Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER (Szeged)

Einleitung

In Verbindung mit der Frage, unter welchen Bedingungen eine Orthogonalreihe bei jeder Anordnung ihrer Glieder im Grundintervall fast überall konvergiert, sind u. a. die folgenden Ergebnisse bekannt:

W. ORLICZ ([21]) hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge, und wir nehmen an, daß sie eine Teilfolge $\{\lambda(n_k)\}$ besitzt, mit den Eigenschaften

$$\log n_{k+1} \leqq c \log n_k \qquad (c>0)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < \infty. \tag{1}$$

Unter der Bedingung

$$\sum a_n^2 \lambda(n) \log^2 n < \infty \tag{2}$$

ist dann die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung der Glieder, fast überall konvergent.

Diesen Satz hat K. TANDORI ([3]) verschärft. Sein Satz lautet:

Unter der Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n \right\}^{1/2} < \infty \qquad (\nu_k = 2^{2^k}) \tag{4}$$

ist die Reihe (3) *für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent.*

K. TANDORI hat auch bewiesen, daß das Erfülltsein von (4) dazu auch notwendig ist, daß die Reihe (3) mit einer monoton abnehmenden Folge $\{|a_n|\}$ für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergiert; d. h.: ist $\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n \right\}^{1/2} = \infty$, so gibt es ein im Intervall (a, b) ortonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Reihe $\sum a_n \Phi_n(x)$ in einer gewissen Anordnung ihrer Glieder in (a, b) fast überall divergiert.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Bezeichne $E_n = E_n^{(2)}(f)$ den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ im Sinne der Metrik von $L^2(a, b)$ mit Linearformen $\sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(x)$; nach dem wohl bekannten Satz von GRAM ist

$$E_n = \left\{ \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right)^2 dx \right\}^{1/2} \quad \text{mit} \quad c_k = \int_a^b f(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

Der Verfasser ([1]) hat den folgenden Satz bewiesen:

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k}{k} < \infty,$$

so konvergiert die Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder in (a, b) *fast überall.*

Es sei $R_n^2 = R_n^2(\{a_k\}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2$. Es ist klar, daß $R_n^2(\{c_k\}) \leqq E_n^2$ ist.

In § 1 der vorliegenden Arbeiten werden wir beweisen:

Satz 1. *Die Bedingungen* (4) *und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(\{a_k\})}{n} < \infty \tag{5}$$

sind äquivalent.

In § 2 zeigen wir, daß die Bedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\lambda_{2^{2^n}}} < \infty \tag{6}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty \tag{7}$$

mit einer monoton wachsenden Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$, die etwas weniger als die Bedingungen (1) und (2) fordern, schon mit (4) und so auch mit (5) äquivalent sind.

Es gilt nämlich der

Satz 2. *Die Bedingungen* (4) *und* (5) *sind damit gleichwertig, daß es eine monoton wachsende Zahlenfolge* $\{\lambda_n\}$ *gibt, für die sich die Bedingungen* (6) *und* (7) *erfüllen.*

Nach dem Obigen ergibt sich die

FOLGERUNG. *Jede der Bedingung* (5) *und* (6)—(7) *ist hinreichend, für monotone Koeffizientenfolgen auch notwendig, daß die Reihe* (3) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *unbedingt konvergiert.*

Der folgende Satz zeigt, daß man die Bedingungen (6)—(7) in Allgemeinheit nicht verschärfen kann.

Satz 3. *Es sei* $\bar{\lambda}_n$ *eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit*

$$\sum \frac{2^{2^n}}{\bar{\lambda}_{2^{2^n}}} = \infty. \tag{8}$$

Dann gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *und ein in* (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart, daß die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \bar{\lambda}_n < \infty \tag{9}$$

erfüllt wird, jedoch die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{10}$$

nicht unbedingt konvergiert.

K. TANDORI ([3]) hat auch die folgende Verschärfung eines Satzes von W. ORLICZ ([2]) bewiesen:

Ist die Funktion $g(x) > 0$ *monoton wachsend und*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{g(x)} < \infty,$$

so folgt aus $a_n = o(1)$ *und aus der Annahme* [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 g\left(\log\log\left(\frac{1}{a_n^2}\right)^+\right)\left(\log\left(\frac{1}{a_n^2}\right)^+\right)^2 < \infty$$

die unbedingte Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe (3). *Sind die Folgen* $\{a_n^2\}$ *und* $\left\{\left(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right)\right\}$ *monoton abnehmend, so sind diese Bedingungen auch notwendig.*

In § 3 verschärfen wir diesen Satz folgenderweise:

Satz 4. *Damit die Orthogonalreihe* (3) *mit nach* 0 *konvergierenden Koeffizienten*

[1]) Hier ist $\left(\frac{1}{c}\right)^+ = \begin{cases} 4 & \text{für } c = 0, \\ \frac{1}{c} & \text{sonst.} \end{cases}$

für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß für eine positive, monoton wachsende Funktion $g(x)$ mit

$$\int_1^\infty \frac{2^{2x}}{g(x)}\,dx<\infty \tag{11}$$

die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^\infty a_n^2 g\left(\log\log\left(\frac{1}{a_n^2}\right)^+\right)<\infty \tag{12}$$

besteht.

