Publ. Math. Debrecen
48 / 3-4 (1996), 271–284

Intervertierte Regelflächen

Von GÜNTER SCHMIDT (München)

Abstract. In this article the author investigates circular areas Φ (so-called *inverted ruled surfaces* or *I-circular areas*) with their generating circles meeting a fixed point O. The inversion with respect to a sphere Σ with center O maps every generating circle $k \subset \Phi$ upon a straight line e ($O \notin e$) and Φ itself upon a *generating ruled surface* Γ ($O \notin \Gamma$). The author studies the position of a line $e \subset \Gamma$ depending on the accompanying generating circle $k \subset \Phi$ and the location of the inverted striction point of Γ in e. Furthermore he investigates I-circular areas with their generating ruled surfaces Γ being developable or conoidal. Finally ruled surfaces of order 2 or 3 are inverted. The spherical inversion maps a hyperboloid of one sheet or a hyperbolic paraboloid upon a cyclide (but not a DUPIN-cyclide) and a PLÜCKER-conoid upon an I-circular area of order 4, 5 or 6.

1. Im euklidischen 3-Raum E^3 wurden die *Regelflächen* und die *Kreisflächen* eingehend untersucht (siehe Literaturangaben in [5] und [7]). GIERING[2] verknüpfte Kreis- und Regelflächentheorie, indem er eine Kreisfläche Φ zusammen mit ihrer *Achsenfläche* (Regelfläche der Kreisachsen der *erzeugenden Kreise* von Φ) betrachtete.

Eine weitere interessante Verknüpfung von Kreis- und Regelflächentheorie des E^3 ergibt sich in der vorliegenden Arbeit durch Betrachtung der Kreisflächen Φ, deren erzeugende Kreise alle durch einen festen Punkt O gehen. Die Inversion an einer Sphäre $\Sigma_R(O,R)$ mit Mittelpunkt O und Radius R ($R>0$) führt jeden erzeugenden Kreis $k \subset \Phi$ wegen $O \in k$ über in eine Gerade e ($O \notin e$) und somit Φ selbst in eine Regelfläche Γ_R ($O \notin \Gamma_R$). Die Kreisfläche Φ wird daher auch als *invertierte Regelfläche* oder *I-Kreisfläche* $\Phi(\Gamma_R, \Sigma_R)$ bezeichnet. Die durch Inversion von Φ an $\Sigma_{R_1}(O,R_1)$ bzw. $\Sigma_{R_2}(O,R_2)$ ($R_1 \neq R_2$, $R_1>0$, $R_2>0$) entstandenen Regelflächen Γ_{R_1} und Γ_{R_2} können mittels zentrischer Streckung mit Zentrum O ineinander übergeführt werden. Fordert man $R = 1$, so ist für jede I-Kreisfläche die Regelfläche $\Gamma = \Gamma_1$ eindeutig bestimmt[1].

Im folgenden wird in **2.** der Kalkül für allgemeine Kreisflächen und in **3.** der für I-Kreisflächen bereitgestellt.

Nach Bereitstellung der auch für allgemeine Kreisflächen eingeführten Begleitgeraden *Charakteristik, Radikale, m-Gerade, y-Gerade* und *z-Gerade* werden in **4.** I-Kreisflächen $\Phi(\Gamma, \Sigma)$ betrachtet, die *Kanalflächen* oder *Röhrenflächen* sind. Eine I-Kreisfläche ist genau dann Kanalfläche, wenn ihre Achsenfläche Torse ist; dies ist genau dann der Fall, wenn Γ Torse ist (Sätze 2, 4). Eine I-Kreisfläche, die Röhrenfläche ist, liegt genau dann vor, wenn der Mittelpunkt jedes erzeugenden Kreises von Φ auf der zugehörigen Radikalen liegt (Satz 3).

Eine Betrachtung des *Richtkegels* von Γ mit Spitze O zeigt in **5.**, Satz 7, daß Γ genau dann konoidale Regelfläche ist, wenn es eine Ebene gibt, die jeden erzeugenden Kreis $k \subset \Phi(\Gamma, \Sigma)$ enthält oder in O berührt. Bezeichnet A die Achsenfläche von $\Phi(\Gamma, \Sigma)$, so ist Γ Achsenfläche der I-Kreisfläche $\Phi^*(A, \Sigma)$ (Satz 8). Neben den Begleitgeraden, die allgemeinen Kreisflächen zugeordnet werden, besitzt eine I -Kreisfläche zwei weitere Begleitgeraden, nämlich die *erzeugende Gerade e* (Urbild $e \subset \Gamma$ eines erzeugenden Kreises $k \subset \Phi$ bezüglich der Inversion an $\Sigma(O, 1)$) und die *Striktionsgerade* (Verbindungsgerade von O mit dem Striktionspunkt S von Γ in e). Die Striktionsgerade schneidet $k \subset \Phi$ neben O in jenem Punkt P (*invertierter Striktionspunkt*), auf den die Inversion an Σ den Striktionspunkt S abbildet. Satz 9 gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für den Fall an, daß P auf der Charakteristik oder auf der Radikalen von k liegt.

