Abzählung von Wäldern eines gegebenen Typs in regulären und biregulären Graphen, I.

Von HORST SACHS (Halle/Saale)

1. Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit war der Satz 2, welcher besagt, daß die Anzahl der in einem regulären Graphen G enthaltenen Wälder, die zu einem gegebenen Walde isomorph sind, unter gewissen Bedingungen von der speziellen Struktur des Graphen G weitgehend unabhängig ist. Dieser Satz läßt sich zu einem Anzahlsatz für „bireguläre" Graphen verallgemeinern, und da dessen Beweis nicht schwieriger ist als der Beweis von Satz 2, soll er hier ebenfalls formuliert und bewiesen werden (Satz 1).

Schließlich beweisen wir noch einen weiteren, mit Satz 2 verwandten Satz (Satz 3), welcher für gewisse, später zu behandelnde Fragen von Bedeutung ist

2. Definitionen und Bezeichnungen

Wir betrachten endliche ungerichtete Graphen G. Schlingen und Mehrfachkanten sind zugelassen. Der Grad eines Knotenpunktes K ist die Anzahl der mit K inzidierenden Kanten, wobei Schlingen doppelt zu zählen sind. G heißt regulär vom Grade r, wenn jeder Knotenpunkt von G den Grad r hat. G heißt paar, wenn die Menge der Knotenpunkte so in zwei Klassen **A** und **B** zerlegt werden kann, daß keine zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse durch eine Kante verbunden sind. G heißt biregulär von den Graden r und s, wenn G paar ist und wenn jeder A-Knotenpunkt (= Knotenpunkt der Klasse **A**) den Grad r und jeder B-Knotenpunkt den Grad s hat.

Die Anzahl der in einem Weg oder Kreis enthaltenen Kanten heißt die Länge des Weges oder Kreises bzw. (eine Schlinge ist ein Kreis der Länge 1, zwei Kanten, welche die gleichen Knotenpunkte K, K' $(K' \neq K)$ miteinander verbinden, bilden einen Kreis der Länge 2). Der Abstand $|K, K'|$ zweier Knotenpunkte K, K' ist die Länge des kürzesten K mit K' verbindenden Weges. Den Abstand $|K, L|$ einer Kante L mit den Endknotenpunkten K_1, K_2 vom Knotenpunkt K definieren wir als

$$|K, L| = \min(|K, K_1|, |K, K_2|) + 1/2.$$

Ein in G enthaltener Kreis minimaler Länge heißt ein Taillenkreis von G, seine Länge t heißt die Taillenweite $t = t(G)$ von G; besitzt G keinen Kreis, so sei $t(G) = \infty$.

Ein Wald ist ein kreisloser Graph, ein Baum ist ein zusammenhängender kreisloser Graph. Ein AB—Wald ist ein Wald, dessen Knotenpunkte fest in zwei Klassen **A** und **B** eingeteilt sind derart, daß keine zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse durch eine Kante verbunden sind. Zwei AB-Wälder sind isomorph, wenn sie sich so zur Deckung bringen lassen, daß hierbei stets Knotenpunkte gleicher Klassen einander entsprechen. Der Durchmesser d eines Baumes H ist die Länge des längsten in H enthaltenen Weges, die Durchmessersumme D eines Waldes W ist die Summe der Durchmesser der einzelnen zusammenhängenden Komponenten von W.

Ein Untergraph U von G heißt ein wesentlicher Untergraph von G, wenn jede Kante von G, welche zwei Knotenpunkte von U in G miteinander verbindet, zu U gehört.

Der AB-Wald W habe die Komponenten H_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, V_i sei ein längster in H_i enthaltener Weg (ist H_i ein isolierter Knotenpunkt, so sei $V_i = H_i$). C sei ein Kreis gerader Länge, dessen Knotenpunkte abwechselnd den Klassen **A** und **B** angehören. Wir sagen, W überdeckt den Kreis C, wenn es möglich ist, die Wege V_i so auf C zu legen (und zwar ohne Rücksicht auf Überlappungen, aber ohne Sehnen zu bilden), daß jeder Knotenpunkt von C von mindestens einem Knotenpunkt der gleichen Klasse von W und jede Kante von C von mindestens einer Kante von W überdeckt wird. Die Länge des größten von W überdeckten Kreises C_1 nennen wir die 1. Überdeckungsweite $w_1 = w_1(W)$ (Abb. 1a). Enthält W gar keine oder nur eine Kante, so sei $w_1 = 0$. Wir sagen, W überdeckt den Kreis C schwach, wenn es möglich ist, die Wege V_i (ohne Rücksicht auf Überlappungen, aber ohne Sehnen zu bilden) so auf C zu legen, daß jeder Knotenpunkt von C von mindestens einem Knotenpunkt der gleichen Klasse von W überdeckt wird (es braucht jedoch nicht jede Kante von C von einer Kante von W überdeckt zu werden). Die Länge des größten von W schwach überdeckten Kreises C_2 nennen wir die 2. Überdeckungsweite $w_2 = w_2(W)$ (Abb. 1b). Besteht W aus lauter isolierten Knotenpunkten der gleichen Klasse, so sei $w_2 = 0$.

