\psi(j,k)$ eine Permutation der Spaltenindizes:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(j,k)=\tau(j) \\ \psi(j,k)=\sigma(k) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} j=1,2,\ldots,n \\ k=1,2,\ldots,r \end{aligned}$$

— $\tau(j)$ bzw. $\sigma(k)$ bezeichnet hier das Bild des Elementes j bzw. k in der Permutation τ bzw. σ. — In diesem Fall bedeuten die Relationen (1), daß die Matrix $\mathbf{M}$ gegenüber einer gewissen Permutation der Zeilen und Spalten invariant ist, und so diese Relationen in einer einzigen Matrizenrelation

$$(2)\qquad \mathbf{TMS}^*=\mathbf{M}$$

zusammengefaßt werden können. Hier bezeichnet $\mathbf{T}$ bzw. $\mathbf{S}^*$ jene Permutationsmatrix n-ter bzw. r-ter Ordnung, welche der Permutation τ bzw. σ entspricht:

$$\mathbf{T}=[\delta_{i,\tau(j)}] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}^*=[\delta_{\sigma(k),l}],$$

d. h. in der Matrix $\mathbf{M}$ wird die Permutation τ der Zeilen durch linksseitige Multiplizierung mit der Matrix $\mathbf{T}$ durchgeführt.

Definition 1. *Die über dem komplexen Zahlenkörper K definierten Rechtecksmatrizen* $\mathbf{M}$, *welche der Relation* (2) *genügen, werden permutationsinvariante Matrizen — im weiteren PI-Matrizen — genannt.*

Eine einfache Eigenschaft der *PI*-Matrizen besteht darin, daß die Matrizen $\mathbf{TM}$ und $\mathbf{MS}^*$ wieder *PI*-Matrizen sind. Wird nämlich die Relation (2) von links mit der Matrix $\mathbf{T}$ bzw. von rechts mit der Matrix $\mathbf{S}^*$ multipliziert, so erfüllen offensichtlich auch die Matrizen $\mathbf{TM}$ und $\mathbf{MS}^*$ die Relation (2).

Mit Hilfe der Relation (2) kann es leicht gezeigt werden, daß bei festgehaltenem Typ $n \times r$ und bei festgehaltenen Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{S}^*$ die *PI*-Matrizen $\mathbf{M}$ einen Modul bilden, da die Summe und Differenz zweier *PI*-Matrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ wieder *PI*-Matrizen ergeben, d. h.:

$$\mathbf{T}(\mathbf{M}_1 \pm \mathbf{M}_2)\mathbf{S}^* = \mathbf{M}_1 \pm \mathbf{M}_2 .$$

3. Erwähnenswert ist der Spezialfall, wo die *PI*-Matrix quadratisch ist und außerdem

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{T}^*$$

gilt.

Definition 2. *Jene quadratischen PI-Matrizen* $\mathbf{M}$, *welche der Relation*

$$\mathbf{TMT}^* = \mathbf{M} \tag{3}$$

genügen, werden symmetrisch-permutationsinvariante Matrizen — im weiteren SPI-Matrizen — genannt.

Die *SPI*-Matrizen bilden einen *Ring*, da nicht nur die Summe und Differenz, sondern auch das Produkt zweier solcher Matrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ die Relation (3) erfüllen:

$$\mathbf{T}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)\mathbf{T}^* = \mathbf{TM}_1\mathbf{T}^*\mathbf{TM}_2\mathbf{T} = (\mathbf{TM}_1\mathbf{T}^*)(\mathbf{TM}_2\mathbf{T}^*) = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 .$$

Dabei wurde ausgenützt, daß die Permutationsmatrizen orthogonale Matrizen sind, d. h. die Relation

$$\mathbf{TT}^* = \mathbf{E}$$

erfüllen. Daraus ist es ersichtlich, daß diesem Matrizenring — den wir durch $R_n(\mathbf{T})$ bezeichnen — die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ und die Matrix $\mathbf{T}$ angehören: $\mathbf{E}, \mathbf{T} \in R_n(\mathbf{T})$, denn auch diese genügen der Relation (3).

Die Matrix $\mathbf{T}$ spielt in $R_n(\mathbf{T})$ eine ausgezeichnete Rolle. Die Relation (3) kann nämlich auch in der Form

$$\mathbf{TM} = \mathbf{MT}$$

geschrieben werden, und daraus ist es ersichtlich, daß die Matrix $\mathbf{T}$ *mit jeder SPI-Matrix* $\mathbf{M}$ *vertauschbar* ist, also $\mathbf{T}$ ein Zentrumelement von $R_n(\mathbf{T})$ bildet.

Da die Relation (3) eine orthogonale Transformation ist, genügt ihr auch *die Inverse* jeder nichtsingulären *SPI*-Matrix $\mathbf{M}$, d. h. $\mathbf{M}^{-1} \in R_n(\mathbf{T})$.

Damit ist der folgende Satz 1 bewiesen:

Satz 1. *Die SPI-Matrizen n-ter Ordnung* $\mathbf{M}$, *welche durch die Relation*

$$\mathbf{TMT}^* = \mathbf{M}$$

definiert sind, bilden einen Teilring $R_n(\mathbf{T})$ *mit Einselement des vollen Matrizenringes* K_n. [1])

[1]) Der volle Matrizenring K_n besteht aus allen quadratischen Matrizen n-ter Ordnung, deren Elemente aus dem komplexen Zahlenkörper K genommen sind.

Die Matrix $\mathbf{T}$ *liegt im Zentrum von* $R_n(\mathbf{T})$.
Ist $\mathbf{M}(\in R_n(\mathbf{T}))$ *eine nichtsinguläre Matrix, so gehört auch* $\mathbf{M}^{-1}$ *zu* $R_n(\mathbf{T})$.

