Über die Vervollständigung gewisser geordneter Halbmoduln mit negativen Elementen

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

In einer früheren Arbeit (LUGOWSKI [3]) hatten wir gezeigt, daß jeder kommutative geordnete Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

JIV: *Zu* $a\in\mathfrak{M}$ *und* $b\in\mathfrak{M}$ *mit* $a<b$ *existieren* $x\in\mathfrak{M}$ *und* $y\in\mathfrak{M}$ *mit* $a+x = y+a = b$,

und mit negativen Elementen (d. h. Elementen c mit $c+c<c$) sich wie folgt zerlegen läßt:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}_1<\mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}_2.$$

Dabei ist $\mathfrak{M}_1$ ein Modul, welcher außer seinem Nullelement (das auch Nullelement von $\mathfrak{M}$ ist) gerade alle negativen Elemente von $\mathfrak{M}$ und deren Entgegengesetzten enthält. $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{M}_1$ ist ein positiv geordneter Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}$, falls nicht überhaupt $\mathfrak{M}_2=\emptyset$, also $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1$ gilt; von diesem trivialen Fall wollen wir aber immer absehen. $\mathfrak{M}$ ist die geordnete Summe $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1 \mathbin{\dot{\le}} \mathfrak{M}_2$ von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ (d. h., es gilt $m_1+m_2=m_2$ für alle $m_1\in\mathfrak{M}_1$, $m_2\in\mathfrak{M}_2$) genau dann, wenn $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist, was insbesondere dann eintritt, falls $\mathfrak{M}_2$ ein Minimum besitzt. Diese Bezeichnungen halten wir im Folgenden bei.

Wir beantworten hier die Frage, wann ein solcher Halbmodul $\mathfrak{M}$ (bedingt) vollständig ist (Satz 1) bzw. sich zu einem Halbmodul mit JIV vervollständigen läßt, d. h. eine vollständige Hülle $\mathfrak{V}=V(\mathfrak{M})$ besitzt, die wieder Halbmodul mit JIV ist (Satz 2). Unsere Aussagen geben zusammen mit der CLIFFORDschen Charakterisierung natürlich geordneter Halbmoduln, die vollständig sind bzw. sich zu natürlich geordneten Halbmoduln vervollständigen lassen (vgl. CLIFFORD [2; Theorem 3. 6 und 3. 7]), eine Übersicht über alle derartigen geordneten Halbmoduln mit JIV. Wie üblich heißt dabei $\mathfrak{M}$ (bedingt) vollständig, wenn jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ein Infimum in $\mathfrak{M}$ besitzt, und $\mathfrak{V}$ vollständige Hülle von $\mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{V}$ vollständige Obermenge von $\mathfrak{M}$ ist und wenn jedes Element von $\mathfrak{V}$ Infimum und Supremum nichtleerer Teilmengen von $\mathfrak{M}$ ist. Letztere Forderung kann man (vgl. CLIFFORD [2; Lemma 1. 1]) durch folgende beiden Bedingungen ersetzen:

V1: $\mathfrak{M}$ enthält das Minimum und das Maximum von $\mathfrak{V}$, falls solche existieren.

V2: Gibt es zwischen zwei Elementen ξ und η aus $\mathfrak{V}$ mit $\xi<\eta$ kein Element aus $\mathfrak{M}$, so gehören ξ und η zu $\mathfrak{M}$.

Satz 1. *$\mathfrak{M}$ ist vollständig genau dann, wenn dies für $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zutrifft und $\mathfrak{M}_2$ ein Minimum besitzt, insbesondere also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$ gilt und $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ vollständig. Wegen $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$ hat dann $\mathfrak{M}_2$ ein Infimum in $\mathfrak{M}$, welches zugleich Minimum von $\mathfrak{M}_2$ ist, da $\mathfrak{M}_1$ als Modul kein Maximum besitzt. Die Vollständigkeitsaussagen über $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ wie auch über $\mathfrak{M}$ in der Umkehrung der Aussage sind dann auf Grund von $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$ offensichtlich.