Ersichtlich ist

$$w_1(W) \leqq D(W) \leqq w_2(W),$$

und man beweist auch ohne Mühe die folgende Ungleichung:

$$D(W) - 2 \leqq w_1(W) \leqq D(W) \leqq w_2(W) \leqq D(W) + n;$$

für einen Baum H gilt,

falls $d(H)$ gerade ist: $w_1(H) = w_2(H) = d(H)$
falls $d(H)$ ungerade ist: $w_1(H) = d(H) - 1$, $w_2(H) = d(H) + 1$.

Die Bedeutung der Überdeckungsweiten besteht in folgendem: Werden die Bäume H_i beliebig (etwa in der Ebene) ausgebreitet, wobei Überlappungen gestattet sind (d. h. es dürfen mehrere Knotenpunkte der gleichen Klasse sowie mehrere Kanten zusammenfallen), und enthält der so entstehende Graph G_1 einen Kreis, so enthält er auch gewiß einen Kreis, dessen Länge $\leqq w_1$ ist. Werden weiter zu G_1 keine, eine oder mehrere, jeweils einen A-Knotenpunkt mit einem B-Knotenpunkt verbindende Kanten in beliebiger Weise hinzugenommen und enthält der so entstehende Graph G_2 einen Kreis, so enthält er auch einen Kreis, dessen Länge $\leqq w_2$ ist (unabhängig davon, ob bereits G_1 einen Kreis enthält oder nicht).

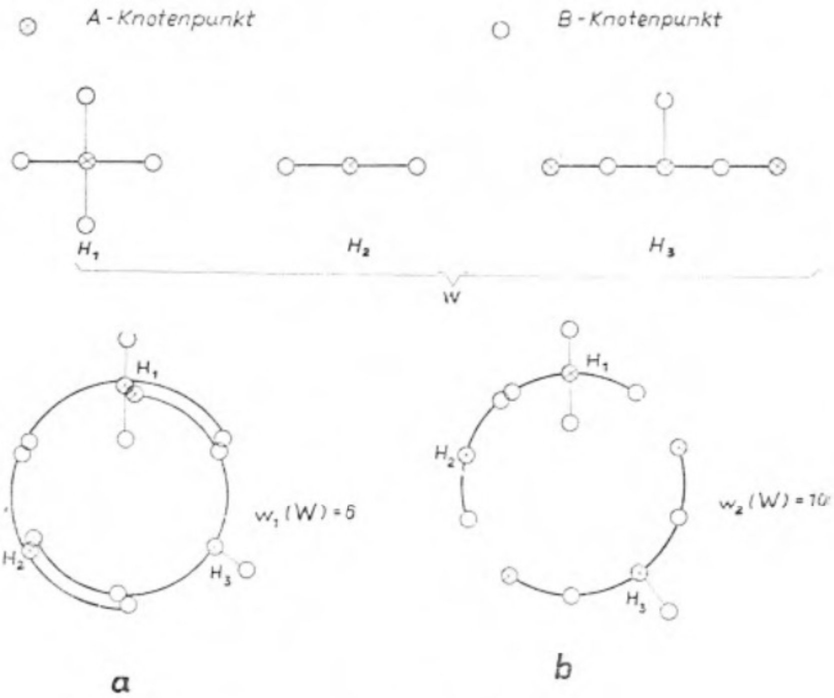

Abb. 1

Bezeichnungen:

G	Graph
H	Baum
W	Wald
V	Weg
C	Kreis
L	Kante
K	Knotenpunkt (allgemein)
P	A-Knotenpunkt
Q	B-Knotenpunkt
r	Grad
r, s	Grade eines biregulären Graphen
$G(r)$	regulärer Graph vom Grade r
$G(r, s)$	biregulärer Graph von den Graden r, s

l	Anzahl der Kanten
k	Anzahl der Knotenpunkte
p	Anzahl der A-Knotenpunkte
q	Anzahl der B-Knotenpunkte
n	Anzahl der Komponenten
t	Taillenweite
d	Durchmesser eines Baumes
D	Durchmessersumme eines Waldes
w_1	1. Überdeckungsweite
w_2	2. Überdeckungsweite

3. Resultate

Satz 1. *Es seien W ein beliebiger AB-Wald und $G = G(r, s)$ ein beliebiger biregulärer Graph mit p A-Knotenpunkten vom Grade r und q B-Knotenpunkten vom Grade s. G habe die Taillenweite t. Dann gilt:*

(I) *Wenn t größer ist als die erste Überdeckungsweite w_1 von W, so hängt die Anzahl $A_1 = A_1(W, G)$ der in G als Untergraphen enthaltenen verschiedenen zu W isomorphen Wälder außer von W nur von den Zahlen $p, q; r, s$ ab.*

(II) *Wenn t größer ist als die zweite Überdeckungsweite w_2 von W, so hängt auch die Anzahl $A_2 = A_2(W, G)$ der in G als* w e s e n t l i c h e *Untergraphen enthaltenen verschiedenen zu W isomorphen Wälder außer von W nur von den Zahlen $p, q; r, s$ ab.*

Die Zahlen A_1 und A_2 können, wenn $t > w_1$ bzw. $t > w_2$ ist, mittels eines sukzessiven Verfahrens leicht bestimmt werden.