Ein einfaches Beispiel für die *SPI*-Matrizen bilden die *zyklischen Matrizen* $\mathbf{C}=[c_{jk}]$,

$$c_{jk}=\begin{cases} c_{1,k+1-j} & \text{wenn} \quad j\leqq k \\ c_{1,n+k+1-j} & \text{wenn} \quad j>k. \end{cases}$$

Diese Matrizen $\mathbf{C}$ sind also durch die Elemente der ersten Zeile eindeutig bestimmt, und wie es zu sehen ist, sind sie gegenüber der gleichzeitigen zyklischen Permutation $\omega=(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ der Zeilen und Spalten invariant,

$$\mathbf{\Omega C \Omega}^*=\mathbf{C},$$

wo $\mathbf{\Omega}$ die primitive zyklische Matrix $\mathbf{\Omega}=[\delta_{i,\omega(j)}]$ bezeichnet. (Hier ist δ_{pq} das Kronecker-Symbol.)

§ 2. Zentropermutierte Matrizen

1. Im weiteren werden solche *PI*-Matrizen behandelt, welche gegenüber gewissen gegebenen Permutationen der Zeilen und Spalten invariant sind. Diese Permutationen sollen durch τ bzw. σ bezeichnet werden.

Die spezielle Struktur der Permutationen τ und σ besteht darin, daß sie in fremde Zyklen zerlegt die folgende Form besitzen:

$$\tau=\left(1, \pi(1)+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\left(2, \pi(2)+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\ldots\left(\left[\frac{n}{2}\right], \pi\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$

$$\sigma=\left(1, \varrho(1)+\left[\frac{r+1}{2}\right]\right)\left(2, \varrho(2)+\left[\frac{r+1}{2}\right]\right)\ldots\left(\left[\frac{r}{2}\right], \varrho\left(\left[\frac{r}{2}\right]\right)+\left[\frac{r+1}{2}\right]\right),$$

wo π bzw. ϱ eine beliebige Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, [n/2]$ bzw. der Elemente $1, 2, \ldots, [r/2]$ ist. In Worten: τ bzw. σ vertauscht beliebige solche Zeilen bzw. Spalten, für deren Indizes j bzw. k: $j\leqq[n/2]$ bzw. $k\leqq[r/2]$ gilt, mit solchen Zeilen bzw. Spalten, für deren Indizes p bzw. q: $p\geqq\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ bzw. $q\geqq\left[\frac{r+1}{2}\right]+1$ ist. Deshalb hat die der Permutation τ bzw. σ entsprechende Matrix $\mathbf{T}=[\delta_{i,\tau(j)}]$ bzw. $\mathbf{S}^*=[\delta_{\sigma(k),l}]$ — je nachdem ob n bzw. r gerade oder ungerade ist — die folgende partitionierte Form

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}^* \\ \mathbf{P} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{oder} \quad \mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}^* \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(4)

$$\mathbf{S}^*=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R}^* \\ \mathbf{R} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{oder} \quad \mathbf{S}^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{R}^* \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{R} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wenn $\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{R}$ die der Permutation π bzw. ϱ entsprechende Permutationsmatrix $[n/2]$-ter bzw. $[r/2]$-ter Ordnung bezeichnet.

Es ist zweckmäßig, auch die Matrix $\mathbf{M}$ in partitionierter Form zu betrachten. Dann ist aus der Relation (2) und aus der Struktur (4) der Matrix $\mathbf{T}$ und $\mathbf{S}^*$ ersichtlich, daß die — auf das geometrische Zentrum — symmetrisch liegenden Blöcke der Matrix $\mathbf{M}$, von gewissen Permutationen der Zeilen und Spalten abgesehen, übereinstimmen. Diese Eigenschaft rechtfertigt für diese Matrizen die folgende

Definition 3. *Jene PI-Matrizen* $\mathbf{M}$, *welche der Relation* (2) *mit den Permutationsmatrizen* (4) *genügen, werden zentropermutierte Matrizen — im weiteren ZP-Matrizen — genannt.*

Nun schreiben wir die partitionierte Form der ZP-Matrizen auf. Je nachdem, ob die Anzahl der Zeilen n und der Spalten r gerade oder ungerade ist, treten die folgenden Fälle auf: gerade-gerade, gerade-ungerade, ungerade-gerade, ungerade-ungerade. Dementsprechend können die ZP-Matrizen in der Form

$$(5)\qquad \underset{\text{gerade-gerade}}{\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{BR}^*\\ \mathbf{PB} & \mathbf{PAR}^*\end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{gerade-ungerade}}{\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BR}^*\\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAR}^*\end{bmatrix}}$$

$$\underset{\text{ungerade-gerade}}{\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{BR}^*\\ \mathbf{w}^* & \mathbf{w}^*\mathbf{R}^*\\ \mathbf{PB} & \mathbf{PAR}^*\end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{ungerade-ungerade}}{\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BR}^*\\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{R}^*\\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAR}\end{bmatrix}}$$

aufgeschrieben werden, wo $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beliebige Rechtecksmatrizen vom Typ $[n/2]\times\times[r/2]$ bezeichnen, $\mathbf{w}^*$ eine aus $[r/2]$ Elementen bestehende Zeilenmatrix, $\mathbf{v}$ eine aus $[n/2]$ Elementen bestehende Spaltenmatrix und c eine beliebige Skalare ist. Aus (4) und (5) folgt offensichtlich, daß die ZP-Matrizen (5) die Relation (2) tatsächlich erfüllen.

