Quelques remarques concernant les fonctions quasi-convexes

Par BÙI TRONG LIÊŨ (Lille) et DANIEL CARTON (Paris)

La notion de fonction quasi-convexe est maintenant bien connue, et on voit de plus en plus souvent leur apparition dans la théorie des jeux et même dans la programmation non-linéaire (citons par exemple [2] et [3]). Il nous semble pourtant que le souci d'application a toujours amené les auteurs à considérer les fonctions quasi-convexes á valeurs numériques, alors que la définition elle-même ne nécessite que la notion d'ensemble semi-réticulé supérieurement (pour l'espace d'arrivée) et celle d'espace vectoriel (pour l'espace de départ). Par contre, pour certaines propriétés générales, l'hypothèse d'une structure d'espace de Riesz (ou plutôt d'espace vectoriel ordonné semi-réticulé supérieurement) paraît être la plus faible. Il faut cependant reconnaître que hormis quelques propriétés que nous n'avons pas vues énoncées ailleurs, la démonstration concernant les autres est si proche du cas numérique qu'elle peut être omise. Aussi nous nous proposons de considérer le premier paragraphe de ce papier presque comme une sorte de rappel de résultats.

Le deuxième paragraphe est d'une nature différente. Les fonctions considérées sont maintenant supposées a valeurs numériques .Nous appuyant sur une hypothèse introduite dans [4], nous efforçons d'étendre certains résultats de ce papier à des fonctions quasi-convexes. Un résultat concernant la quasi-convexité "par morceaux" est aussi énoncé.

Dans ce qui suit, la terminologie et les notations sont souvent empruntées à [1].

I.

Un ensemble U sera dit semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement) s'il est muni d'une relation d'ordre $\prec$, telle que deux éléments quelconques u_1 et u_2 de U admettent une borne supérieure (resp. inférieure) notée $u_1 \vee u_2$ (resp. $u_1 \wedge u_2$). L'ensemble sera dit réticulé s'il est à la fois semi-réticulé supérieurement et inférieurement (cf. [1]).

Definition. Soit V un ensemble convexe d'un espace vectoriel réel $\tilde{V}$, U un ensemble semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement). Une application f de V dans U est dite quasi-convexe (resp. quasi-concave) si $\forall \ u \in U$, l'ensemble $A_u = \{v \in V | f(v) \prec u\}$ (resp. $A_u = \{v \in V | u \prec f(v)\}$) est convexe dans V.[1])

Dans tout ce qui suit, V sera un ensemble convexe de l'espace vectoriel $\tilde{V}$. Considérons une définition équivalente souvent utile.

[1]) Le $\emptyset$ est considéré comme convexe.

Proposition I–1. *U étant un ensemble semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement), une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de V dans U soit quasi-convexe (resp. quasi-concave) est que $\forall\ v_1$ et $v_2 \in V$, et $\forall\ \lambda \in [0, 1]$,*

$$f(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \prec f(v_1) \vee f(v_2)$$

(resp. $f(v_1) \wedge f(v_2) \prec f(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2)$).

En effet, pour le cas quasi-convexe par exemple, la condition suffisante vient de ce que $\forall\ u \in U$,

$$v_1 \text{ et } v_2 \in A_u \Rightarrow f(\lambda v_1 + -\lambda)v_2)(1 \prec f(v_1) \vee f(v_2) \prec u \Rightarrow \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in A_u.$$

La condition nécessaire est vraie car $\forall\ v_1$ et $v_2 \in V$, alors $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in A_{f(v_1) \vee f(v_2)}$, donc $f(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \prec f(v_1) \vee f(v_2)$.

Notons par $\mathscr{F}(V, U)$ l'espace de toutes les applications de V dans l'ensemble U semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement), par $\mathcal{Q}(V, U)$ (resp. $\mathcal{Q}'(V, U)$) l'ensemble de toutes les applications quasi-convexes (resp. quasi-concaves) de V dans U. Nous savons que la relation d'ordre $\prec$ sur U induit une relation d'ordre sur $\mathscr{F}(V, U)$ et que $\mathscr{F}(V, U)$ muni de cette relation d'ordre est un ensemble semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement).