BEMERKUNG. Die Anzahl der Kanten von $G(r, s)$ ist offenbar gleich $pr = qs$, die vier Zahlen $p, q; r, s$ sind also nicht unabhängig voneinander.

Aus Satz 1 erhalten wir durch Spezialisierung einen Anzahlsatz für reguläre Graphen auf folgende Weise: Es sei $G = G(r)$ ein regulärer Graph der Taillenweite t mit k Knotenpunkten vom Grade r. Wird nun in die Mitte einer jeden Kante von G ein zusätzlicher Knotenpunkt vom Grade 2 eingefügt, so geht G über in einen biregulären Graphen $G' = G'(r, 2)$ der Taillenweite $t' = 2t$ mit $p' = k$ A-Knotenpunkten vom Grade $r' = r$ und $q' = l = rk/2$ B-Knotenpunkten vom Grade $s' = 2$. Ein Wald W der Durchmessersumme D geht durch die gleiche Operation über in einen AB-Wald W' mit den Überdeckungsweiten $w_1' = w_2' = 2D$ (die Klasse **A** wird von den ursprünglichen Knotenpunkten von W, die Klasse **B** wird von den neu in die Kantenmitten eingefügten Knotenpunkten vom Grade 2 gebildet). Ist nun $D < t$, so folgt $w_1' = w_2' < t'$, und aus Satz 1 ergibt sich sofort

Satz 2. *Es sei W ein beliebiger Wald der Durchmessersumme D und $G = G(r)$ ein regulärer Graph mit k Knotenpunkten vom Grade r, dessen Taillenweite t größer als D ist. Dann gilt:*

Die Anzahl $A = A(W, G)$ der in G als Untergraphen enthaltenen verschiedenen zu W isomorphen Wälder hängt außer von W nur von den Zahlen k und r ab.

Die Zahl A kann mittels eines sukzessiven Verfahrens leicht bestimmt werden.

Aus Satz 1 lassen sich auf die gleiche Weise weitere Sätze über die Anzahl der in einem regulären Graphen enthaltenen verschiedenen, zu einem gegebenen Quasiwald isomorphen Quasiwälder gewinnen; dabei verstehen wir unter einem *Quasiwald* ein waldartiges Gebilde, welches sich von einem Wald dadurch unterscheidet, daß mit einer Kante nicht notwendig deren beide Endknotenpunkte dem Gebilde anzugehören brauchen — wir wollen diese Sätze nicht explizit formulieren.

Mit Satz 2 verwandt ist

Satz 3. *Es seien $G = G(r)$ ein regulärer Graph der Taillenweite t mit k Knotenpunkten vom Grade $r \geqq 2$ und C ein in G enthaltener Kreis der Länge $c < 2t$. Der Graph G' entstehe aus G, indem aus G alle Knotenpunkte von C sowie sämtliche mit diesen Knotenpunkten inzidenten Kanten entfernt werden. Ferner sei W ein beliebiger Wald der Durchmessersumme $D < (2t - c)/2$. Dann gilt:*

Die Anzahl $A' = A'(W, G')$ der in G' enthaltenen verschiedenen zu W isomorphen Wälder hängt außer von W nur von den Zahlen r, k und c ab.

Die Zahl A' kann mittels eines sukzessiven Verfahrens leicht bestimmt werden.

Die in den Sätzen genannten und in den Beweisen näher beschriebenen sukzessiven Verfahren zur Bestimmung der Anzahlen sind zwar im Prinzip leicht zu handhaben, der Rechenaufwand wird jedoch schon in einfachen Fällen erheblich. Es ist daher wünschenwert, schneller arbeitende Methoden zu entwickeln. Mit dieser Frage werden wir uns in Teil II der vorliegenden Arbeit beschäftigen.

4. Beweis von Satz 1

a) *Vorbereitung des Beweises.* Für den Fall, daß eine der Zahlen r oder s gleich 1 ist, ist die Behauptung trivialerweise richtig, da dann der Graph G durch die Zahlen $p, q; r, s$ selbst bereits völlig bestimmt ist. Wir dürfen daher für das folgende $r \geqq 2$, $s \geqq 2$ voraussetzen.

Wir benötigen einige weitere Begriffe.

Um die eventuell vorhandenen Transformationen eines Waldes W in sich beherrschen zu können, markieren wir die Knotenpunkte von W, d. h. wir ordnen jedem Knotenpunkt K von W zum Zwecke der Unterscheidung ein gewisses Merkmal $m = m(K)$ zu, wodurch W in einen markierten Wald $\dot{W}$ übergeht. Dabei kann das gleiche Merkmal verschiedenen Knotenpunkten zugeordnet sein. Die extremen Fälle sind

die Numerierung, bei der verschiedene Knotenpunkte stets verschiedene Merkmale (Nummern) haben;

die triviale Markierung, bei der alle Knotenpunkte das gleiche Merkmal haben, welches also hier seine Funktion, zur Unterscheidung zu dienen, verliert.

Zwischen einem nicht-markierten und einem trivial-markierten Wald besteht hinsichtlich der Anzahlfragen, die wir hier behandeln, kein Unterschied, so daß sich aus einem Anzahlsatz für markierte Wälder durch Anwendung auf trivial-markierte Wälder sogleich ein entsprechender Satz für nicht-markierte Wälder ergibt.