2. Wie schon in dem vorigen Paragraph gezeigt wurde, bilden die ZP-Matrizen bei festgehaltenem Typ $n\times r$ und festgehaltenen Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{S}^*$ — also hier bei festgehaltenen Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{R}$ einen Modul. Nennen wir diesen Matrizenmodul ZP-Modul und bezeichnen wir ihn mit $M_{n\times r}(\mathbf{P},\mathbf{R})$. Zu verschiedenen Matrizen $\mathbf{P}_1,\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{P}_2,\mathbf{R}_2$ gehören natürlich verschiedene ZP-Moduln $M_{n\times r}(\mathbf{P}_1,\mathbf{R}_1)$ und $M_{n\times r}(\mathbf{P}_2,\mathbf{R}_2)$. Da die ein-eindeutige Zourdnung[2])

$$(6)\qquad \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BR}_1^*\\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{R}_1^*\\ \mathbf{P}_1\mathbf{B} & \mathbf{P}_1\mathbf{v} & \mathbf{P}_1\mathbf{AR}_1^*\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BR}_2^*\\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{R}_2^*\\ \mathbf{P}_2\mathbf{B} & \mathbf{P}_2\mathbf{v} & \mathbf{P}_2\mathbf{AR}_2^*\end{bmatrix}$$

die Homomorphieeigenschaften bezüglich der Summe und Differenz besitzt, bringt sie eine Isomorphie zwischen den ZP-Modul $M_{n\times r}(\mathbf{P}_1,\mathbf{R}_1)$ und $M_{n\times r}(\mathbf{P}_2,\mathbf{R}_2)$ zustande, also

$$M_{n\times r}(\mathbf{P}_1,\mathbf{R}_1)\cong M_{n\times r}(\mathbf{P}_2,\mathbf{R}_2)$$

gilt.

[2]) Die Zuordnung ist nur im ungeraden-ungeraden Fall aufgeschrieben worden, daraus ist aber ersichtlich, wie diese Zuordnung in den anderen drei Fällen sein wird.

Auch hier ist der Spezialfall erwähnenswert, wo die ZP-Matrizen quadratisch sind und außerdem $\mathbf{R}=\mathbf{P}$ gilt, d. h. der Fall der *symmetrisch-zentropermutierten Matrizen* — im weiteren SZP-Matrizen. Wie es aus dem vorigen Paragraphe folgt, bilden die SZP-Matrizen bei festgehaltenen $\mathbf{P}$ einen Ring $R_n(\mathbf{P})$, und so errichtet die Zuordnung (6) in diesem Fall eine Isomorphie zwischen zwei SZP-Matrizenringen. Die SZP-Matrizen werden im nächsten Paragraphe ausführlicher behandelt.

3. Die ZP-Matrizen besitzen eine Eigenschaft, die von praktischer Bedeutung ist, nämlich daß *jede ZP-Matrix $\mathbf{M}$ auf Hyperdiagonalform gebracht werden kann, undzwar mit Hilfe einer Transformation, welche bei festgehaltenem Modul $M_{n\times r}(\mathbf{P},\mathbf{R})$ von den einzelnen Matrizen $\mathbf{M}\in M_{n\times r}(\mathbf{P},\mathbf{R})$ unabhängig ist.* In Formel:

$$\mathbf{UMV}=\langle\mathbf{C},\mathbf{D}\rangle=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\\ 0 & \mathbf{D}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

wo, je nachdem, ob die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der SZP-Matrix $\mathbf{M}$ gerade oder ungerade ist, die Transformationsmatrizen $\mathbf{U}$ bzw. $\mathbf{V}$ die folgende Form besitzen:

$$\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & -\mathbf{P}^*\\ \mathbf{E} & \mathbf{P}^*\end{bmatrix}\quad\text{oder}\quad \mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & 0 & -\mathbf{P}^*\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ \mathbf{E} & 0 & \mathbf{P}^*\end{bmatrix} \tag{8}$$

bzw.

$$\mathbf{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{R} & \mathbf{R}\end{bmatrix}\quad\text{oder}\quad \mathbf{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & 0 & \mathbf{E}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -\mathbf{R} & 0 & \mathbf{R}\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Die Blöcke $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{D}$ in der Hyperdiagonalmatrix $\langle\mathbf{C},\mathbf{D}\rangle$ erhält man aus den Blöcken der Matrix $\mathbf{M}$ auf folgende Weise:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$$

und den vier auftretenden Fällen entsprechend

$\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$	$\mathbf{D}=[\sqrt{2}\,\mathbf{v}\ \mathbf{A}+\mathbf{B}]$	$\mathbf{D}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{2}\,\mathbf{w}^*\\ \hdashline \mathbf{A}+\mathbf{B}\end{array}\right]$	$\mathbf{D}=\left[\begin{array}{c:c}c & \sqrt{2}\,\mathbf{w}^*\\ \hdashline \sqrt{2}\,\mathbf{v} & \mathbf{A}+\mathbf{B}\end{array}\right].$
gerade-gerade	gerade-ungerade	ungerade-gerade	ungerade-ungerade

Aus (8) und (9) ist es ersichtlich, daß die Transformationsmatrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ tatsächlich von den Elementen der Matrix $\mathbf{M}$ unabhängig sind, und deshalb die „Diagonalisierung" (7) auch dann gültig ist, wenn die Elemente der Matrix $\mathbf{M}$ Funktionen und nicht Konstanten sind, oder wenn mehrere ZP-Matrizen von derselben Struktur gleichzeitig in Hyperdiagonalform überführt werden sollen.

