Eine Charakterisierung des 0-Radikals einer Halbgruppe

Von HANS-JÜRGEN HOEHNKE (Berlin)

In einer kürzlich erschienenen Note [3] hat A. KERTÉSZ die auf dem Begriff der Frattinischen Untergruppe einer Gruppe beruhende Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals eines Ringes mit Einselement durch FUCHS [1] auf beliebige Ringe übertragen können. In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß sich das von mir in [2] eingeführte 0-Radikal $\mathrm{rad}^0 S$ einer Halbgruppe S (mit Nullelement 0), das im folgenden das 0-Rechtsradikal $\mathrm{rad}_r^0 S$ genannt wird, in analoger Weise charakterisieren läßt.

Es sei S eine Halbgruppe mit Null 0 und α eine Relation in S, d. h. eine Teilmenge von $S\times S$. Die von α erzeugte Rechtskongruenz in S (d. h. der Durchschnitt aller Rechtskongruenzen ϱ in S mit $\alpha\subseteqq\varrho$) sei $\{\alpha\}_r$. Bezeichnet $\varrho\vee\sigma$ das Supremum zweier Rechtskongruenzen ϱ und σ im Verband $\mathfrak{K}_r$ aller Rechtskongruenzen in S, so gilt für zwei Relationen α und β in S offenbar $\{\alpha\}_r\vee\{\beta\}_r=\{\alpha\cup\beta\}_r$, wo $\alpha\cup\beta$ die mengentheoretische Vereinigung von α und β ist. Eine Relation α in S heißt eine rechts erzeugende Relation der Allrelation $\mathbf{1}$ in S wenn $\{\alpha\}_r=\mathbf{1}$. Wir betrachten die Gesamtheit $\Phi_r^0(S)$ aller der Elemente $a\in S$, welche die Eigenschaft besitzen, daß $(xa, 0)$ für jedes $x\in S$ aus jeder rechts erzeugenden Relation von $\mathbf{1}$ gestrichen werden darf. D. h., aus $\{\{(xa,0)\}\cup\alpha\}_r=\mathbf{1}$, wo $x\in S$ und α eine Relation in S ist, soll stets folgen $\{\alpha\}_r=\mathbf{1}$.

Satz. *Es gilt* $\Phi_r^0(S)=\mathrm{rad}_r^0 S$ *für jede Halbgruppe* S *mit Nullelement.*

BEWEIS. 1. Wir zeigen zuerst, daß $\mathrm{rad}_r^0\, S\subseteqq\Phi_r^0(S)$. Wenn $a\in S$, $a\notin\Phi_r^0(S)$, so existieren ein Element $x\in S$ und eine Relation β in S, für welche

$$\{\{(xa,0)\}\cup\beta\}_r=\mathbf{1} \tag{1}$$

und $\{\beta\}_r\neq\mathbf{1}$. Es sei μ eine Rechtskongruenz in S, so daß $\beta\subseteqq\mu$, $(xa,0)\notin\mu$ und daß μ maximal in $\mathfrak{K}_r$ bezüglich dieser Eigenschaft ist. (Nach dem ZORNschen Lemma existiert stets ein solches μ.) Zufolge (1) ist μ eine maximale Rechtskongruenz in S. Daraus ergibt sich, daß das Restklassensystem S/μ von S bezüglich μ ein irreduzibles (sogar total irreduzibles) S-System im Sinne von [2] ist. Denn bezeichnet $\bar{u}$ die Restklasse eines Elementes $u\in S$ bezüglich μ, so gilt wegen $(xa,0)\notin\mu$

$$\bar{x}a\neq\bar{0}. \tag{2}$$

Die Menge $F(S/\mu)$ der Fixelemente von S/μ enthält nur das Element $\bar{0}$, da $F(S/\mu)=(S/\mu)0=\{\bar{0}\}$. Da S/μ außer sich selbst und $\{\bar{0}\}$ keine S-Teilsysteme enthält und $\bar{x}S\neq\{\bar{0}\}$ ist, so muß sein $\bar{x}S=S/\mu$ und daher erst recht $(S/\mu)S=S/\mu$. Damit ist gezeigt, daß S/μ (total) irreduzibel ist. Dies hat mit Rücksicht auf (2) zur Folge, daß für geeigentes $b \in S$ die Beziehung

$$\bar{x}ab = \bar{x} \neq \bar{0} \tag{3}$$

besteht. Benutzt man die Darstellung $\mathrm{rad}_r^0\, S = \bigcap_{M \in I} M^0$, wo I die Menge aller irreduziblen S-Systeme ist, und die in [2] angegebene Definition von M^0, so folgt aus (3) $a \notin (S/\mu)^0$ und daher $a \notin \mathrm{rad}_r^0\, S$.

2. Nachweis von $\Phi_r^0(S) \subseteq \mathrm{rad}_r^0\, S$. Es sei $a \in S$, $a \notin \mathrm{rad}_r^0\, S$. Jetzt gehen wir auf die in [2] im Beweis von Satz 20 angegebene Darstellung $\mathrm{rad}_r^0\, S = \bigcap_{M \in T} M^{-1}\{0\}$ zurück, wo T die Menge der total irreduziblen S-Systeme ist. Es existiert dann ein $M \in T$, so daß $Ma \neq \{0\}$, und, wegen $MS = M$, ein Element $x \in S$, so daß $Mxa \neq \{0\}$, wo 0 das Fixelement von M bezeichnet. Es sei z ein Element von M für welches $zxa \neq 0$. Dann ist $z \neq 0$ und $M = zS$. Durch $(a, b) \in \mu_z \Leftrightarrow za = zb$ ist eine maximal modulare Rechtskongruenz μ_z in S definiert, wobei wegen $zxa \neq z0$ jedenfalls $(xa, 0) \notin \mu_z$. Da μ_z maximal in $\mathfrak{R}_r$ ist, muß sein $\{\{(xa, 0)\} \cup \mu_z\}_r = \mathbf{1}$. Nach Definition ist aber sicher $\mu_z \neq \mathbf{1}$, somit $a \notin \Phi_r^0(S)$. Damit ist der Beweis unseres Satzes abgeschlossen.

Wenn $\Phi_l^0(S)$, $\mathrm{rad}_l^0\, S$ in analoger Weise wie $\Phi_r^0(S)$, $\mathrm{rad}_r^0\, S$ (unter Vertauschung von „rechts" und „links") definiert werden, so gilt auch $\Phi_l^0(S) = \mathrm{rad}_l^0\, S$. Es scheint eine offene Frage zu sein, ob stets $\mathrm{rad}_r^0\, S = \mathrm{rad}_l^0\, S$ zutrifft.[1])

Literatur

[1] L. Fuchs, A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 167–168.
[2] H.-J. Hoehnke, Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, *Math. Nachr.* **26** (1963/64), 1–13.
[3] A. Kertész, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 595–597.
[4] H. Seidel, Über das Radikal einer Halbgruppe, *Math. Nachr.* (im Druck).

(Eingegangen am 22. Juli 1963.)

[1]) (Zusatz bei Korrektur.) Diese Frage wurde inzwischen in positivem Sinne gelöst. Genauer wird in [4] bewiesen, daß $\mathrm{rad}_r^0\, S$ mit der Gesamtheit aller eigentlich nilpotenten Elemente von S übereinstimmt.