Dieser Satz kann nicht verschärft werden, nämlich gilt der

Satz 5. *Es sei $\bar g(x)$ eine positive, monoton wachsende Funktion mit*

$$\int_1^\infty \frac{2^{2x}}{\bar g(x)}\,dx=\infty; \tag{13}$$

dann gibt es eine positive, monoton nach 0 strebende Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein in (a, b) orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Bedingung

$$\sum_{n=0}^\infty a_n^2 \bar g\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)<\infty \tag{14}$$

erfüllt ist, jedoch die Orthogonalreihe (10) nicht unbedingt konvergiert.

K. Tandori [3] hat folgendes bewiesen:

Es sei $\alpha_n=\dfrac{4\log\log n+2\log\log\log n}{\log \mathrm{n}}$ $(n\geqq n_0)$. Dann gibt es eine Orthogonalreihe (3) mit positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizienten derart, daß sie nicht unbedingt konvergiert, jedoch $\sum a_n^{2-\alpha_n}<\infty$ besteht.

In § 4 werden wir diesen Satz einer Vermutung von K. Tandori entsprechend verschärfen.

Satz 6. *Es sei $\bar\lambda_n$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\bar\lambda_{2^{2^n}}}=\infty. \tag{15}$$

Dann gibt es eine Orthogonalreihe (10) mit positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizienten derart, daß sie nicht unbedingt konvergiert, jedoch

$$\sum a_n^{2-\bar\alpha_n}<\infty \tag{16}$$

mit

$$\bar\alpha_n=\frac{4\log\log n+2\log\bar\lambda_n}{\log n}\qquad (n\geqq n_0)$$

besteht.

§ 1. Beweis von Satz 1

Zuerst beweisen wir, daß die Bedingung (4) aus (5) folgt. Es gilt nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2 \log^2 k\right\}^{1/2} \leqq 8 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq 8 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n R_{\nu_n} \leqq 16 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\nu_{n-1}+1}^{\nu_n} \frac{1}{k} R_{\nu_n} \leqq 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R_k,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

Der Beweis der Implikation (4)$\Rightarrow$(5) ist ebenfalls einfach:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k} R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \frac{1}{k} R_k \leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n R_{\nu_n} \leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sum_{m=n}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} a_k^2\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 4 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2\right\}^{1/2} \leqq 8 \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2 \log^2 k\right\}^{1/2},$$

d. h. (4) impliziert (5).

Damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

§ 2. Beweise von Sätzen 2 und 3

Beweis von Satz 2. Nach dem Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die Bedingung (4) aus (6) und (7) folgt, und umgekehrt, daß die Existenz einer monoton wachsenden Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$, für die sich (6) und (7) erfüllen, aus der Bedingung (5) folgt.

Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2 \log^2 k\right\}^{1/2} \leqq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{\lambda_{\nu_n}}} \sqrt{\lambda_{\nu_n}} \left\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 4\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\lambda_{\nu_n}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\nu_n} \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2\right\}^{1/2},$$

woraus unsere erste Behauptung klar ist.

Nehmen wir nun an, daß die Bedingung (5) gilt. Es sei

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k R_k}.$$

Die Folge $\{\lambda_n\}$ ist offenbar monoton. Durch Abelsche Umformung ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k R_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k R_k} \sum_{n=k}^{\infty} a_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{k} < \infty,$$

d. h. die Bedingung (7) erfüllt sich mit dieser Folge $\{\lambda_n\}$.

Die Ungleichung (6) ergibt sich aus (5) folgenderweise:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\lambda_{\nu_n}} \leqq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\sum\limits_{k=\nu_{n-1}+1}^{\nu_n} \frac{1}{kR_k}} \leqq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n} R_{\nu_{n-1}}}{\sum\limits_{k=\nu_{n-1}+1}^{\nu_n} \frac{1}{k}} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=3}^{\infty} 2^n R_{\nu_{n-1}} \leqq 8 \sum_{n=3}^{\infty} R_{\nu_{n-1}} \sum_{k=\nu_{n-2}+1}^{\nu_{n-1}} \frac{1}{k} \leqq 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{k}.$$