In **6.** werden Regelflächen Γ 2. und 3. Ordnung an $\Sigma(O, 1)$ invertiert, wobei $O \in \Gamma$ zugelassen sei. Die Inversion der Reguli eines einschaligen Hyperboloids H oder eines hyperbolischen Paraboloids P liefert eine Zyklide (jedoch keine Dupinsche Zyklide) Φ_H (*H-Zyklide*) bzw. Φ_P (*P-Zyklide*), die genau für $O \in H$ bzw. $O \in P$ von 3. Ordnung ist. Jede P-Zyklide trägt zwei (verschiedene) einparametrige Kreisscharen. Eine H-Zyklide trägt drei einparametrige Kreisscharen, falls H eine Drehfläche ist, und vier sonst (Satz 10). Die Inversion eines Plücker-Konoids K mit Doppelgerade d liefert eine Fläche (Plücker-*I-Kreisfläche*), die genau eine einparametrige Kreisschar trägt und für $O \notin K$ von 6., für $O \in K \setminus d$ von 5. und für $O \in d$ von 4. Ordung ist (Satz 12). Aussagen über die geometrische Erzeugung einer H- oder P-Zyklide oder einer Plücker-I-Kreisfläche finden sich in den Sätzen 11 und 13.

[1]Gehen die erzeugenden Kreise der I-Kreisfläche Φ durch zwei feste Punkte O, P und ist $R = 1$, so gibt es genau 2 eindeutig bestimmte Regelflächen Γ, Γ^*, die bezüglich der Mittellotebene von O und P symmetrisch zueinander sind.

2. Seien $k(M,r)$ ein Kreis des euklidischen 3-Raumes E^3 mit Radius $r>0$ und Mittelpunkt $M(\mathfrak{m})$ sowie $\mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{z}^*$ zwei orthonormale, die Kreisebene aufspannende Vektoren. Dann wird k beschrieben durch

$$k:\mathbb{R}\to E^3,\quad v\mapsto \mathfrak{m}+r(\cos v\ \mathfrak{n}^*+\sin v\ \mathfrak{z}^*).$$

Die zur Kreisebene von k orthogonale Gerade a durch M (*Kreisachse*) besitzt den Richtungsvektor $\mathfrak{e}:=\mathfrak{n}^*\times\mathfrak{z}^*$. Im folgenden überstreiche die Kreisachse a eine Regelfläche

$$\begin{gathered}A:I\times\mathbb{R}\to E^3,\quad (u,w)\mapsto \mathfrak{s}(u)+w\,\mathfrak{e}(u),\\ \mathfrak{s},\mathfrak{e}\in C^2,\quad I\subset\mathbb{R},\quad I\text{ offen},\end{gathered}\tag{1}$$

mit regulärer, auf Bogenlänge u parametrisierter Striktionslinie[2] $s_A:I\to E^3$, $u\mapsto\mathfrak{s}$ ($\mathfrak{s}'^2\equiv 1$, $\mathfrak{s}'e'\equiv 0$) und mit $\mathfrak{e}'^2\neq 0$; A besitzt also keine kegeligen oder zylindrischen Erzeugenden. Der Regelfläche A läßt sich gemäß [6], S.62ff das begleitende Dreibein

$$\mathfrak{e},\quad \mathfrak{n}:=\frac{\mathfrak{e}'}{|\mathfrak{e}'|},\quad \mathfrak{z}:=\mathfrak{e}\times\mathfrak{n}\tag{2}$$

zuordnen, für das die Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{e}'=\kappa\mathfrak{n},\quad \mathfrak{n}'=-\kappa\mathfrak{e}+\tau\mathfrak{z},\quad \mathfrak{z}'=-\tau\mathfrak{n}\qquad(\kappa>0)\tag{3}$$

gelten; κ heißt die *Krümmung* und τ die *Torsion* von A. Eine *Kreisfläche* Φ, deren *erzeugende Kreise* $k(u)\subset\Phi$ als Kreisachsen die Erzeugenden $a(u)\subset A$ besitzen, wird beschrieben durch

$$\begin{gathered}\Phi:\ I\times\mathbb{R}\to E^3,\\ (u,v)\mapsto\mathfrak{x}(u,v):=\mathfrak{s}(u)+m(u)\mathfrak{e}(u)+r(u)[\cos v\ \mathfrak{n}(u)+\sin v\ \mathfrak{z}(u)]\end{gathered}\tag{4}$$

($m,r\in C^1$). Die Regelfläche A der Kreisachsen heißt *Achsenfläche* von Φ und die durch $\mathfrak{s}+m\mathfrak{e}$ beschriebene C^1-Kurve *Kreismittenkurve* von Φ.

[2] Im folgenden steht $\mathfrak{s}$ für $\mathfrak{s}(u)$, $\mathfrak{e}$ für $\mathfrak{e}(u)$ etc.; Striche bedeuten Ableitungen nach der Bogenlänge u der Striktionslinie von A.

3. Die Inversion an einer Sphäre Σ mit Zentrum $O(\mathfrak{o})$ und Radius $R{=}1$ wird beschrieben durch $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x}/\mathfrak{x}^2$ und führt für $O(\mathfrak{o}) \in e$ eine Gerade e in sich über und in einen Kreis k mit $O(\mathfrak{o}) \in k$ sonst (siehe etwa [3], S.390ff). Im folgenden sei die Kreisfläche Φ mit der Darstellung (4) entstanden durch Inversion einer Regelfläche Γ an der Sphäre $\Sigma = \Sigma(O(\mathfrak{o}), 1)$ ($O \notin \Gamma$). Da dann jeder erzeugende Kreis $k \subset \Phi$ das Inversionszentrum $O(\mathfrak{o})$ enthält, gilt für Φ die Bedingung

$$m^2 + r^2 = \mathfrak{s}^2. \tag{5}$$

Eine durch (4), (5) beschriebene Kreisfläche Φ heißt *invertierte Regelfläche* oder *I-Kreisfläche* und ein allen erzeugenden Kreisen von Φ gemeinsamer Punkt $O(\mathfrak{o})$ das *Inversionszentrum* von Φ[3].

