Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung"

Von A. MOÓR (Szeged)

§ 1. Allgemeine rekurrente kovariante Ableitung

In unserer Arbeit „Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung"[1]) konstruierten wir im § 4 solche symmetrische Übertragungsparameter $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ für die die kovariante Ableitung eines vorgegebenen n-dimensionalen in α, β symmetrischen kovarianten Tensorfeldes $T_{\alpha\beta}(x)$ von zweiter Stufe rekurrent ist, d. h.:

$$\nabla_{\nu} T_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \partial_{\nu} T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{\varrho\beta} - \Gamma_{\beta}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{\alpha\varrho} = k_{\nu} T_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

k_{ν} bedeutet in der Formel (1) ein vorgegebenes kovariantes Vektorfeld. Die Formel von $\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\nu}$ ist:

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\nu} = \tfrac{1}{2} T^{\varrho\gamma}(\partial_{\nu} T_{\alpha\varrho} + \partial_{\alpha} T_{\varrho\nu} - \partial_{\varrho} T_{\nu\alpha}) - \tfrac{1}{2}(k_{\nu}\delta^{\gamma}_{\alpha} + k_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\nu} - k_{\varrho} T^{\varrho\gamma} T_{\nu\alpha}), \tag{2}$$

wo $T^{\varrho\gamma}$ einen symmetrischen Tensor bedeutet, der durch die Formeln

$$T_{\alpha\varrho} T^{\gamma\varrho} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$$

definiert ist.

Bedingen wir jetzt, daß das Vektorfeld $T_{\alpha\beta}$ beliebig ist, so ist schon das Gleichungssystem (1) für die $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ im allgemeinen nicht lösbar, da man in diesem Falle n^3 Gleichungen mit $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ unbekannten $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ hat. Es entsteht aber die Frage, was für eine Form die allgemeinen Übertragungsparameter $L_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ haben müssen, damit das Tensorfeld $T_{\alpha\beta}$ bezüglich der durch $L_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ bestimmten kovarianten Ableitung eine rekurrente kovariante Ableitung habe, d. h.:

$$\nabla_{\nu} T_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \partial_{\nu} T_{\alpha\beta} - L_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{\varrho\beta} - L_{\beta}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{\alpha\varrho}, \tag{3}$$

$$\nabla_{\nu} T_{\alpha\beta} = k_{\nu} T_{\alpha\beta} \tag{4}$$

gültig seien. Die Formel (4) ist nach (3) mit

$$L_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{\varrho\beta} + L_{\beta}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{\alpha\varrho} = \partial_{\nu} T_{\alpha\beta} - k_{\nu} T_{\alpha\beta} \tag{5}$$

gleichwertig. (5), bzw. (4) ist nun für die $L_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\nu}$ ein Gleichungssystem mit n^3 Gleichungen und ebensoviel Unbekannten.

---

[1]) *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 81—93.

Wir können (4) in der Form:

(6a) $$\nabla_\nu T_{(\alpha\beta)} = k_\nu T_{(\alpha\beta)}$$ (6b) $$\nabla_\nu T_{[\alpha\beta]} = k_\nu T_{[\alpha\beta]}$$

schreiben[2]), und mit den Bezeichnungen:

(7) $$\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \overset{\text{def}}{=} L_{(\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma)}, \qquad S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \overset{\text{def}}{=} L_{[\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma]}$$

können in dem Gleichungssystem (6a), (6b) die $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ und $S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ für unbekannte Größen betrachtet werden. Die zu bestimmenden Übertragungsparameter sind dann durch

(8) $$L_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \equiv \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} + S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$$

festgelegt.