Proposition I–2. *Considérons U semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement). Alors*

$$f \in \mathcal{Q}(V, U) \Leftrightarrow \varphi_{v_1 v_2} \in \mathcal{Q}([0, 1], U)$$

(resp. $f \in \mathcal{Q}'(V, U) \Leftrightarrow \varphi_{v_1 v_2} \in Q'([0, 1], U)$), $\forall\ v_1$ et $v_2 \in V$, où $\varphi_{v_1 v_2}(\lambda) = f(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2)$, pour $\lambda \in [0, 1]$.

La démonstration est la même que celle donnée dans le cas numérique.

Proposition I–3. *$\mathcal{Q}(V, U)$ (resp. $\mathcal{Q}'(V, U)$) muni de la relation d'ordre dans $\mathscr{F}(V, U)$ est un ensemble semi réticulé supérieurement (resp. inférieurement).*

En effet, cette proposition est équivalente à la suivante (énoncée uniquement pour le cas quasi-convexe):

Si I est un ensemble fini d'indices, U un ensemble semi réticulé supérieurement, et $f_i \in \mathcal{Q}(V, U)$, $\forall\ i \in I$, alors $\sup_{i \in I} f_i \in \mathcal{Q}(V, U)$, où $\sup_{i \in I} f_i$ désigne l'application qui à tout $v \in V$, fait correspondre l'élément

$$(\sup_{i \in I} f_i)(v) = \bigvee_{i \in I} f_i(v), \quad \text{de} \quad U.$$

Sa démonstration est évidente si on s'appuie sur la proposition I-1.

Nous disons que U est un semi-espace de Riesz (sup.) (resp. (inf.)) si c' est un espace vectoriel ordonné dont la structure d'ordre est celle d'un ensemble semi-réticulé supérieurement (resp. inférieurement). Lorsque U est réticulé, nous l'appelons, avec [1], espace de Riesz. Si U est un espace de Riesz, alors il en est de même de $\mathscr{F}(V, U)$. Notons par $\mathcal{K}(V, U)$ l'ensemble de toutes les applications convexes de V dans U. Nous savons que $\mathcal{K}(V, U)$ est un cône convexe semi-réticulé supérieurement dans $\mathscr{F}(V, U)$.

Pour ne pas alourdir le texte, nous n'énonçons que les résultats concernant le cas quasi-convexe, laissant au lecteur le soin de transposer au cas quasi-concave.

Proposition I–4. *Si U est un semi espace de Riesz (sup.), alors*

(i) $\mathcal{Q}(V, U)$ *est un cône semi-réticulé supérieurement (non convexe) de* $\mathcal{F}(V, U)$.
(ii) $\mathcal{Q}(V, U) \supset \mathcal{K}(V, U)$.

La définition de convexité adoptée ici inclut par exemple les applications de R^n dans R^m dont chacune des m composantes est une fonction numérique convexe.

Enonçons enfin une propriété où n'intervient que l'hypothèse d'espace vectoriel ordonné pour U.

Proposition I–5. *Soit U un espace vectoriel ordonné, et U' un ensemble semi-réticulé supérieurement. Alors,* $f \in \mathcal{K}(V, U)$ *et* $\varphi \in \mathcal{Q}(U, U')$ *où* φ *est une application croissante* $\Rightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{Q}(V, U')$.

La démonstration est particulièrement simple si on utilise la proposition I-1.

Nous ne citons pas les autres propriétés relatives a des fonctions numériques quasi-convexes différentiables, et renvoyons a [2] et [3].

II.