4. Die soeben erwähnte Eigenschaft der ZP-Matrizen findet in der folgenden Aufgabe eine Anwendung. Es sei ein lineares Differentialgleichungssystem k-ter Ordnung in der vektoriellen Form

$$\sum_{i=0}^{k}\mathbf{M}_i(t)\mathbf{x}^{(i)}(t)+\mathbf{f}(t)=0 \tag{10}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}^{(i)}(t_0)=\mathbf{x}_0^{(i)} \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

gegeben. Der Vektor $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ wird aus der i-ten Ableitungen der gesuchten unbekannten Funktionen gebildet, der Vektor $\mathbf{f}(t)$ aus den gegebenen Funktionen. Falls die Koeffizientenmatrizen $\mathbf{M}_i(t)$ vom Typ $n\times r$, ZP-Matrizen von derselben Struktur sind, so können diese alle nach den vorher gesagten, mit ein und derselben Transformation gleichzeitig diagonalisiert werden. Nach Multiplikation des Differentialgleichungssystems (10) von links mit der Matrix $\mathbf{U}$, kann es nämlich in der Form

$$\sum_{i=0}^{k} \mathbf{U}\mathbf{M}_i(t)\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}^{(i)}(t)+\mathbf{U}\mathbf{f}(t) = 0$$

geschrieben werden. Führt man nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathbf{y}^{(i)}(t)=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}^{(i)}(t) \qquad i=0,1,\ldots,k$$

$$\mathbf{y}^{(i)}(t_0)=\mathbf{y}_0^{(i)}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}^{(i)}(t_0) \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

$$\mathbf{g}(t)=\mathbf{U}\mathbf{f}(t),$$

so erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem für die neue unbekannte Funktion $\mathbf{y}(t)$

$$\sum_{i=0}^{k} \langle \mathbf{C}_i(t), \mathbf{D}_i(t)\rangle \mathbf{y}^{(i)}(t)+\mathbf{g}(t)=0 \tag{11}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{y}^{(i)}(t_0)=\mathbf{y}_0^{(i)} \qquad i=0,1,\ldots,k-1.$$

Die Koeffizientenmatrizen $\langle \mathbf{C}_i(t), \mathbf{D}_i(t)\rangle$ des Differentialgleichungssystems (11) haben eine Hyperdiagonalform, so daß *dieses System in zwei, von einander unabhängige Systeme zerfällt.*

§ 3. Symmetrisch-zentropermutierte Matrizen

1. Als eine weitere Spezialisierung der ZP-Matrizen erhält man die schon erwähnten *symmetrisch-zentropermutierten Matrizen* — die SZP-Matrizen — d. h. solche quadratische ZP-Matrizen, bei welchen $\mathbf{R}=\mathbf{P}$ gilt. Je nachdem, ob diese von gerader oder ungerader Ordnung sind, besitzen sie die Form

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{P}^* \\ \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^* \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{B}\mathbf{P}^* \\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{P}^* \\ \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{P}\mathbf{v} & \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^* \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Wie schon im vorigen Paragraphe darauf hingewiesen wurde, bilden die SZP-Matrizen (12) bei festgehaltener Matrix $\mathbf{P}$ einen Teilring $R_n(\mathbf{P})$ des vollen Matrizenrings K_n, und die ein-eindeutige Zuordnung (6) stellt eine Isomorphie zwischen zwei SZP-Ringen dar, d. h.

$$R_n(\mathbf{P}_1)\cong R_n(\mathbf{P}_2).$$

Durch spezielle Matrizen **P** erhält man spezielle, wohlbekannte *SZP*-Matrizen. Der einfachste Fall ergibt sich, wenn $\mathbf{P}=\mathbf{E}$ gilt. Es handelt sich hier um die Matrizen

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{B}\\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\\ \mathbf{B} & \mathbf{v} & \mathbf{A}\end{bmatrix},$$

welche im Fall gerader Ordnung die *zyklischen Hypermatrizen zweiter Ordnung*, sind, die z. B. auch bei B. FRIEDMAN [3] vorkommen.

Einen anderen Spezielfall der *SZP*-Matrizen erhält man von jener Permutationsmatrix ausgehend, in welcher die Einselemente in der Nebendiagonalen stehen. Bezeichnen wir diese Permutationsmatrix mit **I**, also

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} & & & & 1\\ & & & 1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}.$$

Die durch $\mathbf{P}=\mathbf{I}$ bestimmten *SZP*-Matrizen sind eben die *zentrosymmetrischen Matrizen*. Die Definition und erste Untersuchung dieser ist mit dem Namen von A. C. AITKEN [1] verbunden. Eine ausführliche Untersuchung dieser Matrizen ist aber nur neuerer Zeit von H. COLLAR [2] durchgeführt worden. *Doppelt symmetrische Matrizen* — d. h. auf beide Diagonalen symmetrische Matrizen —, welche spezielle zentrosymmetrische Matrizen sind, sind in der Literatur schon früher aufgetreten (z. B. bei I. FRÖHLICH [4] im Jahre 1892).

2. Die Diagonalisierung (7) ist im Fall der *SZP*-Matrizen eine orthogonale Transformation, welche wir jetzt in der Form

$$\mathbf{M}=\mathbf{U}^*\langle\mathbf{C},\mathbf{D}\rangle\mathbf{U} \tag{13}$$

schreiben, wo **U** und die Blöcke **C**, **D** — entsprechend dem Fall der *SZP*-Matrizen **M** gerader bzw. ungerader Ordnung — die folgenden Matrizen bezeichnen:

$$\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & -\mathbf{P}^*\\ \mathbf{E} & \mathbf{P}^*\end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & 0 & -\mathbf{P}^*\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ \mathbf{E} & 0 & \mathbf{P}^*\end{bmatrix}, \tag{14}$$

und

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B},\\ &\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{B}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D}=\left[\begin{array}{c|c} c & \sqrt{2}\,\mathbf{w}^*\\ \hline \sqrt{2}\,\mathbf{v} & \mathbf{A}+\mathbf{B}\end{array}\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Die von den einzelnen Matrizen **M** unabhängige orthogonale Transformation (13) ordnet jeder Matrix $\mathbf{M}\in R_n(\mathbf{P})$ ein-eindeutig eine Matrix $\langle\mathbf{C},\mathbf{D}\rangle\in K_{\left[\frac{n}{2}\right]}\oplus K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$

zu[3]). Es ist offensichtlich, daß diese Zuordnung die Homomorphieeigenschaft bezüglich der Summe, Differenz und Multiplikation besitzt, und so eine Isomorphie zwischen den zwei Matrizenringen

$$R_n(\mathbf{P}) \cong K_{\left[\frac{n}{2}\right]} \oplus K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

besteht.