Durch zyklische Permutation der Indizes α, β, γ bekommt man aus (6a) bzw. (6b) zwei weitere Gleichungen. Addiert man die ersten beide, subtrahiert man die dritte, beachtet man ferner die Symmetrie, bzw. die Schiefsymmetrie von $T_{(\alpha\beta)}$ bzw. $T_{[\alpha\beta]}$, so wird auf Grund der Relationen (8):

(9a) $$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{(\varrho\beta)} = {} & \tfrac{1}{2}(\partial_\nu T_{(\alpha\beta)} + \partial_\alpha T_{(\beta\nu)} - \partial_\beta T_{(\nu\alpha)}) - \tfrac{1}{2}(k_\nu T_{(\alpha\beta)} + k_\alpha T_{(\beta\nu)} - k_\beta T_{(\nu\alpha)}) + \\ & + S_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{(\varrho\nu)} + S_{\nu}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{(\varrho\alpha)},\end{aligned}$$

bzw.

(9b) $$\begin{aligned}S_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\nu} T_{[\varrho\beta]} = {} & \tfrac{1}{2}(\partial_\nu T_{[\alpha\beta]} + \partial_\alpha T_{[\beta\nu]} - \partial_\beta T_{[\nu\alpha]}) - \tfrac{1}{2}(k_\nu T_{[\alpha\beta]} + k_\alpha T_{[\beta\nu]} - k_\beta T_{[\nu\alpha]}) - \\ & - \Gamma_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{[\varrho\nu]} + \Gamma_{\nu}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{[\varrho\alpha]}.\end{aligned}$$

Wir werden noch die Existenz des inversen Tensors von $T_{(\alpha\beta)}$ bzw. $T_{[\alpha\beta]}$ bedingen, d. h. die Lösbarkeit der Gleichungen

$$T_{(\alpha\varrho)} Q^{\beta\varrho} = \delta^\beta_\alpha, \quad \text{bzw.} \quad T_{[\alpha\sigma]} Q^{*\beta\sigma} = \delta^\beta_\alpha$$

voraussetzen; dann bekommt man aus (9a), bzw. (9b) nach einer Überschiebung mit $Q^{\gamma\beta}$ bzw. $Q^{*\gamma\beta}$, $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ ausgedrückt mit $S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$, bzw. $S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ ausgedrückt mit $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$.

Für die vollständige Bestimmung von $L_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ können wir so (9a), wie (9b) benützen. Substituiert man z. B. $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ aus (9a) in die Formel (8), so ist (6a) identisch erfüllt, d. h. $S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ kann noch beliebig gewählt werden. (6b) ist aber keine Identität und gibt $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ Gleichungen für die unbekannten $S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$. Bestimmt man aber $S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ durch (9b), so wird (6b) unter Benützung der Übertragungsparameter (8) für beliebige $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ identisch erfüllt. Die Formeln (6a) bestimmen dann für die unbekannten $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Gleichungen.

Aus (9a), bzw. (9b) erhält man nach einer Überschiebung mit $Q^{\gamma\beta}$, bzw. mit $Q^{*\gamma\beta}$:

(10a) $$\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\nu} = \tfrac{1}{2} Q^{\gamma\beta} \{\partial_\nu T_{(\alpha\beta)} - k_\nu T_{(\alpha\beta)}\}_{\alpha\beta\nu} - Q^{\gamma\beta}(S_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{(\varrho\nu)} + S_{\nu}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{(\varrho\alpha)}),$$

(10b) $$S_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\nu} = \tfrac{1}{2} Q^{*\gamma\beta} \{\partial_\nu T_{[\alpha\beta]} - k_\nu T_{[\alpha\beta]}\}_{\alpha\beta\nu} - Q^{*\gamma\beta}(\Gamma_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{[\varrho\nu]} - \Gamma_{\nu}{}^{\varrho}{}_{\beta} T_{[\varrho\alpha]}),$$

wo $\{\ldots\}_{\alpha\beta\nu}$ die zyklische Permutation der Indizes α, β, ν bedeutet, bei der dritten Permutation jedoch kommt noch ein Vorzeichenwechsel hinzu.

---

[2]) $T_{(\alpha\beta)}$ bzw. $T_{[\alpha\beta]}$ bedeutet — wie gewöhnlich — den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von $T_{\alpha\beta}$.