Soient $\tilde{V}$ et $\tilde{W}$ deux espaces vectoriels réels, soit V un ensemble convexe de $\tilde{V}$, et W un ensemble convexe de $\tilde{W}$. Soit $\{B_b\}_{b \in W}$ une famille de sous-ensembles de V, indicée par b, et supposons que cette famille vérifie l'hypothèse (H_1) suivante:

$$\forall b_1 \text{ et } b_2 \in W, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad \forall v_1 \in B_{b_1} \text{ et } \forall v_2 \in B_{b_2},$$
$$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in B_{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2}.$$

Cette hypothèse a été introduite dans [4] et les propriétés qui en proviennent ont été données dans ce même papier. Rappelons simplement que $\forall b \in W$, B_b est un sous-ensemble convexe de V. Un exemple de cette famille est le suivant:

Soit $-F \in \mathcal{K}(R^n, R^k)$, où R est l'ensemble des nombres réels. Si F_j, $j = 1, \ldots, k$, désigne la j-ième composante de F, alors on prend $V = R^n$, $W = \{b \in R^k | b < \sup_{v \in R^n,\, j=1,\ldots,k} \inf F_j(v)\}$ et $B = \{v \in R^n | F(v) \geqq b\}$. La notation $F(v) \geqq b$ signifie que chaque composante de $F(v)$ est $\geqq$ la composante correspondante de b.

Nous ne nous attardons pas sur ces détails et renvoyons à [4].

Dans qui suit, nous considérons uniquement le cas où $U = R$.

Proposition II–1. *Supposons que* $\{B_b\}_{b \in W}$ *vérifie* (H_1) *et posons* $\alpha(b, f) = \inf_{v \in B_b} f(v)$. *Alors,*

1) $\forall f \in \mathcal{Q}(V, R)$, $\alpha(., f) \in \mathcal{Q}(W, R)$,
2) $\forall b \in W$, $-\alpha(b, .) \in \mathcal{K}[H\mathcal{Q}(V, R), R]$,

où $H\mathcal{Q}(V, R)$ *désigne l'enveloppe convexe de* $\mathcal{Q}(V, R)$ *dans* $\mathcal{F}(V, R)$.

Démonstration. 1) Fixons $f \in \mathcal{Q}(V, R)$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists v_1 \in B_{b_1}$ et $v_2 \in B_{b_2}$ tels que $f(v_1) \leqq \alpha(b_1, f) + \varepsilon$, $f(v_2) \leqq \alpha(b_2, f) + \varepsilon$. On a donc $f(v_1) \vee f(v_2) \leqq [\alpha(b_1, f) \vee \alpha(b_2, f)] + \varepsilon$, la relation d'ordre étant ici la relation d'ordre naturelle sur R. D'où $\forall \lambda \in [0, 1]$ et $\forall \varepsilon > 0$,

$$\inf_{v \in B_{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2}} f(v) \leqq f(\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2) \leqq f(v_1 \vee f(v_2) \leqq [\alpha(b_1, f) \vee \alpha(b_2, f)] + \varepsilon$$

car $f \in \mathcal{Q}(V, R)$. On a bien

$$\alpha(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2, f) \leqq \alpha(b_1, f) \vee \alpha(b_2, f).$$

2) Pour b fixé $\in W$, montrons que $\forall f$ et $g \in H\mathcal{Q}(V, R)$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\alpha(b, \lambda f + (1-\lambda) g) \geqq \lambda \alpha(b, f) + (1-\lambda) \alpha(b, g).$$

Ceci vient tout simplement de ce que $\lambda f + (1-\lambda) g \in H\mathcal{Q}(V, R)$ et que $\inf_{v \in B_b} [\lambda f + (1-\lambda) g](v) \geqq \inf_{v \in B_b} f(v) + (1-\lambda) \inf_{v \in B_b} g(v)$.

Proposition II–2. *Supposons que* $\{B_b\}_{b \in W}$ *vérifie* (H_1). *Posons comme précédemment* $\alpha(b, f) = \inf_{v \in B_b} f(v)$. *Alors*

1) $\forall f \in \mathcal{H}(V, R)$, $\alpha(., f) \in \mathcal{H}(W, R)$,
2) $\forall b \in W$, $-\alpha(b, .) \in \mathcal{H}[\mathcal{H}(V, R), R]$.