Damit haben wir den Satz 2 vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 3. Nach einem bekannten Satz kann eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{\varrho_n\}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\varrho_n} < \infty \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\varrho_n \lambda_{\nu_n}}} = \infty \tag{2.2}$$

auf Grund von (8) angegeben werden. Es sei

$$a_k = \{(\nu_{n+1} - \nu_n)\lambda_{\nu_{n+1}} \varrho_{n+1} 2^{-2n}\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (\nu_n < k \leqq \nu_{n+1};\ n = 0, 1, \ldots)$$

und $a_1 = a_2 = a_3$. Aus (2.2) ergibt sich, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} a_k^2 \log^2 k \right\}^{1/2} = \infty$$

ist. Nach dem zitierten Ergebnis von K. Tandori gibt es ein in (a, b) orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die Orthogonalreihe (10) nicht unbedingt konvergiert. Dagegen aus (2.1) ergibt sich das Bestehen von (9).

Damit ist der Satz 3 bewiesen.

§ 3. Beweise von Sätzen 4–5

Beweis von Satz 4. *Hinlänglichkeit.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Monotonität von $\{a_n\}$ annehmen. Aus (12) ergibt sich $\sum_n a_n^2 < \infty$, so ist $a_n^2 = o(n^{-1})$. Daraus und aus (12) folgt

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 g(\log\log n) < \infty, \tag{3.1}$$

d. h. die Bedingung (7) ist mit $\lambda_n = g(\log\log n)$ erfüllt. Offenbar ist diese Folge $\{\lambda_n\}$ monoton wachsend, und nach (11) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\lambda_{\nu_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{g(n)} < \infty. \tag{3.2}$$

Nach dem Satz II folgt die Ungleichung (4) aus (3.1) und (3.2), welche die unbedingte Konvergenz der Reihe (3) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ nach sich zieht.

Notwendigkeit. Die Methode des Beweises ist zu dem von K. TANDORI gleichartig. Bezeichne $\{|\bar{a}_n|\}$ die in monotone Anordnung gestellte Folge der absoluten Werte der nicht-verschwindenden Koeffizienten von (3). Es sei $\bar{R}_n^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{a}_n^2$. Ist die Orthogonalreihe (3) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{R}_n}{n} = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \bar{R}_{\nu_n} < \infty. \tag{3.3}$$

Es sei $g(x) = \min\{2^{2k}\cdot k^2, 2^k \bar{R}_{\nu_{k-2}}^{-1}\}$ für $k < x \leqq k+1$ $(k = 3, 4, \ldots)$ und $g(x) = g(4)$ für $1 \leqq x \leqq 4$. Diese Funktion ist positiv, monoton wachsend, genügt den Bedingungen (11), und es gilt $g(x) \leqq x^2 2^{2x}$. Aus (3. 3) folgt nun

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{\infty} \bar{a}_k^2 g(2+\log\log k) &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \bar{a}_k^2\right) g(n+3) \leqq \\ &\leqq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \bar{a}_k^2\right) \frac{2^n}{\bar{R}_{\nu_n}} \leqq 4 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \bar{R}_{\nu_n} < \infty.\end{aligned} \tag{3.4}$$

I bzw. I' bezeichne die Menge der Indizes n mit $\bar{a}_n^2 \geqq n^{-4}$ bzw. $a_n^2 < n^{-4}$. Dann gilt nach (3. 4)

$$\sum_{n\in I} \bar{a}_n^2 g\left(\log\log \frac{1}{\bar{a}_n^2}\right) = O(1) \sum_{n\in I} \bar{a}_n^2 g(\log\log n^4) = O(1) \sum_{n\in I} \bar{a}_n^2 g(2+\log\log n) < \infty$$

und

$$\sum_{n\in I'} \bar{a}_n^2 g\left(\log\log \frac{1}{\bar{a}_n^2}\right) \leqq \sum_{n\in I'} \frac{1}{n^2} |\bar{a}_n| \left(\log \frac{1}{\bar{a}_n^2}\right)^4 = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 g\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n^2 g\left(\log\log \frac{1}{\bar{a}_n^2}\right) < \infty.$$

Damit haben wir den Satz 4 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 5. Der Grundgedanke des Beweises stammt von K. TANDORI (s. den Satz VII in [3]). Auf Grund von (13) kann leicht eine positive, monoton wachsende Funktion $\tilde{g}(x)$ mit $\tilde{g}(x) \geqq \bar{g}(x)$ und

$$\int_1^{\infty} \frac{2^{2x}}{\tilde{g}(x)}\, dx = \infty \tag{3.5}$$

angegeben werden, für welche die Bedingung $\tilde{g}(x) \leqq 2\tilde{g}(k)$ $(k \leqq x \leqq k+\frac{1}{2};\ k = 1, 2, \ldots)$

erfüllt ist. Wir bezeichnen mit $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$ sämtliche natürliche Zahlen mit $\tilde{g}(k_i) \leqq 2^{2k_i} k_i^2$ $(i=1, 2, \ldots)$. Wegen (3. 5) besteht