Satz 2. *$\mathfrak{M}$ besitzt eine vollständige Hülle $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$, welche ebenfalls ein Halbmodul mit JIV ist, genau dann, wenn dies für $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zutrifft und $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$ gilt, also $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist. Es ist dann (bis auf ähnliche Isomorphie eindeutig) $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \lesssim \mathfrak{V}_2$ mit $\mathfrak{V}_1 = V(\mathfrak{M}_1)$ und $\mathfrak{V}_2 = V(\mathfrak{M}_2)$ bzw. $\mathfrak{V}_2 = \{\sigma\} \lesssim V(\mathfrak{M}_2)$, letzteres falls $\mathfrak{M}_2$ kein Minimum besitzt.*

Beweis. Es besitze $\mathfrak{M}$ eine vollständige Hülle $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$, die Halbmodul mit JIV ist. Nach Satz 1 zerfällt $\mathfrak{V}$ gemäß $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \lesssim \mathfrak{V}_2$ in einen vollständigen Modul $\mathfrak{V}_1$ und einen vollständigen natürlich geordneten Halbmodul $\mathfrak{V}_2$ mit Minimum σ.

a) Dann folgt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$ aus $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{V}_2$. Letzteres ergibt sich so: $\mathfrak{V}_1$ enthält alle negativen Elemente von $\mathfrak{V}$, also auch von $\mathfrak{M}$; ferner liegt auch das Nullelement 0 von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{V}_1$ (und stimmt damit mit demjenigen von $\mathfrak{V}_1$ überein), da aus $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \lesssim \mathfrak{V}_2$ sonst $a' + 0 = 0$ für ein negatives Element $a' \in \mathfrak{M}$ folgen würde. Damit erhält man $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{V}_1$ aus der Moduleigenschaft von $\mathfrak{V}_1$. Wir zeigen nun $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{V}_2$. Gäbe es nämlich ein Element $m_2 \in \mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, so existierten negative Elemente ξ' und η' von $\mathfrak{V}$ mit $\xi' + m_2 = \eta'$. Wegen $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$ gibt es dann auch negative Elemente a' und b' aus $\mathfrak{M}$ mit $a' \leqq \xi'$ und $\eta' \leqq b' < 0$ und wegen JIV in $\mathfrak{V}$ ein positives Element $\zeta \in \mathfrak{V}$ mit $a' + \zeta = \xi'$. Dies liefert

$$a' + m_2 \leqq a' + \zeta + m_2 = \xi' + m_2 = \eta' \leqq b'$$

im Widerspruch dazu, daß $a' + m_2 \in \mathfrak{M}_2$ gilt und daher größer als das Element $b' \in \mathfrak{M}_1$ sein müßte.

b) Um den vollständigen Modul $\mathfrak{V}_1$ als vollständige Hülle von $\mathfrak{M}_1$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{V}_1$ die Bedingung V2 erfüllt, da $\mathfrak{V}_1$ als Modul weder ein Minimum noch ein Maximum enthält. Dazu seien ξ und η zwei Elemente von $\mathfrak{V}_1$ mit $\xi < \eta$, für die kein $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ mit $\xi < m_1 < \eta$ existiert. Wegen a) gibt es dann überhaupt kein $m \in \mathfrak{M}$ mit $\xi < m < \eta$, woraus wegen $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$ wie verlangt folgt, daß ξ und η in $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{M}_1$ liegen.

c) Zur Beschreibung des vollständigen Halbmoduls $\mathfrak{V}_2$ betrachten wir zuerst den Fall, daß $\mathfrak{M}_2$ ein Minimum μ besitzt. Für das Minimum σ von $\mathfrak{V}_2$ gilt dann jedenfalls $\sigma \leqq \mu$ und sogar $\sigma = \mu$, denn es gibt wegen a) kein $m \in \mathfrak{M}$ mit $\sigma < m < \mu$. Ferner ist ein eventuell existierendes Maximum μ^* von $\mathfrak{V}_2$ auch Maximum von $\mathfrak{V}$ und gehört damit zu $\mathfrak{V}_2 \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2$. Also gilt V1 für $\mathfrak{V}_2$ im Hinblick auf $\mathfrak{M}_2$. Für V2 schließt man analog wie in b).