Wegen $O(\mathfrak{o}) \in k$ liegt die Verbindungsgerade von $O(\mathfrak{o})$ mit dem Mittelpunkt $M(\mathfrak{s} + m\mathfrak{e})$ von $k \subset \Phi$ in der Kreisebene von k. Es gilt also $(\mathfrak{s} + m\mathfrak{e})\mathfrak{e} = 0$ oder

$$m = -\mathfrak{s}\mathfrak{e} \tag{6}$$

und folglich

$$\mathfrak{s} + m\mathfrak{e} = -y_0\mathfrak{n} - z_0\mathfrak{z} \quad \text{mit} \quad y_0 := -\mathfrak{s}\mathfrak{n}, \quad z_0 := -\mathfrak{s}\mathfrak{z}. \tag{7}$$

Damit lautet (5)

$$r^2 = y_0^2 + z_0^2. \tag{8}$$

Das Inversionszentrum $O(\mathfrak{o})$ besitzt also bezüglich des lokalen kartesischen xyz-Koordinatensystems $\{M(\mathfrak{s} + m\mathfrak{e}); \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}\}$ die Koordinaten $(0, y_0, z_0)$. Unter Verwendung der *Striktion* σ der Achsenfläche A gilt (siehe [6], S.73)

$$\mathfrak{s}' = \cos\sigma\mathfrak{e} + \sin\sigma\mathfrak{z}. \tag{9}$$

Mit (3), (7) und (9) folgt aus (6)

$$\kappa y_0 = a \quad \text{mit} \quad a := m' + \cos\sigma \tag{10}$$

sowie aus (8)

$$rr' = -y_0\kappa m - z_0 \sin\sigma. \tag{11}$$

[3]Für den Fall, daß alle erzeugenden Kreise von Φ zwei gemeinsame Punkte $O(\mathfrak{o})$, $P(\mathfrak{p})$ besitzen, kann o.E. einer von ihnen als „Inversionszentrum" gewählt werden, da Φ dann symmetrisch zur Ebene $\alpha : \mathfrak{p}(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}/2) = 0$ ist.
Durch 3 gemeinsame Punkte gibt es nur einen Kreis, der in eine Gerade entartet, wenn die Punkte kollinear sind.

4. Den erzeugenden Kreisen einer I-Kreisfläche ordnet man die folgenden Begleitgeraden zu, die auch allgemeine Kreisflächen besitzen.

Die *Charakteristik* (Schnittgerade zweier benachbarter Kreisebenen) wird bezüglich des kartesischen xyz-Koordinatensystems $\{M(\mathfrak{s}+m\mathfrak{e});\ \mathfrak{e},\mathfrak{n},\mathfrak{z}\}$ nach [2] beschrieben durch $x = a - \kappa y = 0$ oder wegen (10) durch

$$x = y_0 - y = 0. \tag{12}$$

Die Charakteristik ist parallel zur *z-Geraden* ($x = y = 0$; Parallele der zugehörigen Zentraltangente der Achsenfläche A durch M) und trifft den zugehörigen erzeugenden Kreis $k \subset \Phi$ im Inversionszentrum $O(\mathfrak{o})$ und einem weiteren Punkt[4]. Die Charakteristik ist genau dann Tangente von k in $O(\mathfrak{o})$, wenn die Gerade $O(\mathfrak{o})M(\mathfrak{s}+m\mathfrak{e} = -y_0\mathfrak{n}-z_0\mathfrak{z})$ mit der *y-Geraden* ($x = z = 0$; Parallele der zugehörigen Zentralnormalen von A durch M) zusammenfällt ($z_0 = 0$).

Satz 1. *Bei einer I-Kreisfläche Φ schneidet jede Charakteristik den zugehörigen erzeugenden Kreis stets in zwei reellen Punkten, die genau dann zusammenfallen, wenn das Inversionszentrum von Φ auf der zugehörigen y-Geraden liegt.*

Die *m-Gerade* (Normalprojektion der Tangente der Kreismittenkurve im Mittelpunkt eines erzeugenden Kreises in die zugehörige Kreisebene) wird nach [2] beschrieben durch

$$x = y\sin\sigma - m\kappa z = 0 \tag{13}$$

und die *Radikale* (gemeinsame Sekante eines erzeugenden Kreises k und der Normalprojektion eines zu k benachbarten erzeugenden Kreises in die Kreisebene von k) durch $x = rr' + m\kappa y + z\sin\sigma = 0$ oder wegen (11) durch

$$x = m\kappa(y - y_0) + \sin\sigma(z - z_0) = 0. \tag{14}$$

Für $m^2 + \sin^2\sigma = 0$ existieren weder Radikale noch m-Gerade. Charakteristik und (existierende) Radikale schneiden einander im Inversionszentrum und fallen genau für $\sin\sigma = 0$ ($m \neq 0$) zusammen. Eine Kreisfläche Φ ist nach [1] genau dann Hüllfläche einer einparametrigen Kugelschar[5] (*Kanalfläche*), wenn für jeden erzeugenden Kreis $k \subset \Phi$ keine Radikale existiert oder (existierende) Radikale und Charakteristik zusammenfallen. Da ferner für den Drall d der Achsenfläche A von Φ nach [6] $d = \sin\sigma/\kappa$ gilt, folgt[6]

[4]Bei einer allgemeinen Kreisfläche schneidet eine Charakteristik den zugehörigen erzeugenden Kreis nicht notwendig reell.