Diese Isomorphie ist deshalb von großer Bedeutung, weil aus der Zerlegung (13) folgt, daß *die Grundprobleme der SZP-Matrizen* (die Bestimmung der Determinanten, das Eigenwert und Eigenvektorproblem, die Invertierung) *auf dieselben Probleme zweier Matrizen niedrigerer Ordnung* — undzwar der Matrix $\mathbf{C}$ $[n/2]$-ter Ordnung und der Matrix $\mathbf{D}$ $\left[\frac{n+1}{2}\right]$-ter Ordnung — *zurückgeführt werden können.* So, daß aus der Relation (13) unmittelbar die folgenden Sätze folgen:

Satz 2. *Die Determinante einer SZP-Matrix zerfällt in das Produkt zweier Determinanten, undzwar*

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{C}|\,|\mathbf{D}|,$$

wo $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{D}$ *die Matrizen* (15) *bezeichnen.*

Da die charakteristische Matrix einer *SZP*-Matrix $\mathbf{M}$ wieder eine *SZP*-Matrix ist, gilt Satz 2. auch für die charakteristische Determinante $|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}|$, und so ergibt sich bezüglich der Eigenwerte der SZP-Matrizen der folgende.

Satz 3. *Die Eigenwerte einer SZP-Matrix n-ter Ordnung bestehen aus den Eigenwerten* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, [n/2])$ *der Matrix* $\mathbf{C}$ *und aus dem Eigenwerten* μ_k $\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ *der matrix* $\mathbf{D}$, *wo* $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{D}$ *die Matrizen* (15) *sind.*

Bemerkung. Die Bestimmung der Eigenvektoren einer quadratischen Matrix erfordert die Lösung homogen linearer Gleichungssysteme mit singulären Koeffizientenmatrizen. Gilt nun zwischen den singulären quadratischen Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\tilde{\mathbf{Q}}$ die Relation

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{W} \quad |\mathbf{Z}| \neq 0, \quad |\mathbf{W}| \neq 0$$

und ist $\mathbf{y}_0$ eine Lösung des homogen linearen Gleichungssystems

$$\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{y} = 0$$

bekannt, dann ergibt

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}_0$$

eine Lösung des homogen linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} = 0.$$

[3]) $K_{\left[\frac{n}{2}\right]} \oplus K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ bezeichnet jenen Teilring des vollen Matrizenringes K_n, der gleich der direkten Summe der vollen Matrizenringe $K_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ und $K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ ist.

Es sei nun $\mathbf{Q} = \mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}$, die charakteristische Matrix einer *SZP*-Matrix, wo λ ein Eigenwert von $\mathbf{M}$ ist, dann ergibt sich auf Grund von (13)—(15) und der vorigen Bemerkung der

Satz 4. *Ist* $\mathbf{t}_i$ *ein zum Eigenwert* λ_i *gehöriger Eigenvektor der Matrix* $\mathbf{C}(=\mathbf{A}-\mathbf{B})$ *bzw.* $\mathbf{u}_k$ *ein zum Eigenwert* μ_k *gehöriger Eigenvektor der Matrix* $\mathbf{D}(=\mathbf{A}+\mathbf{B})$, *dann ergibt*

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i \\ -\mathbf{P}\mathbf{t}_i \end{bmatrix} \quad bzw. \quad \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_k \end{bmatrix} \tag{16}$$

einen zum Eigenwert λ_i *bzw.* μ_k *gehörigen Eigenvektor der SZP-Matrix* $\mathbf{M}$ *gerader Ordnung.*

Ist $\mathbf{t}_i$ *ein zum Eigenwert* λ_i *gehöriger Eigenvektor der Matrix* $\mathbf{C}(=\mathbf{A}=\mathbf{B})$ *bzw.* $\begin{bmatrix} z_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}$ *ein zum Eigenwert* μ_k *gehöriger Eigenvektor der Matrix* $\mathbf{D}\left(=\left[\begin{array}{c|c} c & \sqrt{2}\,\mathbf{w}^* \\ \hline \sqrt{2}\,\mathbf{v} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{array}\right]\right)$, *dann ergibt*

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i \\ 0 \\ -\mathbf{P}\mathbf{t}_i \end{bmatrix} \quad bzw. \quad \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ z_k \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_k \end{bmatrix} \tag{17}$$

einen zum Eigenwert λ_i *bzw.* μ_k *gehörigen Eigenvektor der SZP-Matrix* $\mathbf{M}$ *ungerader Ordnung.*

Satz 4. enthält nur Behauptungen über die Struktur der Eigenvektoren der *SZP*-Matrizen, sagt jedoch nichts über die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren aus. Aus der Struktur (16) bzw. (17) ist es offensichtlich, daß jeder Eigenvektor $\mathbf{x}_i$ von allen Eigenvektoren $\mathbf{y}_k$ und ebenso jeder Eigenvektor $\mathbf{y}_k$ von allen Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ linear unabhängig ist, — selbst im Fall, wenn für irgendwelche Indizes i und k $\lambda_i = \mu_k$ gilt.