Zwei markierte Wälder heißen isomorph, wenn sie so zur Deckung gebracht werden können, daß hierbei zwei einander entsprechende Knotenpunkte stets das gleiche Merkmal haben.

Wir werden nun Satz 1 für markierte AB-Wälder $\dot{W}$ beweisen, d. h. wir werden zeigen, daß unter den in Satz 1 genannten Bedingungen die Anzahl $A_1(\dot{W}, G)$ bzw. $A_2(\dot{W}, G)$ der verschiedenen (d. h. unter Berücksichtigung der Markierung unterscheidbaren) Möglichkeiten, einen markierten AB-Wald $\dot{W}$ in G als Untergraphen bzw. als wesentlichen Untergraphen einzubetten, außer von $\dot{W}$ nur von den Zahlen $p, q; r, s$ abhängt. Offenbar gilt

$$A_j(\dot{W}, G) = g(\dot{W}) A_j(W, G) \qquad (j = 1,2),$$

wo $g(\dot{W})$ die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten ist, die Knotenpunkte von W so zu markieren, daß ein zu $\dot{W}$ isomorpher AB-Wald entsteht ($g(\dot{W})$ ist der Index der Gruppe der Transformationen von $\dot{W}$ in sich in bezug auf die Gruppe der Transformationen von W in sich).

Wir geben zur Verdeutlichung ein *Beispiel:* $G = G(3, 2)$ gehe aus einem kubischen Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten hervor, indem dessen Knotenpunkte als A-Knotenpunkte und dessen Kantenmitten als B-Knotenpunkte aufgefaßt werden; $H, \dot{H}$ seien die AB-Bäume der Abb. 2, wo die Merkmale durch die Buchstaben a, b, c, d, e wiedergegeben werden. Dann gilt offenbar

$$A_1(H, G) = A_2(H, G) = \text{Anzahl der A-Knotenpunkte} = p,$$

und im Falle $b \neq c \neq d \neq b$ ist

$$g(\dot{H}) = 6, \qquad A_1(\dot{H}, G) = A_2(\dot{H}, G) = 6p,$$

im Falle $b=c\neq d$ dagegen

$$g(\dot{H})=3, \qquad A_1(\dot{H}, G)=A_2(\dot{H}, G)=3p,$$

und im Falle $b=c=d$

$$g(\dot{H})=1, \qquad A_1(\dot{H}, G)=A_2(\dot{H}, G)=p.$$

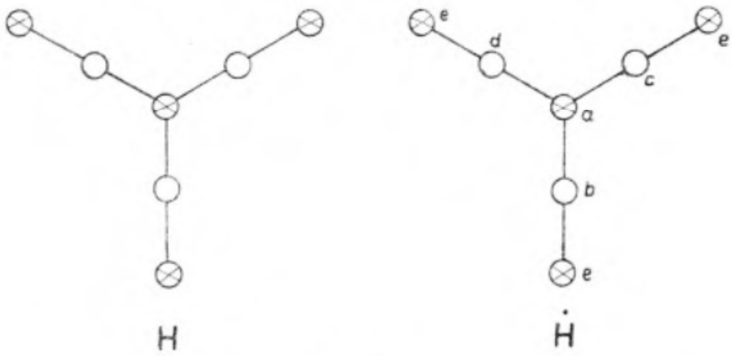

Abb. 2

Schließlich benötigen wir noch den Begriff des Zentrums eines Baumes H. Besteht H aus einem einzigen Knotenpunkt K oder aus einem einzigen, durch eine Kante verbundenen Knotenpunktpaar (kurz: aus einem Paar) PQ, so sei K bzw. PQ zugleich das Zentrum Z von H; in jedem anderen Falle besitzt H mindestens zwei Randknotenpunkte (d. h. Knotenpunkte vom Grade 1), und H hat die Eigenschaft, daß durch Löschung aller Randknotenpunkte wieder ein Baum H' entsteht. Die Operation des Fortlassens aller Randknotenpunkte kann man so oft wiederholen, bis von H nur noch ein Knotenpunkt K oder ein Paar PQ übrig ist: Dann ist dieser Knotenpunkt K bzw. dieses Paar PQ das Zentrum Z von H. Das Zentrum ist auch dadurch charakterisiert, daß es jeden längsten Weg von H halbiert.

Den Abstand eines Knotenpunktes K bzw. einer Kante L von einem Paar PQ definieren wir als $\min(|P, K|, |Q, K|)$ bzw. $\min(|P, L|, |Q, L|)$.