[5]Es sei zulässig, daß die einparametrige Kugelschar abzählbar viele Ebenen (Kugeln mit Radius ∞) enthält.

[6]Für allgemeine Kreisflächen gilt keine entsprechende Aussage.

Satz 2. *Eine I-Kreisfläche ist genau dann Kanalfläche, wenn ihre Achsenfläche eine Torse*[7] *ist* $(d \equiv 0)$.

Mit (11) folgt[8]

Satz 3. *Eine I-Kreisfläche* Φ (4), (5) *ist genau dann* Röhrenfläche $(r' \equiv 0)$, *wenn der Mittelpunkt jedes erzeugenden Kreises von* Φ *auf der zugehörigen Radikalen liegt* $(y_0\kappa m + z_0 \sin\sigma = 0)$.

Im folgenden bezeichne $\Phi(\Gamma, \Sigma)$ die I-Kreisfläche Φ, entstanden durch Inversion der Regelfläche Γ an der Sphäre Σ.

Die Inversion an einer Sphäre ist winkeltreu und bildet eine Kugel oder Ebene auf eine Ebene ab, falls das Inversionszentrum auf der Kugel bzw. Ebene liegt (siehe [3], S.390ff). Da die Kugeln (bzw. Ebenen[9]) einer einparametrigen Kugelschar, die eine I-Kreisfläche einhülle, das Inversionszentrum enthalten und eine Torse Hüllfläche einer einparametrigen Ebenenschar ist, folgt

Satz 4. *Eine I-Kreisfläche* $\Phi(\Gamma, \Sigma)$ *ist genau dann Kanalfläche, wenn* Γ *Torse ist.*

Weiter folgt unmittelbar

Satz 5. *Für eine I-Kreisfläche* $\Phi(\Gamma, \Sigma)$, *die Kanalfläche ist, gilt:*

- *Ist* Γ *zylindrische Torse, so gehören die Kreisebenen von* Φ *einem Ebenenbüschel an. Die Charakteristiken von* Φ *fallen dann mit der Büschelgeraden zusammen, die jeden erzeugenden Kreis* $k \subset \Phi$ *im Inversionszentrum berührt.*
- *Ist* Γ *kegelige Torse, so gehen alle erzeugenden Kreise von* Φ *neben dem Inversionszentrum durch einen weiteren festen Punkt.*

5. Es wird die durch (4), (5) beschriebene I-Kreisfläche $\Phi = \Phi(\Gamma, \Sigma)$ $(\Sigma = \Sigma(O(\mathfrak{o}), 1))$ betrachtet und eine Parameterdarstellung von Γ ermittelt.

Die Inversion an Σ bildet den erzeugenden Kreis $k(M(\mathfrak{s} + m\mathfrak{e}), r) \subset \Phi$ ab auf die Gerade e, für die gilt:

- e liegt in der Kreisebene $[k] : \mathfrak{x}\mathfrak{e} = 0$ von k;
- e ist orthogonal zur Geraden $OM : \lambda(\mathfrak{s} + m\mathfrak{e}) = -\lambda(y_0\mathfrak{n} + z_0\mathfrak{z})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

[7] Eine torsale Achsenfläche A ist nach Voraussetzung (A besitzt keine kegeligen oder zylindrischen Erzeugenden) Tangentenfläche.
[8] Für allgemeine Kreisflächen gilt keine entsprechende Aussage.
[9] vgl. Fußnote [5]

- die Inversion an $\Sigma(\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x}/\mathfrak{x}^2)$ bildet den zu $O(\mathfrak{o})$ diametralen Punkt $P(2(\mathfrak{s}+m\mathfrak{e})) \in k$ ab auf den Punkt[10] $Q((\mathfrak{s}+m\mathfrak{e})/(2r^2)) = OM \cap e$;

  Γ besitzt also die Parameterdarstellung

$$\Gamma : I \times \mathbb{R} \to E^3, \quad (u,w) \mapsto \mathfrak{a}(u) + w\,\mathfrak{b}(u)$$

mit

$$\mathfrak{a} := \frac{\mathfrak{s}+m\mathfrak{e}}{2r^2} = -\frac{y_0\mathfrak{n}+z_0\mathfrak{z}}{2r^2}, \qquad \mathfrak{b} := -\frac{y_0\mathfrak{n}+z_0\mathfrak{z}}{r} \times \mathfrak{e} = \frac{-z_0\mathfrak{n}+y_0\mathfrak{z}}{r}. \tag{15}$$

Läßt man für die Inversionssphäre $\Sigma_R{=}\Sigma_R(O,R)$ beliebigen Radius $R{>}0$ zu, so wird Γ_R $(\Phi(\Gamma_R,\Sigma_R))$ beschrieben durch $\Gamma_R : R^2\mathfrak{a} + w\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ siehe (15), $w \in \mathbb{R}$); Γ_R kann also mittels zentrischer Streckung mit Zentrum O in $\Gamma = \Gamma_1$ übergeführt werden. Durch die Forderung $R = 1$ ordnet man jeder I-Kreisfläche eindeutig eine „erzeugende Regelfläche“ Γ zu[11].