Auf Grund der soeben Gesagten gilt der folgende

Satz 5. *Eine SZP-Matrix* $\mathbf{M}$ *n-ter Ordnung ist genau dann eine Matrix einfacher Struktur*[4]), *wenn beide der Matrizen* $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{D}$ *von einfacher Struktur sind.*

Aus der orthogonalen Transformation (13) ist es ersichtlich, daß eine *SZP*-Matrix genau dann regulär ist, wenn in der Hyperdiagonalmatrix $\langle \mathbf{C}, \mathbf{D} \rangle$ beide Blöcke $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ regulär sind. Auf Grund der Relation (13) erhält man die Blöcke der inversen Matrix einer *SZP*-Matrix gerader Ordnung auf einfache Weise aus $\mathbf{C}^{-1}$ und $\mathbf{D}^{-1}$. Es besteht nämlich der

Satz 6. *Die Blöcke der Inversen einer SZP-Matrix können mit Hilfe der Summe und differenz der Matrizen* $\mathbf{C}^{-1} = [\mathbf{A}-\mathbf{B}]^{-1}$ *und* $\mathbf{D}^{-1} = [\mathbf{A}+\mathbf{B}]^{-1}$ *aufgeschrieben werden undzwar*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{P}^* \\ \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^* \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}^{-1} & -(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{D}^{-1})\mathbf{P}^* \\ -\mathbf{P}(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{D}^{-1}) & \mathbf{P}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}^{-1})\mathbf{P}^* \end{bmatrix}.$$

[4]) Siehe z. B. [5].

Wenn man dagegen die Blöcke der Inversen einer *SZP*-Matrix ungerader Ordnung aufschreiben will, ergeben sich Schwierigkeiten, da die Matrizen $\mathbf{C}^{-1}$ und $\mathbf{D}^{-1}$ von verschiedener Ordnung sind, d. h. die Hypermatrix $\langle \mathbf{C}^{-1}, \mathbf{D}^{-1} \rangle$ ist nicht geeignet partitioniert. Deshalb können die fraglichen Blöcke nur dann aufgeschrieben werden, wenn *die partitionierte Form der Matrix* $\mathbf{D}^{-1}$ *bekannt ist.* Es ist also ersichtlich, daß einige Aufgaben bezüglich *SZP*-Matrizen ungerader Ordnung leichter zu behandeln sind, wenn die Matrix mit Hilfe einer geeigneten Transformation in eine solche Hyperdiagonalmatrix $\langle \mathbf{G}, a, \mathbf{H} \rangle$ überführt werden kann, wo die Blöcke $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ Matrizen $[n/2]$-ter Ordnung und a eine Skalare sind. In dem nächsten Paragraph wird es gezeigt, daß dies durch eine äquivalente Transformation immer erreicht werden kann.

§ 4. *SZP*-Matrizen ungerader Ordnung

1. Aus der partitionierten Form (12) der *SZP*-Matrizen $\mathbf{M}$ ist es ersichtlich, daß die Matrizen gerader und ungerader Ordnung eine ziemlich unterschiedliche Struktur besitzen. Die Matrix gerader Ordnung hat — abgesehen von gewissen Permutationen — eine zyklische Struktur. Im Fall ungerader Ordnung ist jedoch diese „gute" Struktur durch eine „eingeschobene" Zeile und Spalte gestört, welche verursachen, daß — wie es aus der Transformation (13) zu sehen ist — $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ von verschiedener Ordnung sind; die verschiedene Ordnungszahl macht bei der Behandlung einiger Probleme Schwierigkeiten.

Diese Schwierigkeiten treten bei der speziellen *SZP*-Matrix ungerader Ordnung

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{BP}^* \\ 0 & c & 0 \\ \mathbf{PB} & 0 & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} \tag{18}$$

nicht auf. *Diese Matrix* $\mathbf{M}_0$ *unterscheidet sich im Wesentlichen garnicht von einer SZP-Matrix gerader Ordnung*, da die orthogonale Transformation (13) für diese gleich

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{BP}^* \\ 0 & c & 0 \\ \mathbf{PB} & 0 & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & \mathbf{E} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\mathbf{P} & 0 & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & -\mathbf{P}^* \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \mathbf{E} & 0 & \mathbf{P}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

ist und hier in der Hyperdiagonalmatrix ebenso die Blöcke $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ auftreten, wie bei der Diagonalisierung der *SZP*-Matrizen gerader Ordnung.

Nun wird gezeigt, daß jede *SZP*-Matrix ungerader Ordnung mit einer *SZP*-Matrix $\mathbf{M}_0$ äquivalent [5]) ist.

---

[5]) Siehe [6].

Im Fall $c \neq 0$ ist diese äquivalente Transformation

$$(20) \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BP}^* \\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{P}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \frac{\mathbf{v}}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{Pv}}{c} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \frac{\mathbf{vw}^*}{c} & 0 & \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{vw}^*}{c}\right)\mathbf{P}^* \\ 0 & c & 0 \\ \mathbf{P}\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{vw}^*}{c}\right) & 0 & \mathbf{P}\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{vw}^*}{c}\right)\mathbf{P}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & -\mathbf{P}^* \\ \frac{\mathbf{w}^*}{c} & 1 & \frac{\mathbf{w}^*\mathbf{P}^*}{c} \\ 0 & 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Also ist die Matrix $\mathbf{M}$ mit einer solchen Matrix $\mathbf{M}_0$ äquivalent, in welcher die Blöcke $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit derselben Dyade modifiziert sind. So bleibt die Differenz dieser Blöcke auch hier $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, in der Summe tritt jedoch die Modifizierung doppelt auf. Wird in (20) auch die Diagonalisierung (19) durchgehfürt:

$$(21) \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BP}^* \\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{P}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \sqrt{2}\frac{\mathbf{v}}{c} & \mathbf{E} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\mathbf{P} & \sqrt{2}\frac{\mathbf{Pv}}{c} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}+\mathbf{B}-\frac{2\mathbf{vw}^*}{c} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & -\mathbf{P}^* \\ \sqrt{2}\frac{\mathbf{w}^*}{c} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\frac{\mathbf{w}^*\mathbf{P}^*}{c} \\ \mathbf{E} & 0 & \mathbf{P}^* \end{bmatrix}$$

so steht $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ unverändert in der Hyperdiagonalmatrix, statt $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ tritt aber $\mathbf{A}+\mathbf{B}-\frac{2\mathbf{vw}^*}{c}$ auf.

Der Fall $c=0$ kann mit einer einseitigen äquivalenten Transformation auf den vorigen Fall zurückgeführt werden, undzwar

$$(22) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BP}^* \\ \mathbf{w}^* & 0 & \mathbf{wP}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & 0 \\ -\mathbf{e}^j & 0 & -\mathbf{e}^j\mathbf{P}^* \\ 0 & 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BP}^* \\ \hat{\mathbf{w}}^* & 2v_j & \hat{\mathbf{w}}^*\mathbf{P}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix},$$

wenn für irgendwelchern Index j $v_j \neq 0$, oder

$$(23) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BP}^* \\ \mathbf{w}^* & 0 & \mathbf{wP}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \hat{\mathbf{v}} & \mathbf{BP}^* \\ \mathbf{w}^* & 2w_k & \mathbf{w}^*\mathbf{P}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{P}\hat{\mathbf{v}} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{e}_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{Pe}_k & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

wenn für irgendwelchen Index k $w_k \neq 0$ sind, wo

$$\hat{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w}^* + \mathbf{a}^j + \mathbf{b}^j$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k .$$

$\mathbf{a}^j$ bzw. $\mathbf{b}^j$ bezeichnet den j-ten Zeilenvektor, $\mathbf{a}_k$ bzw. $\mathbf{b}_k$ den k-ten Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$; $\mathbf{e}^j$ bzw. $\mathbf{e}_k$ sind Einheitsvektoren, in welchen das j-te bzw. das k-te Element gleich Eins, die andere Elemente gleich Null sind.)

2. Da in den Relationen (21)—(23) die Transformationsmatrizen unimodulär sind, kann auf Grund dieser Relationen die Determinante einer *SZP*-Matrix ungerader Ordnung in das Produkt zweier Determinanten $[n/2]$-ter Ordnung und einer Skalaren zerlegt werden.

Aus den Relationen (21)—(23) ist es auch ersichtlich, daß zu der Invertierung einer *SZP*-Matrix ungerader Ordnung zwei Matrizen $[n/2]$-ter Ordnung und eine Skalare zu invertieren sind. Die langwierigen Berechnungen lassen wir weg, und geben die partitionierte Form der inversen Matrix $\mathbf{M}^{-1}$ nur für den Fall $c \neq 0$ an:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{v} & \mathbf{BP}^* \\ \mathbf{w}^* & c & \mathbf{w}^*\mathbf{P}^* \\ \mathbf{PB} & \mathbf{Pv} & \mathbf{PAP}^* \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}+\mathbf{Y} & -\mathbf{Y}\frac{2\mathbf{v}}{c} & -(\mathbf{X}-\mathbf{Y})\mathbf{P}^* \\ -\frac{2\mathbf{w}^*}{c}\mathbf{Y} & \frac{2}{c} + \frac{2\mathbf{w}^*}{c}\mathbf{Y}\frac{2\mathbf{v}}{c} & -\frac{2\mathbf{w}^*}{c}\mathbf{YP}^* \\ -\mathbf{P}(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) & -\mathbf{PY}\frac{2\mathbf{v}}{c} & \mathbf{P}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})\mathbf{P}^* \end{bmatrix},$$

wo

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}-\mathbf{B})^{-1}$$

$$\mathbf{Y} = \left(\mathbf{A}+\mathbf{B} - \frac{2\mathbf{vw}^*}{c}\right)^{-1}.$$

Im Fall $c=0$ ergibt sich eine ähnliche, etwas kompliziertere Formel.

Nach Satz 3 können einige Eigenvektoren der *SZP*-Matrix $\mathbf{M}$ ungerader Ordnung — undzwar jene, welche zu den Eigenwerten λ_i gehören — mit Hilfe von $[n/2]$ Elemente enthaltenden Vektoren bestimmt werden. Die zu den Eigenwerten μ_k gehörigen Eigenvektoren werden aber aus $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ Elemente enthaltenden Vektoren aufgebaut. Nun wird gezeigt, daß auch diese Eigenvektoren mit Hilfe von solchen Vektoren erhalten werden können, die aus $[n/2]$ Elementen bestehen. Gleichzeitig wird auch gezeigt, wie das mittlere Element eines solchen Eigenvektors — welches im vorigen Paragraphe durch z_k bezeichnet wurde — von dem Eigenwert μ_k und von der Lösung $\mathbf{u}_k$ eines homogen linearen Gleichungssystems abhängt.