La démonstration de 1) est faite dans [4], proposition 1-2. Quant a 2), elle provient simplement du fait que $\mathcal{H}(V, R)$ est un cône convexe de $\mathcal{F}(V, R)$.

Supposons que $\tilde{V}$ soit le produit de deux espaces vectoriels réels $\tilde{V} = X \times Y$. Soit $f \in \mathcal{Q}(V, R)$. Notons par

$$X(B_b) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ pour lequel } (x, y) \in B_b\}$$

et par $B_b^x = \{y \in Y \mid (x, y) \in B_b\}$.

Fixons $b \in W$ et considérons l'application $\gamma(b, .) \in \mathcal{F}[X(B_b), R]$ définie de la façon suivante: à $x \in X(B_b)$, $\gamma(b, .)$ fait correspondre $\gamma(b, x) = \inf_{y \in B_b^x} f(x, y)$.

Nous avons la

Proposition II–3. *Si* $\{B_b\}_{b \in W}$ *vérifie l'hypothèse* (H_1), *si* $V = X \times Y$, *alors*

1) $f \in \mathcal{Q}(V, R) \Rightarrow \gamma(b, .) \in \mathcal{Q}[X(B_b), R]$,
2) $f \in \mathcal{H}(V, R) \Rightarrow \gamma(b, .) \in \mathcal{H}[X(B_b), R]$.

DÉMONSTRATION. 1) Examinons le cas $f \in \mathcal{Q}(V, R)$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_1 \in B_b^{x_1}$ et $y_2 \in B_b^{x_2}$ tels que $f(x_1, y_1) \leqq \gamma(b, x_1) + \varepsilon$ et $f(x_2, y_2) \leqq \gamma(b, x_2) + \varepsilon$. Donc $f(x_1, y_1) \vee \vee f(x_2, y_2) \leqq [\gamma(b, x_1) \vee \gamma(b, x_2)] + \varepsilon$, l'opération $\vee$ étant prise dans le sens de la relation d'ordre naturelle sur R. Finallement, puisque $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in B_b^{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}$, (cf. [4]),

$$\inf_{y \in B_b^{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}} f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, y) \leqq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \leqq$$

$$\leqq f(x_1, y_1) \vee f(x_2, y_2) \leqq [\gamma(b, x_1) \vee \gamma(b, x_2)] + \varepsilon,$$

car $f \in \mathcal{Q}(V, R)$.

Ce qui montre que

$$\gamma(b, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqq \gamma(b, x_1) \vee \gamma(b, x_2).$$

2) Le cas $f \in \mathcal{H}(V, R)$ a été démontré dans [4].

Nous allons maintenant considérer les fonctions f d'un type particulier.

Dans ce qui suit, disons que $\{V_i\}_{i \in I}$ forment un recouvrement exact fini convexe de V, si I est un ensemble fini d'indices et si les A_i sont des sous-ensembles convexes de V, tels que $\bigcup_{i\in I} V_i = V$. Nous dirons que $\{V_i\}_{i\in I}$ forment une partition finie convexe si, de plus, $V_i \cap V_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

La fonction $f \in \mathcal{F}(V, R)$ est dite vérifiant *l'hypothèse* (H_2) (resp. (H'_2)) si $\exists$ une partition finie convexe $\{V_i\}_{i\in I}$ de V, telle que $\forall\, i \in I, f_i \in \mathcal{Q}(V_i, R)$ (resp. $f_i \in \mathcal{K}(V_i, R)$), f_i désignant la restriction de f a V_i.