Die Erzeugende $e(u) \subset \Gamma$ liegt in der Kreisebene des erzeugenden Kreises $k(u) \subset \Phi$ und wird als weitere Begleitgerade von Φ aufgefaßt; e heißt *erzeugende Gerade* und wird bezüglich des kartesischen xyz-Koordinatensystems $\{M;\mathfrak{e},\mathfrak{n},\mathfrak{z}\}$ beschrieben durch

$$x = yy_0 + zz_0 + \frac{1}{2} - r^2 = 0. \tag{16}$$

Die erzeugende Gerade ist genau für $z_0 = 0$ (bzw. $y_0 = 0$) parallel (bzw. orthogonal) zur Charakteristik und genau für $z_0 m\kappa - y_0 \sin\sigma = 0$ (bzw. $y_0 m\kappa + z_0 \sin\sigma = 0$) parallel (bzw. orthogonal) zur Radikalen.

Satz 6. *In der Kreisebene eines erzeugenden Kreises k einer I-Kreisfläche $\Phi(\Gamma,\Sigma)$ gilt für die erzeugende Gerade e:*

- *e ist genau dann parallel zur Charakteristik, wenn das Inversionszentrum auf der y-Geraden liegt ($z_0 = 0$);*
- *e ist genau dann orthogonal zur Charakteristik, wenn das Inversionszentrum auf der z-Geraden liegt ($y_0 = 0$);*
- *e ist genau dann parallel zur Radikalen, wenn das Inversionszentrum auf der m-Geraden liegt ($z_0 m\kappa - y_0 \sin\sigma = 0$);*
- *e ist genau dann orthogonal zur Radikalen, wenn der Mittelpunkt M von k auf der Radikalen liegt ($y_0 m\kappa + z_0 \sin\sigma = 0$);*

---

[10] Beachte $|\mathfrak{s}+m\mathfrak{e}| = r$.

[11] Beachte hierzu auch Fußnote [3].

- *e geht genau für $r = \sqrt{1/2}$ durch M. Insbesondere fällt e genau dann mit der m-Geraden zusammen, wenn e die Radikale in M schneidet.*

Die Parallele e_p einer Erzeugenden $e \subset \Gamma$ durch das Inversionszentrum $O(\mathfrak{o})$ ist Tangente des zugehörigen erzeugenden Kreises $k \subset \Phi$ in O. Die Geraden $e_p(e_p \parallel e)$ bilden einen *Richtkegel* Γ_p von Γ mit Spitze O. Da Γ genau dann konoidale Regelfläche ist, wenn Γ_p in eine Gerade (dann ist Γ Zylinder; siehe Satz 5) oder eine Ebene entartet, folgt

Satz 7. *Sei $\Phi(\Gamma, \Sigma)$ eine I-Kreisfläche. Dann ist Γ genau dann konoidale Regelfläche, wenn es eine Ebene gibt, die jeden erzeugenden Kreis von Φ enthält oder im Inversionszentrum berührt.*

Die I-Kreisfläche Φ^*, die Γ als Achsenfläche besitzt und deren erzeugende Kreise durch $O(\mathfrak{o})$ gehen, wird beschrieben durch

$$\Phi^* : I \times \mathbb{R} \to E^3, \quad (u, v) \mapsto \mathfrak{a} + |\mathfrak{a}| \cdot (\cos v\mathfrak{e} + \sin v\mathfrak{b} \times \mathfrak{e}).$$

Die Inversion an $\Sigma(O, 1)$ führt die I-Kreisfläche Φ^* über in die Regelfläche

$$\Gamma^* : I \times \mathbb{R} \to E^3, \quad (u, w) \mapsto \mathfrak{a}^*(u) + w\mathfrak{b}^*(u)$$

mit

$$\mathfrak{a}^* := \frac{\mathfrak{a}}{2\mathfrak{a}^2} = \mathfrak{s} + m\mathfrak{e}, \quad \mathfrak{b}^* := \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{e}.$$

Die Regelfläche Γ^* fällt also mit der Achsenfläche A (1) von Φ (4), (5) zusammen.

Satz 8. *Ist A Achsenfläche der I-Kreisfläche $\Phi(\Gamma, \Sigma)$, so ist Γ Achsenfläche der I-Kreisfläche $\Phi^*(A, \Sigma)$. Mit den Sätzen 2, 4 folgt, daß A genau dann Torse ist, wenn Γ Torse ist.*

Mit (3) und (7) bis (11) berechnet man aus (15)[12]

$$\begin{aligned}
2r^4\mathfrak{a}' &= r^2(\mathfrak{s}' + m'\mathfrak{e} + m\mathfrak{e}') - 2rr'(\mathfrak{s} + m\mathfrak{e}) \\
&= \kappa y_0 r^2 \mathfrak{e} + m\kappa r^2 \mathfrak{n} + r^2 \sin\sigma \mathfrak{z} - 2(y_0\kappa m + z_0 \sin\sigma)(y_0\mathfrak{n} + z_0\mathfrak{z}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-r^3\mathfrak{b}' &= r^2(z_0'\mathfrak{n} + z_0\mathfrak{n}' - y_0'\mathfrak{z} - y_0\mathfrak{z}') - rr'(z_0\mathfrak{n} - y_0\mathfrak{z}) \\
&= r^2(-\sin\sigma\mathfrak{n} - \tau y_0\mathfrak{n} - z_0\kappa\mathfrak{e} + z_0\tau\mathfrak{z} + \kappa m\mathfrak{z} - z_0\tau\mathfrak{z} + \tau y_0\mathfrak{n}) \\
&\quad + (y_0\kappa m + z_0\sin\sigma)(z_0\mathfrak{n} - y_0\mathfrak{z}) \\
&= -r^2 z_0\kappa\mathfrak{e} + (z_0\kappa m - y_0\sin\sigma)(y_0\mathfrak{n} + z_0\mathfrak{z})
\end{aligned}$$