Die Relationen (21)—(23) sind auch für die charakteristische Matrix einer *SZP*-Matrix gültig, wenn nur in diesen Relationen statt $\mathbf{A}$ überall $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ und statt c überall $c-\lambda$ geschrieben wird. Deshalb folgt aus der Relation (21), daß für je einem Eigenwert $\mu_k \neq c$ die Matrix $[n/2]$-ter Ordnung

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}-\frac{2\mathbf{v}\mathbf{w}^*}{c-\mu_k}-\mu_k\mathbf{E}$$

singulär ist. Es sei nun $\mathbf{u}_k$ eine Lösung des homogen linearen Gleichungssystems

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\frac{2\mathbf{v}\mathbf{w}^*}{c-\mu_k}-\mu_k\mathbf{E}\right)\mathbf{u}=0,$$

dann ist auf Grund der Bemerkung des vorigen Paragraphes

$$\mathbf{Y}_k=\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & \mathbf{E} \\ 0 & \sqrt{2} & -\dfrac{2\mathbf{w}^*}{c-\mu_k} \\ -\mathbf{P} & 0 & \mathbf{P} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ -\dfrac{2\mathbf{w}^*\mathbf{u}_k}{c-\mu_k} \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_k \end{bmatrix} \tag{24}$$

ein zum Eigenwert $\mu_k \neq c$ gehöriger Eigenvektor der *SZP*-Matrix $\mathbf{M}$ ungerader Ordnung. Vergleicht man Formeln (17) und (24), ergibt sich für das mittlere Element in diesem Fall

$$z_k=-\frac{2\mathbf{w}^*\mathbf{u}_k}{c-\mu_k}.$$

Die zum Eigenwert $\mu_k=c$ gehörigen Eigenvektoren können ganz ähnlich bestimmt werden. Da in diesem Fall $c-\mu_k=0$ gilt, ist es nötig, für die charakteristische Matrix die Faktorisation (22) oder (23) zu betrachten. Im Fall $\mathbf{w}^*=0$, aber $\mathbf{v}\neq 0$ $(v_j \neq 0)$ kommt die Faktorisation (22) in Betracht. Aus Relationen (21) und (22) ist ersichtlich, daß jetzt die Matrix

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}\hat{\mathbf{w}}^*}{v_j}-c\mathbf{E} \qquad (\hat{\mathbf{w}}^*=\mathbf{w}^*+\mathbf{a}^j+\mathbf{b}^j-c\mathbf{e}^j)$$

singulär ist. Es sei nun $\mathbf{u}_c$ eine Lösung des homogen linearen Gleichungssystems

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}\hat{\mathbf{w}}^*}{v_j}-c\mathbf{E}\right)\mathbf{u}=0,$$

dann ist, auf Grund der soeben bewiesenen Relation (24)

$$\mathbf{y}_c=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ -\dfrac{\hat{\mathbf{w}}^*\mathbf{u}_c}{v_j} \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_c \end{bmatrix} \qquad (\hat{\mathbf{w}}^*=\mathbf{w}^*+\mathbf{a}^j+\mathbf{b}^j-c\mathbf{e}^j)$$

ein zum Eigenwert $\mu_k = c$ gehöriger Eigenvektor der *SZP*-Matrix $\mathbf{M}$ ungerader Ordnung. In diesem Fall ergibt sich für das mittlere Element

$$z_c = -\frac{\hat{\mathbf{w}}^* \mathbf{u}_c}{v_j} \qquad (\hat{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w}^* + \mathbf{a}^j + \mathbf{b}^j - c\mathbf{e}^j).$$

Im Fall $\mathbf{w}^* \neq 0$ $(w_k \neq 0)$ wird zur Bestimmung des zum Eigenwert $\mu_k = c$ gehörigen Eigenvektors (23) benötigt. In diesem Fall ist die Matrix

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \frac{\hat{\mathbf{v}}\mathbf{w}^*}{w_k} - c\mathbf{E} \qquad (\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k - c\mathbf{e}_k)$$

singulär, und wenn $\mathbf{u}_c$ eine Lösung des homogen linearen Gleichungssystems

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \frac{\hat{\mathbf{v}}\mathbf{w}^*}{w_k} - c\mathbf{E}\right)\mathbf{u} = 0 \qquad (\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k - c\mathbf{e}_k)$$

ist, dann erhält man den zum Eigenwert $\mu_k = c$ gehörigen Eigenvektor der *SZP*-Matrix ungerader Ordnung, durch Anwendung der Faktorisation (23) und der Relation (24). So ergibt sich für den zum Eigenwert $\mu_k = c$ gehörigen Eigenvektor der *SZP*-Matrix ungerader Ordnung:

$$\mathbf{y}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{e}_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}\mathbf{e}_k & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ -\dfrac{\mathbf{w}^*\mathbf{u}_c}{w_k} \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{E} - \dfrac{\mathbf{e}_k\mathbf{w}^*}{w_k}\right)\mathbf{u}_c \\ -\dfrac{\mathbf{w}^*\mathbf{u}_c}{w_k} \\ \mathbf{P}\left(\mathbf{E} - \dfrac{\mathbf{e}_k\mathbf{w}^*}{w_k}\right)\mathbf{u}_c \end{bmatrix}.$$

Somit wurden alle auftretenden Fälle besprochen.

Literatur

[1] A. C. Aitken, Determinants and matrices, *Edinburgh*, 1956.
[2] A. R. Collar, On centrosymmetric and centroskew matrices, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **15** (1962), 265–282.
[3] B. Friedman, Eigenvalues of compound-matrices, *New York Univ., Math. Research Group, Research rept.* No. TW-16 (1961).
[4] I. Fröhlich, A Laplace-egyenlet egy tulajdonságáról. *Math. és Phys. Lapok* **1** (1892) 351–353.
[5] F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung, I. Band. *Berlin*, 1959.
[6] M. Marcus, Basic theorems in matrix theory, *Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser.* **57** (1960) 5.

(Eingegangen am 10. Juni 1963.)