Wir dürfen im folgenden stets annehmen, daß die Grade sämtlicher A-Knotenpunkte und B-Knotenpunkte von W nicht größer als r bzw. s sind, denn im anderen Falle ist trivialerweise $A_1(\dot{W}, G)=A_2(\dot{W}, G)=0$.

b) *Beweis von Satz* 1 *für markierte Bäume.* Es sei Z' ein Knotenpunkt oder ein Paar von $G=G(r, s)$; wir bezeichnen als h-Umgebung von Z' denjenigen Untergraphen $U(Z'; h)$ von G, der aus Z' und allen den Knotenpunkten und Kanten von G besteht, deren Abstand von Z' nicht größer als h ist. Ist dann $2h<t=t(G)$, so ist $U(Z'; h)$ gewiß ein Baum mit dem Zentrum Z' und vom Durchmesser $2h$ oder $2h+1$, je nachdem Z' ein Knotenpunkt oder ein Paar ist, und jeder Knotenpunkt K von $U(Z'; h)$, welcher nicht Randknotenpunkt ist, hat den Grad r oder s, je nachdem K zur Klasse **A** oder **B** gehört. Wir wählen h unter der Bedingung $2h<t$ möglichst groß, nämlich gleich $t/2-1$, und schreiben abkürzend

$$U(Z'; t/2-1) = U(Z').$$

Durchläuft $Z' = P$ alle A-Knotenpunkte von G, so sind die zugehörigen Umgebungen $U(P)$ sämtlich untereinander isomorph, ihre Struktur ist durch die Zahlen r, s, t völlig bestimmt, und Entsprechendes gilt, wenn Z' alle B-Knotenpunkte oder alle Paare von G durchläuft.

Es sei $\dot{H}$ ein markierter AB-Baum mit $w_1(H) < t$ bzw. $w_2(H) < t$. Wir bemerken: Ist $w_2(H) < t$, so ist jeder zu H isomorphe Untergraph von G ein wesentlicher Untergraph, so daß in diesem Falle $A_2(\dot{H}, G) = A_1(\dot{H}, G)$ ist, wir brauchen also lediglich zu zeigen, daß unter der Voraussetzung $w_1(H) < t$ die Anzahl $A_1(\dot{H}, G)$ nur von $p, q; r, s$ abhängt.

Wir setzen voraus, daß das Zentrum Z von H ein A-Knotenpunkt sei, in den anderen Fällen schließen wir ganz entsprechend. Es sei U ein zu den genannten Umgebungen $U(P)$ isomorpher AB-Baum, und es sei $S(\dot{H})$ die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, $\dot{H}$ in U so einzubetten, daß Z mit dem Zentrum von U zusammenfällt. Dann ist die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, $\dot{H}$ in G einzubetten, offenbar gleich $S(\dot{H})$ multipliziert mit der Anzahl p der verschiedenen Umgebungen $U(P)$, so daß also

$$A_1(\dot{H}, G) = pS(\dot{H}).$$

Die Anzahl $S(\dot{H})$ läßt sich in jedem einzelnen Falle leicht feststellen und hängt ersichtlich außer von $\dot{H}$ nur von r und s ab.

Hieraus ergeben sich sogleich die Behauptungen des Satzes für markierte AB-Bäume.

c) *Beweis von Satz 1 für beliebige markierte Wälder.* Der den Bedingungen von Satz 1 genügende AB-Wald W zerfalle in die Komponenten $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Der markierte AB-Wald $\dot{W}$ (mit den Komponenten $\dot{H}_1, \dot{H}_2, \ldots, \dot{H}_n$) gehe aus W durch beliebige, aber im Folgenden festzuhaltende Markierung seiner Knotenpunkte hervor. Für den Fall $n = 1$ haben wir die Behauptungen von Satz 1 bereits bewiesen; wir führen den Beweis für $n > 1$ mittels vollständiger Induktion.

Die Komponenten $\dot{H}_1, \ldots, \dot{H}_n$ von $\dot{W}$ mögen in genau e Klassen (1), (2), ..., (e) zerfallen, so daß zwei Komponenten genau dann der gleichen Klasse angehören, wenn sie (unter Berücksichtigung der Markierung) isomorph sind; der Klasse (f) mögen genau b_f Komponenten angehören ($f = 1, 2, \ldots, e$). Jedes Merkmal $m = m(K)$ eines der Komponente $\dot{H}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) angehörenden Knotenpunktes K ersetzen wir durch ein neues Merkmal $m' = (m, i)$ (das ist ein geordnetes Paar); so entsteht aus $\dot{W}$ ein neuer markierter AB-Wald $\dot{W}'$ mit den Komponenten $\dot{H}_i'$, welche nun paarweise unterscheidbar sind. Es ist offenbar

$$A_j(\dot{W}, G) = (b_1!\, b_2! \ldots b_e!)^{-1}\, A_j(\dot{W}', G) \qquad (j = 1, 2);$$

wir werden $A_j(\dot{W}', G)$ berechnen.

Fall (I). Wir betrachten gleichzeitig eine Einbettung von $\dot{H}_1'$ in G, eine Einbettung von $\dot{H}_2'$ in G, ..., eine Einbettung von $\dot{H}_n'$ in G. Jedes derartige n-tupel T von markierten in G enthaltenen AB-Bäumen überdeckt einen Untergraphen von G. Die Voraussetzung $w_1(W) < t$ stellt sicher, daß alle diese Untergraphen selbst

AB-Wälder mit höchstens n Komponenten sind, welche auch ihrerseits die Bedingung $w_1 < t$ erfüllen. Das (feste) n-tupel T überdecke in G den AB-Wald W_T. Aus W_T erhalten wir einen durch T bestimmten (in G eingebetteten) markierten AB-Wald $\dot{W}_T$, indem wir jedem seiner Knotenpunkte K als neues Merkmal die (ungeordnete) Gesamtheit der Merkmale aller derjenigen Knotenpunkte der in T zusammengefaßten (markierten) AB-Bäume zuordnen, welche K überdecken. Auf diese Weise ist jedem T genau ein in G eingebetteter markierter AB-Wald $\dot{W}_T$ zugeordnet, und aus $T_1 \neq T_2$ folgt $\dot{W}_{T_1} \neq \dot{W}_{T_2}$.