[12] Beachte $y_0' = (-\mathfrak{s}\mathfrak{n})' = -\kappa m + \tau z_0$ und $z_0' = (-\mathfrak{s}\mathfrak{z})' = -\sin\sigma - \tau y_0$.

und weiter

$$-2r^7\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = -y_0 z_0 r^4\kappa^2 - r^2(z_0\kappa m - y_0\sin\sigma)(y_0\kappa m + z_0\sin\sigma) =: r^2\mu,$$

$$r^6\mathfrak{b}'^2 = z_0^2 r^4\kappa^2 + (z_0\kappa m - y_0\sin\sigma)^2 r^2 =: r^2\lambda.$$

Im folgenden gelte $\lambda \neq 0 (\Leftrightarrow z_0^2 + \sin^2\sigma \neq 0)$. Dann existiert die Striktionslinie s von Γ:

$$s: \ I \to E^3,$$

$$u \mapsto \mathfrak{a} - (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}'^2)\cdot\mathfrak{b} = -((y_0\lambda + z_0\mu)\mathfrak{n} + (z_0\lambda - y_0\mu)\mathfrak{z})/(2r^2\lambda).$$

Wegen

$$y_0\lambda + z_0\mu = -r^2\sin\sigma(z_0\kappa m - y_0\sin\sigma),$$

$$z_0\lambda - y_0\mu = z_0 r^4\kappa^2 + r^2\kappa m(z_0\kappa m - y_0\sin\sigma)$$

folgt

$$\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}'^2}\mathfrak{b} = -\frac{1}{2\lambda}\Big(-\sin\sigma(z_0\kappa m - y_0\sin\sigma)\mathfrak{n} + (r^2 z_0\kappa^2 + \kappa m(z_0\kappa m - y_0\sin\sigma))\mathfrak{z}\Big).$$

In der Kreisebene eines erzeugenden Kreises $k \subset \Phi$ heißt die Verbindungsgerade des Inversionszentrums $O(\mathfrak{o})$ mit dem Striktionspunkt $S(\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}'^2)\mathfrak{b})$ von Γ *Striktionsgerade*. Sie schneidet k neben dem Inversionszentrum O in denjenigem Punkt P, auf den die Inversion an $\Sigma(O,1)$ den Striktionspunkt S abbildet; P heißt *invertierter Striktionspunkt*. Wegen $z_0^2 + \sin^2\sigma \neq 0$ sind Striktionsgerade und erzeugende Gerade nicht parallel. Invertierter Striktionspunkt und Inversionszentrum sind also stets verschieden.

Die Striktionsgerade wird bezüglich des kartesischen xyz-Koordinatensystems $\{M; \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}\}$ beschrieben durch

$$x = (y - y_0)r^2 z_0\kappa^2 + (z_0\kappa m - y_0\sin\sigma)((y - y_0)m\kappa + (z - z_0)\sin\sigma) = 0.$$

Die Striktionsgerade fällt genau für $z_0\sin\sigma = 0$ mit der Radikalen und genau für $\sin\sigma(z_0\kappa m - y_0\sin\sigma) = 0$ mit der Charakteristik zusammen. Mit den Sätzen 1, 2, 4 folgt

Satz 9. *In der Kreisebene eines erzeugenden Kreises einer I-Kreisfläche* $\Phi(\Gamma,\Sigma)$ (4), (5) *mit* $z_0^2(u) + sin^2\sigma(u) \neq 0\ \forall u \in \mathbb{R}$ *gilt:*

- *Der invertierte Striktionspunkt liegt genau dann auf der Radikalen, wenn die erzeugende Gerade e Torsalerzeugende von Γ ist* $(\sin\sigma = 0)$

oder wenn die Charakteristik den erzeugenden Kreis k berührt $(z_0 = 0)$.

- *Der invertierte Striktionspunkt liegt genau dann auf der Charakteristik, wenn e Torsalerzeugende ist* $(\sin\sigma = 0)$ *oder wenn das Inversionszentrum auf der m-Geraden liegt* $(z_0\kappa m - y_0 \sin\sigma = 0)$.

6. In diesem Abschnitt werden Regelflächen Γ 2. und 3. Ordnung an der Sphäre $\Sigma = \Sigma(O(\mathfrak{o}), 1)$ invertiert, wobei nun $O \in \Gamma$ zugelassen sei.