Nous noterons par card (E), le cardinal de l'ensemble E. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant:

Proposition II–4. *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *(resp.*(H'_2)*) soient vérifiées. Alors,* $\exists$ *un recouvrement exact fini convexe* $\{W_j\}_{\in J}$ *de* W *tel que* $\forall\, j \in J$, $\alpha_j(.\,, f) \in \mathcal{Q}(W_j, R)$ *(resp.* $\alpha_j(.\,, f) \in \mathcal{K}(W_j, R)$*), où* $\alpha_j(.\,, f)$ *est la restriction de* $\alpha(.\,, f)$ *à* W_j, *avec* card (J) $\leqq$ card (I). *Dans le cas très particulier où* $W \subset R$, *au lieu du recouvrement* $\{W_j\}_{j\in J}$ *énoncé, on a une partition finie convexe* $\{W'_j\}_{j\in J}$ *de* W.[2])

DÉMONSTRATION. Posons $W_i = \{b \in W \mid B_b \cap V_i \neq \emptyset\}$, $\forall\, i \in I$. Par construction, les W_i sont en nombre fini. Ils forment un recouvrement exact de W, car $\forall\, i \in I$, $W_i \subset W$, ce qui entraine que $\bigcup_{i\in I} W_i \subset W$; d'autre part, $B_b \cap (\bigcup_{i\in I} V_i) \neq \emptyset$ entraine $W \subset \bigcup_{i\in I} W_i$.

Montrons maintenant que $\forall\, i \in I$, W_i est convexe. En effet,

$$b_1 \in W_i \Rightarrow B_{b_1} \cap V_i \neq \emptyset,$$

$$b_2 \in W_i \Rightarrow B_{b_2} \cap V_i \neq \emptyset.$$

Soient alors $v_1 \in B_{b_1} \cap V_i$ et $v_2 \in B_{b_2} \cap V_i$. D'après (H_1),

$$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in B_{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2}.$$

D'autre part, W_i convexe $\Rightarrow \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in V_i$. D'où $\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in B_{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2} \cap$ $\cap V_i$. Ce qui montre que $B_{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2} \cap V_i \neq \emptyset$, c'est a dire que $\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2 \in W_i$. D'où convexité de W_i.

D'après la proposition II-1 (resp. proposition II-2), $f_i \in \mathcal{Q}(V_i, R)$ (resp. $f_i \in$ $\in \mathcal{K}(V_i, R)$) $\Rightarrow \alpha_i(.\,, f) \in \mathcal{Q}(W_i, R)$ (resp. $\alpha_i(.\,, f) \in \mathcal{K}(W_i, R)$).

Naturellement, les W_i ne sont pas disjoints: un même B_b peut être tel que $B_b \cap V_i \neq \emptyset$ et $B_b \cap V_j \neq \emptyset$. La réunion $W_i \cup W_j$ n'est pas forcément convexe. D'autre part, même si $W_i \cup W_j$ est convexe, la restriction de f à $W_i \cup W_j$ n'est quasiconvexe (resp. convexe) que dans des cas très particuliers, mais qui peuvent quand même se présenter. D'où card $(J) \leqq$ card (I). Les convexes de R étant des intervalles, l'existence d'une partition finie convexe dans le cas où $W \subset R$ devient évidente. Pour les autres cas, nous sommes conduits au problème suivant: étant donnés deux convexes dont l'intersection n'est pas vide, est-il possible de partitionner leur réunion en un nombre fini de convexes disjoints Nous en ignorons la réponse.

[2]) Pour le cas de $W \subset R^2$, il semble intuitivement vrai qu'on a aussi une partition finie convexe $\{W'_i\}_{i\in L}$ de W. Mais nous ignorons ce qui se passe pour R^n, $n \geqq 3$, et surtout lorsque $\tilde{W}$ est un espace vectoriel quelconque.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, Elements de Mathématiques (en particulier, Théorie des Ensembles, Livre I, Chapitre III, et Intégration, Livre VI, Chapitre II), *Paris*, (1952).
[2] C. Berge, Espaces topologiques, Fonctions multivoques. *Paris*, 1959.
[3] K. J. Arrow et A. C. Enthoven, Quasi-concave programing, *Econometrica*, **29** (1961), 779—800.
[4] B. T. Liêũ, On a problem of convexity and its applications to nonlinear stochastic programming, *J. Math. Anal. Appl.* **8** (1964), 177—187.

(Reçu le 18. juin 1963.)