Hat aber $\mathfrak{M}_2$ kein Minimum, so zeigen wir zunächst, daß das Minimum σ von $\mathfrak{V}_2$ zu der Zerlegung $\mathfrak{V}_2 = \{\sigma\} \lesssim (\mathfrak{V}_2 \setminus \{\sigma\})$ von $\mathfrak{V}_2$ in zwei Unterhalbmoduln Anlaß gibt. $\mathfrak{V}_2$ zerfällt nämlich als natürlich geordneter Halbmodul nach Clifford [1; Theorem 1] in ordnungsirreduzible natürlich geordnete Unterhalbmoduln

$$\mathfrak{V}_2 = \bigcup_{\tau \in T}^{<} \mathfrak{A}_\tau,$$

wobei ein erstes $\mathfrak{A}_1$ existieren muß, welches σ als Minimum enthält. Mit $\mathfrak{V}_2$ ist auch jedes $\mathfrak{A}_\tau$ vollständig; als irreduzibler vollständiger natürlich geordneter Halbmodul mit Minimum ist dabei $\mathfrak{A}_1$ ähnlichisomorph entweder zu dem Halbmodul N der natürlichen Zahlen oder zu dem endlichen Halbmodul $Z_n = \{1, \ldots, n\}$ $(n \geqq 1)$, dessen Elemente in dieser Reihenfolge geordnet sind und gemäß

$$a \dotplus b = \operatorname{Min}(a+b, n)$$

verknüpft werden (+ wie in N; vgl. CLIFFORD [2; Theorem 3. 6]). Dabei kann tatsächlich nur der letzte Fall mit $n=1$ eintreten, denn sonst wäre

$$\sigma < \sigma \dotplus \sigma = \xi \in \mathfrak{V}_2,$$

und es gäbe kein ζ aus $\mathfrak{V}_2$ und damit erst recht aus $\mathfrak{M}_2$ mit $\sigma < \zeta < \xi$, so daß $\sigma \in \mathfrak{M}_2$, also $\sigma = \operatorname{Min} \mathfrak{M}_2$ im Widerspruch zur Annahme über $\mathfrak{M}_2$ folgen würde. Also gilt $\mathfrak{A}_1 = \{\sigma\}$, und $\mathfrak{V}_2 = \{\sigma\} \mathbin{\underset{\smile}{<}} (\mathfrak{V}_2 \setminus \{\sigma\})$ ist wie behauptet eine Zerlegung von $\mathfrak{V}_2$ in zwei natürlich geordnete Unterhalbmoduln.

Schließlich gilt dann $\mathfrak{V}_2 \setminus \{\sigma\} = V(\mathfrak{M}_2)$. $\mathfrak{V}_2^* = \mathfrak{V}_2 \setminus \{\sigma\}$ ist nämlich mit $\mathfrak{V}_2$ vollständig, denn ist $\mathfrak{A}$ eine nichtleere, durch $v_2 \in \mathfrak{V}_2^*$ nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{V}_2^*$, so erst recht von $\mathfrak{V}_2$, so daß jedenfalls $\xi = \inf \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{V}_2$ existiert; wegen $\sigma < v_2 \leqq \xi$ gilt aber auch $\xi \in \mathfrak{V}_2^*$. Ferner hat man wegen $\sigma \notin \mathfrak{M}_2$ natürlich $\mathfrak{M}_2 \subseteqq \mathfrak{V}_2^*$. $\mathfrak{V}_2^*$ besitzt kein Minimum; denn wäre $\sigma^* = \operatorname{Min} \mathfrak{V}_2^*$, so folgte $\sigma < \sigma^*$, und es gäbe kein $m \in \mathfrak{M}$ mit $\sigma < m < \sigma^*$, woraus sich wegen $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$ der Widerspruch $\sigma \in \mathfrak{M}$ ergäbe. Für die Beendung des Nachweises von V1 wie auch von V2 schließt man dann wie oben.

Zum Beweis der Umkehrung stellen wir zunächst fest, daß $V(\mathfrak{M}_1)$ bzw. $V(\mathfrak{M}_2)$ durch die Forderung „Halbmodul mit JIV" als Modul bzw. natürlich geordneter Halbmodul festgelegt ist. Sonst wäre nämlich $V(\mathfrak{M}_1)$ jedenfalls gemäß Satz 1 die geordnete Summe eines Moduls $\mathfrak{W}_1$ und eines natürlich geordneten Halbmoduls $\mathfrak{W}_2$; nach den gleichen Schlüssen wie am Anfang des Beweises von Satz 2 würde dann aber $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{W}_1$ gelten, so daß ein Element $\xi \in \mathfrak{W}_2$ nicht Infimum einer nichtleeren Teilmenge von $\mathfrak{M}_1$ sein könnte. Ferner würde für ein negatives Element $\xi \in V(\mathfrak{M}_2)$ kein Element $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $\xi + \xi < m_2 < \xi$ existieren, so daß ξ wegen V2 in $\mathfrak{M}_2$ selbst liegen müßte im Widerspruch zur Voraussetzung über $\mathfrak{M}_2$.