M sei die Menge aller so erhaltenen markierten AB-Wälder $\dot{W}_T$, $|\mathbf{M}|$ bezeichne ihre Anzahl. Dann gilt offenbar

$$|\mathbf{M}| = \prod_{i=1}^{n} A_1(\dot{H}'_i, G) = \prod_{i=1}^{n} A_1(\dot{H}_i, G), \tag{1}$$

denn das ist die Anzahl der verschiedenen n-tupel T. Jedem in **M** enthaltenen AB-Wald mit n Komponenten entspricht genau eine mögliche Einbettung von $\dot{W}'$ in G, und umgekehrt.

Es kommt nunmehr darauf an, die Anzahl aller in **M** enthaltenen markierten AB-Wälder mit weniger als n Komponenten zu bestimmen. Das kann folgendermaßen leicht geschehen: Wir breiten die (markierten) AB-Bäume $\dot{H}'_1, \dot{H}'_2, \ldots, \dot{H}'_n$ auf alle möglichen (nicht-isomorphen) Weisen in der Ebene so aus, daß sich mehrere von ihnen in Knotenpunkten gleicher Klasse „überlappen", ohne daß jedoch ein Kreis entsteht, und daß von einem A-Knotenpunkt nicht mehr als r und von einem B-Knotenpunkt nicht mehr als s Kanten ausgehen (wobei überlappende Kanten nur einmal gezählt werden). Dann wird von diesen AB-Bäumen jedesmal ein AB-Wald W^* mit weniger als n Komponenten überdeckt, und durch die Überdeckung ist zugleich eine bestimmte Markierung von W^* gegeben, nämlich diejenige, welche man erhält, wenn man jedem Knotenpunkt von W^* als Merkmal die (ungeordnete) Gesamtheit der Merkmale aller ihn überdeckenden Knotenpunkte zuordnet. Jede der oben genannten Ausbreitungen der markierten AB-Bäume $\dot{H}'_1, \dot{H}'_2, \ldots, \dot{H}'_n$ bestimmt also eindeutig einen markierten AB-Wald $\dot{W}^*$ mit weniger als n Komponenten, und nicht-isomorphe Ausbreitungen bestimmen nicht-isomorphe markierte AB-Wälder.

Insgesamt mögen so genau h paarweise nicht-isomorphe markierte AB-Wälder, etwa $\dot{W}_1^*, \ldots, \dot{W}_h^*$ entstehen. Dann ist klar: Jeder in **M** enthaltene markierte AB-Wald mit weniger als n Komponenten ist genau einem der $\dot{W}_j^*$ $(j=1, \ldots, h)$ isomorph, und in **M** sind für jede der Zahlen $j=1, 2, \ldots, h$ genau $A_1(\dot{W}_j^*, G)$ zu $\dot{W}_j^*$ isomorphe markierte AB-Wälder enthalten. Außerdem enthält **M** genau $A_1(\dot{W}', G)$ zu $\dot{W}'$ isomorphe und sonst weiter keine AB-Wälder, so daß also

$$|\mathbf{M}| = A_1(\dot{W}', G) + \sum_{j=1}^{h} A_1(\dot{W}_j^*, G). \tag{2}$$

In Verbindung mit (1) erhalten wir aus (2)

$$A_1(\dot{W}', G) = \prod_{i=1}^{n} A_1(\dot{H}_i, G) - \sum_{j=1}^{h} A_1(\dot{W}_j^*, G). \tag{3}$$

Nach Induktionsannahme hängen sämtliche Terme auf der rechten Seite von (3) außer von $\dot{H}_i$ bzw. $\dot{W}_j^*$ nur von $p, q; r, s$ ab. Daraus folgt sogleich die Behauptung des Satzes im Falle (I).

Fall (II). Wir schließen ganz ähnlich wie im Falle (I). Wir betrachten gleichzeitig eine Einbettung von $\dot{H}_1'$ in G, eine Einbettung von $\dot{H}_2'$ in G, ..., eine Einbettung von $\dot{H}_n'$ in G. Jedes derartige n-tupel T von markierten in G enthaltenen AB-Bäumen überdeckt einen Untergraphen U_T von G. Es sei $\tilde{U}_T$ der von U_T erzeugte wesentliche Untergraph von G ($\tilde{U}_T$ enthält die gleichen Knotenpunkte wie U_T und sämtliche Kanten von G, welche zwei Knotenpunkte von U_T in G miteinander verbinden). Die Voraussetzung $w_2(W) < t$ stellt sicher, daß alle diese Untergraphen $\tilde{U}_T$ selbst AB-Wälder mit höchstens n Komponenten sind, welche auch ihrerseits die Bedingung $w_2 < t$ erfüllen. Zum (festen) n-tupel T gehöre der AB-Wald $\tilde{U}_T = \tilde{W}_T$. Aus $\tilde{W}_T$ erhalten wir einen durch T bestimmten (in G als wesentlichen Untergraphen eingebetteten) markierten AB-Wald $\dot{\tilde{W}}_T$, indem wir jedem seiner Knotenpunkte K als neues Merkmal die (ungeordnete) Gesamtheit der Merkmale aller derjenigen Knotenpunkte der in T zusammengefaßten (markierten) AB-Bäume zuordnen, welche K überdecken. Auf diese Weise ist jedem T genau ein in G als wesentlicher Untergraph eingebetteter markierter AB-Wald $\dot{\tilde{W}}_T$ zugeordnet, und aus $T_1 \neq T_2$ folgt $\dot{\tilde{W}}_{T_1} \neq \dot{\tilde{W}}_{T_2}$.