Aus unseren bisherigen Untersuchungen folgt leicht der folgende:

Satz 1. *Ist* $T_{[\alpha\beta]}=0$, *so bestimmen* (8) *und* (10a), *die allgemeinste Form von* $L_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *mit frei wählbaren* $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *so, daß* $T_{(\alpha\beta)}$ *bezüglich dieser Übertragungsparameter eine rekurrente kovariante Ableitung hat. Ist* $T_{(\alpha\beta)}=0$, *so bestimmen* (8) *und* (10b) *die allgemeinste Form von* $L_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *mit frei wählbaren* $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *so, daß* $T_{[\alpha\beta]}$ *bezüglich dieser* $L_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *eine rekurrente kovariante Ableitung hat.*

BEWEIS. Ist $T_{[\alpha\beta]}=0$, so ist (6b) eine Identität, und (4) und (6a) stimmen überein. (6a) ist aber mit den durch (8) und (10a) bestimmten Übertragungsparametern für beliebige $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ erfüllt, und das beweist die erste Hälfte unseres Satzes.

Nehmen wir nun an, daß $T_{(\alpha\beta)}=0$ ist. Jetzt ist (6a) identisch erfüllt und (4) geht in (6b) über. (6b) ist aber mit den durch (8) und (10b) bestimmten Übertragungsparameter für beliebige $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ erfüllt, und das beweist die zweite Hälfte des Satzes.

Bemerkung. Die durch (8) und (10a) bestimmten Übertragungsparameter sind die unmittelbare Verallgemeinerungen unserer Formel (4. 6) der im Fußnote [1]) zitierten Arbeit.

§ 2. Der zweidimensionale Fall

Die im vorigen angegebene Methode für die Bestimmung der $L_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, die für $T_{\alpha\beta}$ eine rekurrente kovariante Ableitung bestimmen, ist nicht immer anwendbar, ja sogar existiert nicht immer ein geeignetes $L_\alpha{}^\beta{}_\gamma$. Wir werden das durch ein Beispiel, nämlich durch die Untersuchung des zweidimensionalen Falles zeigen.

Aus (5) wird im zweidimensionalen Fall:

$$(11)\qquad \begin{cases} 2L_1{}^1{}_\nu T_{11}+2L_1{}^2{}_\nu T_{(21)} & =\Phi_{11\nu}\\ L_1{}^1{}_\nu T_{12}+L_1{}^2{}_\nu T_{22}+L_2{}^1{}_\nu T_{11}+L_2{}^2{}_\nu T_{12} & =\Phi_{12\nu}\\ L_2{}^1{}_\nu T_{11}+L_2{}^2{}_\nu T_{21}+L_1{}^1{}_\nu T_{21}+L_1{}^2{}_\nu T_{22} & =\Phi_{21\nu}\\ 2L_2{}^1{}_\nu T_{(12)}+2L_2{}^2{}_\nu T_{22} & =\Phi_{22\nu}, \end{cases}$$

wo

$$\Phi_{\alpha\beta\nu}\stackrel{\text{def}}{=}\partial_\nu T_{\alpha\beta}-k_\nu T_{\alpha\beta}$$

bedeutet. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß die Determinante dieses Gleichungssystems Null ist, d. h.:

$$\begin{vmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0\\ T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21}\\ 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{vmatrix}=0.$$

Aus dieser Tatsache folgt der

Satz 2. *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer rekurrenten kovarianten Ableitung des Tensors* $T_{\alpha\beta}$ *im zweidimensionalen Raum ist, daß der Rang der Matrix*

$$\mathfrak{M}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} \Phi_{11\nu} & 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0\\ \Phi_{12\nu} & T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12}\\ \Phi_{21\nu} & T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21}\\ \Phi_{22\nu} & 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{pmatrix}$$

mit dem Rang der Matrix

$$\mathfrak{M}^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0 \\ T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21} \\ 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{pmatrix}$$

übereinstimme.

Bemerkung. Man kann leicht verifizieren, daß in den Fällen $T_{(\alpha\beta)}=0$, bzw. $T_{[\alpha\beta]}=0$ der Rang von $\mathfrak{M}<4$ ist. In diesem Falle existiert also eine Lösung von (11).

(Eingegangen am 18. Juni 1963.)