Die Inversion an Σ führt das einschalige Hyperboloid

$$H : a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 - c(z - z_0)^2 = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

über in die Zyklide

$$\begin{aligned}\Phi_H : {} & (x^2 + y^2 + z^2)^2({ax_0}^2 + {by_0}^2 - {cz_0}^2 - 1) \\ & - 2(x^2 + y^2 + z^2)(ax_0x + by_0y - cz_0z) + ax^2 + by^2 - cz^2 = 0\end{aligned}$$

und das hyperbolische Paraboloid

$$P : a(x - x_0)^2 - b(y - y_0)^2 + z - z_0 = 0 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

in die Zyklide

$$\begin{aligned}\Phi_P : {} & (x^2 + y^2 + z^2)^2({ax_0}^2 - {by_0}^2 - z_0) \\ & - (x^2 + y^2 + z^2)(2ax_0x - 2by_0y - z) + ax^2 - by^2 = 0;\end{aligned}$$

Φ_H, Φ_P sind keine Dupinschen Zykliden. Genau für $O \in H$ $({ax_0}^2 + {by_0}^2 - {cz_0}^2 = 1)$ bzw. $O \in P({ax_0}^2 - {by_0}^2 - z_0 = 0)$ ist die Zyklide Φ_H bzw. Φ_P von 3. Ordnung und schneidet die Fernebene neben dem (einfach zählenden) nullteiligen Absolutkegelschnitt in der Ferngeraden der Tangentenebene von H bzw. P in O.

Da H und P je zwei (verschiedene) einparametrige Geradenscharen tragen und H zwei einparametrige Kreisscharen trägt, die genau für $a = b$ zusammenfallen (P trägt keine Kreise), folgt

Satz 10. *Seien Σ eine Sphäre mit Mittelpunkt O, H ein einschaliges Hyperboloid und P ein hyperbolisches Paraboloid. Dann ist $\Phi_H(H, \Sigma)$ bzw. $\Phi_P(P, \Sigma)$ eine Zyklide (jedoch keine* Dupin*sche Zyklide), die genau für $O \in H$ bzw. $O \in P$ von 3. Ordnung ist.*

Φ_P heißt P-Zyklide *und trägt zwei (verschiedene) einparametrige Scharen von Kreisen durch O.*

Φ_H heißt H-Zyklide *und trägt zwei (verschiedene) einparametrige Scharen von Kreisen durch O sowie zwei weitere (genau für ein einschaliges Drehhyperboloid H zusammenfallende) einparametrige Kreisscharen,*

deren Kreise O nicht treffen und je auf einem parabolischen Kugelbüschel durch O liegen.[13]

Da der Ort der Geraden, die drei feste, paarweise windschiefe Geraden g_i $(i = 1, 2, 3)$ treffen, ein hyperbolisches Paraboloid ist, falls g_1, g_2, g_3 zu einer festen Ebene parallel sind, und ein einschaliges Hyperboloid sonst, folgt

Satz 11. *Seien k_i $(i = 1, 2, 3)$ drei, einander paarweise in genau einem (festen) Punkt O schneidende Kreise mit paarweise verschiedenen Tangenten t_i von k_i in O $(i = 1, 2, 3)$. Dann ist der Ort der Kreise und Geraden*[14] *durch O, die $k_1 \setminus \{O\}$, $k_2 \setminus \{O\}$ und $k_3 \setminus \{O\}$ treffen, eine P-Zyklide, falls t_1, t_2, t_3 komplanar sind, und eine H-Zyklide sonst.*

Bemerkung. Die (quadratischen) Kegel und Zylinder sind neben den einschaligen Hyperboloiden und den hyperbolischen Paraboloiden die einzigen Quadriken, die Geraden tragen (Ebenenpaare werden aus der Betrachtung ausgeschlossen). Die Inversion eines Drehkegels oder Drehzylinders Γ mit Drehachse d liefert nach [4], S.56ff eine Dupinsche Zyklide Φ, die von 3. Ordnung ist, falls das Inversionszentrum O auf Γ liegt. Für $O \in d \setminus \Gamma$ ist Φ ein Torus, und für $O \in d \cap \Gamma$ ist $\Phi = \Gamma$. Die Inversion eines Kegels oder Zylinders, der keine Drehfläche ist, liefert eine (allgemeine) Zyklide, die drei (verschiedene) einparametrige Kreisscharen trägt.

Das Plücker-Konoid

$$K : (z - z_0)\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) = \frac{h}{2}\left((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2\right)$$

ist eine Regelfläche 3. Ordnung mit *Höhe* $h > 0$, deren Erzeugenden nach [6], S.149ff die *Doppelgerade*

$$d : x - x_0 = y - y_0 = 0$$

orthogonal treffen. Das Plücker-Konoid K wird durch Inversion an $\Sigma = \Sigma(O, 1)$ abgebildet auf die Fläche

$$\begin{aligned}
\Phi :\ & -(x^2 + y^2 + z^2)^3\left(z_0({x_0}^2 + {y_0}^2) + (h/2)({x_0}^2 - {y_0}^2)\right) \\
& + (x^2 + y^2 + z^2)^2\big(z({x_0}^2 + {y_0}^2) + 2z_0(xx_0 + yy_0) \\
& + h(xx_0 - yy_0)\big) - (x^2 + y^2 + z^2)\big(2z(xx_0 + yy_0) \\
& + z_0(x^2 + y^2) + (h/2)(x^2 - y^2)\big) \\
& + z(x^2 + y^2) = 0;
\end{aligned} \tag{17}$$

[13] Für $O \in P$ bzw. $O \in H$ enthält jede Kreisschar in Φ_P bzw. Φ_H eine Gerade (Kreis mit Radius ∞).

[14] Siehe Fußnote [13].

