

Eine Bemerkung über biperfekte topogene Ordnungen

Von SÁNDOR GACSÁLYI (Debrecen)

Wir verwenden die Terminologie und die Bezeichnungen des Buches [1]. Der Vollständigkeit halber sei hier davon das für unsere Zwecke notwendige zusammengestellt:

Wir nennen *halbtogogene Ordnung* auf einer Menge E eine Relation $<$, die auf der Menge aller Teilmengen von E definiert ist und den folgenden Axiomen genügt:

- (0₁) $0 < 0, E < E$.
- (0₂) Aus $A < B$ folgt $A \subset B$.
- (0₃) Aus $A \subset A' < B' \subset B$ folgt $A < B$.

Die halbtogogene Ordnung $<$ werde *biperfekte topogene Ordnung* genannt, wenn sie das folgende Axiom erfüllt:

(B) Aus $A_i < B_i$ ($i \in I$) folgen

$$\bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} A_i < \bigcap_{i \in I} B_i$$

für eine beliebige Indexmenge I .

Ziel der vorliegenden kurzen Bemerkung ist es, einen alternativen Beweis für die in [1] gegebene Charakterisierung der „biperfekten Hülle“ einer beliebigen halbtogogenen Ordnung darzulegen.

Vor allem benötigen wir den folgenden

Satz 1.¹⁾ *Ist $<$ eine beliebige halbtogogene Ordnung auf E , so gibt es eine biperfekte topogene Ordnung, die feiner ist als $<$ und gröber als alle anderen biperfekten topogenen Ordnungen feiner als $<$. Diese biperfekte topogene Ordnung wird mit $<^b$ bezeichnet und kann folgenderweise definiert werden:*

$A <^b B$ bedeutet, daß $x < E - y$ gilt für alle $x \in A, y \in E - B$.

BEWEIS. Man sieht leicht ein, daß $<^b$ eine halbtogogene Ordnung ist. (0₁) ist trivialerweise erfüllt, da $x \in 0$ bzw. $y \in E - E$ niemals gilt. — Was (0₂) betrifft, so folgt aus $x < E - y$ die Beziehung $\{x\} \subset E - y$ für $x \in A, y \in E - B$, und somit

$$x \in \bigcap_{y \in E - B} (E - y) = B \quad \text{für } x \in A,$$

d. h. $A \subset B$.

¹⁾ Dies ist der Satz (5.37)–(5.38) von [1], der dort aus der Identität $<^b = <^{cpcp}$ hergeleitet wird. Wir geben hier einen sich unmittelbar auf die Grundbegriffe stützenden Beweis. Aus dem in [1] mitgeteilten Beweis wird, wenn man die Schlüsse rückwärts durchläuft, ein Beweis der Formel $<^b = <^{cpcp}$.

Endlich sei

$$A_1 \subset A <^b B \subset B_1.$$

Aus $x \in A_1$ folgt $x \in A$ und aus $y \in E - B_1$ folgt $y \in E - B$. Somit folgt aus $x < E - y$ für $x \in A$, $y \in E - B$ die Gültigkeit derselben Beziehung für $x \in A_1$ und $y \in E - B_1$. Damit haben wir auch (0_3) nachgewiesen.

Die halbtogogene Ordnung $<^b$ ist eine biperfekte topogene Ordnung. In der Tat sei $A_i <^b B_i$ für $i \in I$ (I eine beliebige Indexmenge). Aus $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $y \in E - \bigcup_{i \in I} B_i$ folgt $x \in A_{i_1}$, $y \in E - B_{i_1}$ für irgendein $i_1 \in I$, und somit wegen $A_{i_1} <^b B_{i_1}$ auf Grund von (0_3) auch

$$x < E - y.$$

Damit haben wir $\bigcup_{i \in I} A_i <^b \bigcup_{i \in I} B_i$ bewiesen. — Ist anderseits $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, $y \in E - \bigcap_{i \in I} B_i$, so gilt $y \in E - B_{i_2}$, $x \in A_{i_2}$ für irgendein $i_2 \in I$, und daraus folgt wegen $A_{i_2} <^b B_{i_2}$ auf Grund von (0_3)

$$x < E - y.$$

Damit haben wir auch $\bigcap_{i \in I} A_i < \bigcap_{i \in I} B_i$ bewiesen.

Offenbar gilt $< \subset <^b$ (wegen (0_3)). Aus $< \subset <^*$ ($<^*$ eine biperfekte topogene Ordnung) folgt $<^b \subset <^*$.

Aus $A < B$, d. h. aus

$$x < E - y \quad (x \in A, y \in E - B)$$

folgt nämlich wegen $< \subset <^*$

$$x <^* E - y \quad (x \in A, y \in E - B)$$

und daraus wegen der Biperfektheit von $<^*$

$$x <^* \bigcap_{y \in E - B} (E - y) = B \quad (x \in A)$$

und so

$$A <^* B.$$

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

Der folgende Satz ist derjenige, mit dessen Hilfe in [1] die „biperfekte Hülle“ einer halbtogogenen Ordnung charakterisiert wird²⁾:

Satz 2. *Ist $<$ eine beliebige halbtogogene Ordnung auf E , so gilt $A <^b B$ dann und nur dann, wenn es zwei Indexmengen I und J , sowie geeignete Mengen A_i, B_j ($i \in I, j \in J$) gibt mit*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

$$B = \bigcap_{j \in J} B_j$$

$$A_i < B_j \quad (i \in I, j \in J).$$

²⁾ Satz (5.9)–(5.13) in [1]. Dieser Satz wird in [1] ohne ausführlichen Beweis, unter Hinweis auf die Analogie mit einem früher bewiesenen Satz mitgeteilt. Der hier gegebene Beweis scheint einfacher zu sein, als derjenige der sich auf Grund der erwähnten Analogie konstruieren läßt.

BEWEIS. Die Notwendigkeit der Bedingungen des Satzes ist klar: Gilt $A <^b B$, so sind diese Bedingungen mit

$$A = \bigcup_{x \in A} x \quad \text{und} \quad B = \bigcap_{y \in E-B} (E-y)$$

erfüllt.

Andererseits sind diese Bedingungen auch hinreichend. Gelten sie, so hat man für $x \in A$ und $y \in E-B$, d. h. für $x \in A_{i_1}$, $y \in E-B_{j_1}$ ($i_1 \in I$, $j_1 \in J$)

$$A_{i_1} < B_{j_1},$$

und daraus folgt auf Grund von $x \in A_{i_1}$ und $B_{j_1} \subset E-y$

$$x < E-y.$$

Es gilt also $A <^b B$, w. z. b. w.

Literatur

[1] Á. CSÁSZÁR, Grundlagen der allgemeinen Topologie, Budapest—Leipzig, 1963.

(Eingegangen am 11. Juli 1963.)