$\tilde{\mathbf{M}}$ sei die Menge aller so erhaltenen markierten AB-Wälder $\dot{\tilde{W}}_T$, $|\tilde{\mathbf{M}}|$ bezeichne ihre Anzahl. Dann gilt offenbar

$$(1') \qquad |\tilde{\mathbf{M}}| = \prod_{i=1}^{n} A_2(\dot{H}_i', G) = \prod_{i=1}^{n} A_2(\dot{H}_i, G),$$

denn das ist die Anzahl der verschiedenen n-tupel T.

Jedem in $\tilde{\mathbf{M}}$ enthaltenen markierten AB-Wald mit n Komponenten entspricht genau eine mögliche Einbettung von $\dot{W}'$ als wesentlichem Untergraphen in G, und umgekehrt.

Es kommt nun darauf an, die Anzahl der in $\tilde{\mathbf{M}}$ enthaltenen markierten AB-Wälder mit weniger als n Komponenten zu bestimmen. Das kann folgendermaßen leicht geschehen: Wir breiten die (markierten) AB-Bäume $\dot{H}_1', \ldots, \dot{H}_n'$ auf alle möglichen Weisen in der Ebene aus, wobei Überlappungen auftreten dürfen, und fügen dann noch auf alle möglichen Weisen keine, eine oder mehrere Kanten hinzu, deren einer Endknotenpunkt der Klasse **A** und deren anderer Endknotenpunkt der Klasse **B** angehört und welche vorher getrennt liegende Teile miteinander verbinden, jedoch so, daß hierbei kein Kreis entsteht, daß von einem A-Knotenpunkt nicht mehr als r und von einem B-Knotenpunkt nicht mehr als s Kanten ausgehen und daß der entstehende AB-Wald weniger als n Komponenten hat. Wieder ordnen wir jedem Knotenpunkt eines so entstandenen AB-Waldes $\tilde{W}^*$ als Merkmal die (ungeordnete) Gesamtheit aller ihn überdeckenden Knotenpunkte der AB-Bäume $\dot{H}_1', \ldots, \dot{H}_n'$ zu, so daß $\tilde{W}^*$ in einen markierten AB-Wald $\dot{\tilde{W}}^*$ übergeht. Insgesamt mögen so genau $\tilde{h}$ paarweise nicht-isomorphe markierte AB-

Wälder, etwa $\dot{\tilde{W}}_1^*, \ldots, \dot{\tilde{W}}_{\tilde{h}}^*$, entstehen. Dann ist klar: Jeder in $\tilde{\mathbf{M}}$ enthaltene markierte AB-Wald mit weniger als n Komponenten ist zu genau einem der $\dot{\tilde{W}}_j^*$ $(j=1, 2, \ldots, \tilde{h})$ isomorph, und in $\tilde{\mathbf{M}}$ sind für jede der Zahlen $j=1, 2, \ldots, \tilde{h}$ genau $A_2(\dot{\tilde{W}}_j^*, G)$ zu $\dot{\tilde{W}}_j^*$ isomorphe markierte AB-Wälder enthalten. Außerdem enthält $\tilde{\mathbf{M}}$ genau $A_2(\dot{W}', G)$ zu $\dot{W}'$ isomorphe und sonst weiter keine AB-Wälder, so daß also

$$|\tilde{\mathbf{M}}| = A_2(\dot{W}', G) + \sum_{j=1}^{\tilde{h}} A_2(\dot{\tilde{W}}_j^*, G). \tag{2'}$$

In Verbindung mit (1′) erhalten wir aus (2′)

$$A_2(\dot{W}', G) = \prod_{i=1}^{n} A_2(\dot{H}_i, G) - \sum_{j=1}^{\tilde{h}} A_2(\dot{\tilde{W}}_j^*, G). \tag{3'}$$

Nach Induktionsannahme hängen sämtliche Terme auf der rechten Seite von (3′) außer von $\dot{H}_i$ bzw. $\dot{\tilde{W}}_j^*$ nur von $p, q; r, s$ ab. Daraus folgt sogleich die Behauptung des Satzes im Falle (II).

Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Beweis von Satz 3

a) Wir verfahren ganz ähnlich wie beim Beweis von Satz 1. Wir betrachten anstelle von W wieder einen Wald $\dot{W}$, dessen Knotenpunkte in beliebiger Weise markiert sind. Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, daß $\dot{W}$ ein markierter Baum $\dot{H}$ ist, der allgemeine Fall wird — genau wie beim Beweis von Satz 1 — mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Komponenten von W erledigt.

b) Wir benötigen einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei H ein Baum, dessen Durchmesser d der Ungleichung $2d<2t-c$ genügt. Ein in G liegender, zu H isomorpher Baum H', welcher mit dem Kreis C mehr als einen Knotenpunkt gemeinsam hat, hat mit C genau ein (zusammenhängendes) Wegstück V' (der Länge $v' \leqq d$) gemeinsam.*

Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es einen Teilweg V^* von C der Länge $\geqq 1$ und $\leqq c/2$, dessen Endknotenpunkte dem Baum H' angehören, während weiter kein Knotenpunkt (und keine Kante) von V^* zu H' gehört; dann bildet aber V^* zusammen mit demjenigen Teilweg von H', welcher die Endknotenpunkte von V^* verbindet, einen Kreis, dessen Länge $\leqq d+c/2<t$ ist, und das ist nicht möglich, denn t ist definitionsgemäß die Länge eines kürzesten in G enthaltenen Kreises.

Bemerkung. Aus den Voraussetzungen

$$v' \leqq d, \quad 2d<2t-c, \quad t \leqq c$$

folgt unmittelbar: Die Länge v' des in Hilfssatz 1 genannten Wegstückes V' genügt der Ungleichung

$$2v'<c;$$

das bedeutet: *Das Wegstück V' von H' bedeckt weniger als die Hälfte des Kreises C-*

Als h-Umgebung eines in G enthaltenen Weges V bezeichnen wir den Untergraphen $U(V; h)$ von G, der aus V und allen denjenigen Knotenpunkten und Kanten von G besteht, deren minimaler Abstand von den Knotenpunkten von V nicht größer als h ist.

Hilfssatz 2. *Wie oben sei t die Taillenweite von G, und die ganzen Zahlen c, d, h und v mögen den folgenden Ungleichungen genügen:*

$$0 \leqq 2v \leqq 2d < 2t - c, \quad c \geqq t, \quad 0 \leqq 2h \leqq 2d - v;$$

weiter sei V ein beliebiger in G enthaltener Weg der Länge v ($v = 0$ bedeute, daß V sich auf einen einzigen Knotenpunkt reduziert). *Dann gilt:*

Die h-Umgebung $U = U(V; h)$ von V ist ein Baum.

Wäre das nämlich nicht der Fall, so enthielte U einen Knotenpunkt oder eine Kante, welcher bzw. welche mit V durch mehr als einen kürzesten Weg (der Länge $\leqq h$) verbunden ist, und dann gäbe es in G einen Kreis C' der Länge $c' \leqq 2h + v \leqq \leqq 2d < 2t - c \leqq t$, das ist aber unmöglich, denn t ist die Länge eines kürzesten in G enthaltenen Kreises.

Aus Hilfssatz 2 folgt unmittelbar

Hilfssatz 3. *Die Struktur der in Hilfssatz 2 genannten Umgebungen $U(V; h)$ ist durch die Zahlen v, h und r eindeutig bestimmt.*

c) Die Anzahl $A'(\dot{H}, G')$ ist gleich der in Satz 2 genannten Anzahl $A(\dot{H}, G)$, vermindert um die Anzahl $B'(\dot{H}, G, C)$ derjenigen zu $\dot{H}$ isomorphen in G eingebetteten markierten Bäume, welche mit dem Kreis C einen Knotenpunkt gemeinsam haben. Es sei V ein fester Teilweg von C der Länge $\leqq d$, und es bezeichne $B(\dot{H}, G, V)$ die Anzahl derjenigen zu $\dot{H}$ isomorphen in G eingebetteten markierten Bäume $\dot{H}'$, welche mit C genau den Weg V gemeinsam haben. Dann ist jeder der Bäume $\dot{H}'$ in der Umgebung $U(V; [d - v/2])$ von V enthalten, und da die Struktur dieser Umgebung nach Hilfssatz 3 nur von den Zahlen v, d und r abhängt, hängt die Anzahl $B(\dot{H}, G, V)$ außer von $\dot{H}$ nur noch von v und r ab. Wir schreiben daher $B(\dot{H}, G, V) = B(\dot{H}; r, v)$; man kann diese Anzahl unter Benutzung der Hilfssätze 2 und 3 (ohne Kenntnis von G) bei gegebenem $\dot{H}$ in jedem Falle leicht feststellen.

Offenbar enthält der Kreis C zu jeder der Zahlen $v = 0, 1, \ldots, d$ genau c Teilwege V der Länge v, und unter Beachtung von Hilfssatz 1 schließen wir

$$B'(\dot{H}, G, C) = \sum_{\substack{V \subset C \\ v \leqq d}} B(\dot{H}, G, V) = c \sum_{v=0}^{d} B(\dot{H}; r, v).$$

Daraus entnehmen wir, daß $B'(\dot{H}, G, C)$ außer von $\dot{H}$ nur von den Zahlen r und c abhängt. Beachten wir, daß (wie im Beweis von Satz 1 gezeigt wurde) Satz 2 auch für markierte Bäume $\dot{H}$ gültig bleibt, so schließen wir, daß die Anzahl

$$A'(\dot{H}, G') = A(\dot{H}, G) - B'(\dot{H}, G, C)$$

außer von $\dot{H}$ nur von r, k und c abhängt.

Das war zu beweisen.

(Eingegangen am 12. August 1963.)