Φ ist für $O \notin K$ $(-z_0({x_0}^2+{y_0}^2) \neq (h/2)({x_0}^2-{y_0}^2))$ von 6. Ordnung und schneidet die Fernebene im dreifach zählenden nullteiligen Absolutkegelschnitt.

Für $O \in K \setminus d$ $(-z_0({x_0}^2+{y_0}^2) = (h/2)({x_0}^2-{y_0}^2)$, ${x_0}^2+{y_0}^2 \neq 0)$ ist Φ (17) eine algebraische Fläche 5. Ordnung, die die Fernebene neben dem (zweifach zählenden) nullteiligen Absolutkegelschnitt in der Ferngeraden der Tangentenebene

$$\tau: \quad 2hxx_0{y_0}^2 - 2hyy_0{x_0}^2 + z({x_0}^2+{y_0}^2)^2 = 0$$

von K in O schneidet[15].

Für $O \in d$ $(x_0 = y_0 = 0)$ ist Φ (17) eine algebraische Fläche 4. Ordnung und e_1, e_2 bezeichnen die beiden (eventuell konjugiert komplexen oder zusammenfallenden) Erzeugenden von K durch $O \in d$. Dann schneidet Φ die Fernebene im (einfach zählenden) nullteiligen Absolutkegelschnitt und in den Ferngeraden der Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 durch d und e_1 bzw. d und e_2:

$$\epsilon_{1/2}: \quad x\sqrt{h+2z_0} = \pm y\sqrt{h-2z_0}.$$

Da ein Plücker-Konoid nach [6], S.149ff neben seinen erzeugenden Geraden keine weiteren Geraden und keine Kreise trägt, folgt

Satz 12. *Seien Σ eine Sphäre mit Mittelpunkt O und K ein* Plücker-*Konoid mit Doppelgerade d. Dann heißt $\Phi = \Phi(K, \Sigma)$* Plücker-*I*-Kreisfläche *oder P-I*-Kreisfläche*; Φ trägt eine einparametrige Schar von Kreisen durch O – sonst enthält Φ keine Kreise. Genau für $\left\{\begin{array}{l} O \notin K \\ O \in K \setminus d \\ O \in d \end{array}\right\}$ ist Φ algebraische Fläche $\left\{\begin{array}{c} 6. \\ 5. \\ 4. \end{array}\right\}$ Ordnung, die den nullteiligen Absolutkegelschnitt $\left\{\begin{array}{l} \textit{dreifach} \\ \textit{zweifach} \\ \textit{einfach} \end{array}\right\}$ zählend enthält.*

Ein Plücker-Konoid ist nach [6], S.149ff der Ort der Geraden, die eine in einem Drehzylinder Δ^* liegende Ellipse k^*, die kein Kreis ist, treffen und eine Erzeugende $d \subset \Delta^*$ orthogonal schneiden. Da die Inversion an einer Sphäre einen Drehzylinder nach [4], S.56ff auf eine Dupinsche Hornzyklide abbildet, die von 3. Ordnung ist, falls das Inversionszentrum auf dem Zylinder liegt, folgt mit Satz 12

[15] Beachte $z_0 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}$.

Satz 13. *Seien Δ eine* DUPIN*sche Hornzyklide (die auch von 3. Ordnung sein kann) mit Knotenpunkt O und d' ein Kreis oder eine Gerade aus der einparametrigen Schar von Kreisen in Δ durch O*[16]*. Ferner seien Ψ eine Kugel oder Ebene durch O, die d' nicht orthogonal schneidet und d' in O nicht berührt, sowie $k = \Psi \cap \Delta$ der Schnitt von Ψ mit Δ.*

Dann ist der Ort Φ der Kreise und Geraden durch O, die $k \setminus \{O\}$ treffen und d' orthogonal schneiden, eine P-I-Kreisfläche. Ist d' eine Gerade, so ist Φ eine P-I-Kreisfläche 4. Ordnung. Ist d' keine Gerade und gibt es eine Gerade $g \subset \Phi$ durch O, so ist Φ eine P-I-Kreisfläche 5. Ordnung. Sonst ist Φ von 6. Ordnung.

Literaturverzeichnis

[1] A. ENNEPER, Die cyklischen Flächen, *Z. Math. Phys.* **14** (1869), 393–421.

[2] O. GIERING, Zur Geometrie der Kreis- und Regelflächen, *Bull. de la Soc. Math. Roumaine* **18** (66) nr. 1–2 (1974), 61–79.

[3] O. GIERING, Vorlesungen über höhere Geometrie, *Vieweg-Verlag*, *Braunschweig-Wiesbaden*, 1982.

[4] F. KLEIN, Vorlesungen über höhere Geometrie, *Springer-Verlag*, *Berlin*, 1926.

[5] R. KOCH, Regelflächen in euklidischen Räumen, in: O. GIERING and J. HOSCHEK (Hrsg.), Geometrie und ihre Anwendungen, *Hanser-Verlag*, *München*, 1994, pp. 71–106.

[6] E. KRUPPA, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, *Springer-Verlag*, *Wien*, 1957.

[7] G. SCHMIDT, Tori und allgemeine Kreisflächen im pseudoeuklidischen Raum, Dissertation, *TU München*, 1994.

GÜNTER SCHMIDT
MATHEMATISCHES INSTITUT
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D–80333 MÜNCHEN
ARCISSTRASSE 21

(Received February 28, 1995)

[16]Für eine DUPINsche Hornzyklide Δ von 3. Ordnung enthält diese Schar eine Gerade.