Hat nun $\mathfrak{M}_2$ ein Minimum μ, so ist dieses auch Minimum von $V(\mathfrak{M}_2)$, und wir erhalten $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$ einfach gemäß

$$\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M}_1) \mathbin{\underset{\smile}{<}} V(\mathfrak{M}_2)$$

als geordneten Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$ mit JIV; außerdem gilt offenbar $\mathfrak{V}_1 = V(\mathfrak{M}_1)$ und $\mathfrak{V}_2 = V(\mathfrak{M}_2)$.

Hat dagegen $\mathfrak{M}_2$ kein Minimum, so bilden wir $\mathfrak{V}$ gemäß

$$\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M}_1) \mathbin{\underset{\smile}{<}} \{\sigma\} \mathbin{\underset{\smile}{<}} V(\mathfrak{M}_2)$$

mit $\sigma = \sigma + \sigma$. Jedenfalls ist dann $\mathfrak{V}$ die vollständige Hülle von $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \mathbin{\underset{\smile}{<}} (\{\sigma\} \mathbin{\underset{\smile}{<}} \mathfrak{M}_2)$ und wiederum geordneter Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}^*$ (also auch von $\mathfrak{M}$) mit JIV sowie $\mathfrak{V}_1 = V(\mathfrak{M}_1)$ und $\mathfrak{V}_2 = \{\sigma\} \mathbin{\underset{\smile}{<}} V(\mathfrak{M}_2)$. Es gilt aber auch $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$. V1 ist nämlich ersichtlich auch bezüglich $\mathfrak{M}$ richtig. Sind ferner ξ und η zwei Elemente von $\mathfrak{V}$ mit $\xi < \eta$, für die kein Element $m \in \mathfrak{M}$ mit $\xi < m < \eta$ existiert, so kann auch nicht $\xi < \sigma < \eta$ gelten; da nämlich $V(\mathfrak{M}_1)$ kein Maximum hat, gäbe es sonst ein $\xi' \in V(\mathfrak{M}_1)$ mit

$$\xi < \xi' < \sigma < \eta$$

woraus entweder ($\xi \in \mathfrak{M}_1$ und) $\xi' \in \mathfrak{M}_1$ oder die Existenz eines $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ mit $\xi < m_1 < \xi'$ folgt, beides im Widerspruch zur Annahme über ξ und η. Also gibt es auch kein Element $m^* \in \mathfrak{M}^*$ mit $\xi < m^* < \eta$, so daß wegen $\mathfrak{B} = V(\mathfrak{M}^*)$ die Elemente ξ und η in $\mathfrak{M}^*$ liegen. Dabei gilt sicher neben $\eta \neq \sigma$ auch $\xi \neq \sigma$, wie man analog zeigt unter Ausnutzung der Tatsache, daß $V(\mathfrak{M}_2)$ kein Minimum hat. Also liegen ξ und η sogar in $\mathfrak{M}$, womit V2 nachgewiesen ist.

Die (bis auf ähnliche Isomorphie) eindeutige Bestimmtheit von $V(\mathfrak{M})$ als geordneter Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$ mit JIV folgt schließlich unter Verwendung des ersten Teiles unseres Beweises aus derjenigen von $V(\mathfrak{M}_1)$ und $V(\mathfrak{M}_2)$.

ANMERKUNG. In den Sätzen 1 und 2 wird festgestellt, daß jeder Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV, der vollständig ist bzw. sich vervollständigen läßt, die Gestalt $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$ besitzt, also sein Unterhalbmodul $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist. Daher stimmt hier $\mathfrak{M}_1$ stets mit dem ersten irreduziblen Bestandteil der CLIFFORDschen Zerlegung von $\mathfrak{M}$ in die geordnete Summe irreduzibler Unterhalbmoduln überein (vgl. LUGOWSKI [3; Satz 4 und Satz 10]).

Literatur

[1] A. H. CLIFFORD, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 631–646.

[2] A. H. CLIFFORD, Completion of semi-continuous ordered commutative semigroups, *Duke Math. J.* **26** (1959), 41–59.

[3] H. LUGOWSKI, Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen. In dieser Zeitschrift, 23–31.

(Eingegangen am 1. Oktober 1963.)