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2k_i}}{\tilde{g}(k_i)} = \infty,$$

woraus die Existenz einer positiven, monoton wachsenden Folge $\{\varrho_i\}$ mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2k_i}}{\varrho_i} < \infty \quad \text{und} \quad \sum \frac{2^{2k_i}}{\sqrt{\tilde{g}(k_i)\varrho_i}} = \infty \tag{3. 6}$$

folgt. Es sei $\tilde{\varrho}_i = \min\{2^{2k_i} i^2, \varrho_i\}$. Die Folge $\{\tilde{\varrho}_i\}$ ist positiv, monoton wachsend; nach (3. 6) gelten die Beziehungen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2k_i}}{\tilde{\varrho}_i} < \infty \tag{3. 7}$$

und

$$\sum \frac{2^{2k_i}}{\sqrt{\tilde{g}(k_i)\tilde{\varrho}_i}} = \infty. \tag{3. 8}$$

Es sei

$$a_n = \{(\nu_{k_{i+1}} - \nu_{k_i}) \tilde{g}(k_{i+1}) \tilde{\varrho}_{i+1} 2^{-2(k_{i+1}-k_i)}\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (\nu_{k_i} < n \leqq \nu_{k_{i+1}};\ i=1, 2, \ldots)$$

und $a_n = a_{\nu_{k_1}} + 1$ $(n=1, 2, \ldots, \nu_{k_1})$. Nach (3. 8) ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n \right\}^{1/2} \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=\nu_{k_i}+1}^{\nu_{k_{i+1}}} a_n^2 \log^2 n \right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{k_i} \left\{ \frac{2^{2(k_{i+1}-k_i)}}{\tilde{g}(k_{i+1}) \tilde{\varrho}_{i+1}} \right\}^{1/2} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2^{k_i}}{\sqrt{\tilde{g}(k_i)\tilde{\varrho}_i}} = \infty.$$

Daraus ergibt sich nach dem zitierten Ergebnis von K. TANDORI die Existenz eines in (a, b) orthonormierten Systems $\{\varphi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (10) nicht unbedingt konvergiert. Aus (3. 7) erhält man ferner mit einfacher Rechnung, daß (14) besteht. Nämlich gelten infolge unserer Annahme über $\tilde{\varrho}_i$ und $\tilde{g}(x)$, für genügend große i

$$\log\log \frac{1}{a_n^2} \leqq k_{i+1} + \frac{1}{2} \qquad (\nu_{k_i} < n \leqq \nu_{k_{i+1}})$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \bar{g}\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) = O(1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2k_i}}{\tilde{\varrho}_i} < \infty.$$

Damit haben wir den Satz 5 bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz 6

Auf Grund von (15) kann eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{\varrho_n\}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{\nu_n}\varrho_{\nu_n}} = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{\nu_n}\varrho_{\nu_n}^2} < \infty \tag{4.1}$$

angegeben werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Beziehungen

$$\bar{\lambda}_n = O((\log\log n)^2) \quad \text{und} \quad \varrho_n = O(\log\log n) \tag{4.2}$$

annehmen. Es sei

$$a_n = \left(n(\log n)^{3+8\frac{\log\log n}{\log n}} (\bar{\lambda}_n)^{2+4\frac{\log\log n}{\log n}} \varrho_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (n \geqq N)$$

bzw. $a_n = a_N$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$, wobei N so gewählt ist, daß die Folge $\{a_n\}$ monoton abnehmend ausfällt. Dann ist nach (4.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right\}^{1/2} \geqq K_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \frac{2^{2k}}{n(2^k)^{3+\frac{8k}{2^k}} (\bar{\lambda}_{\nu_{k+1}})^{2+\frac{4k}{2^k}} \varrho_{\nu_{k+1}}^2}\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq K_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{\nu_{k+1}} \varrho_{\nu_{k+1}}} = \infty,$$

weil $2^{\frac{8k^2}{2^k}}$ und $(\bar{\lambda}_{\nu_{k+1}})^{\frac{4k^2}{2^k}} \leqq (k+1)^{\frac{8k^2}{2^k}}$ für genügend große k kleiner als 2 sind. Aus dem zitierten Ergebnis von K. Tandori ergibt sich die Existenz eines in (a, b) orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (10) nicht unbedingt konvergiert. Für genügend große n gilt aber nach (4.2)

$$\log a_n^{-\bar{\alpha}_n} = \frac{\bar{\alpha}_n}{2} \log \frac{1}{a_n^2} = \frac{2\log\log n + \log \bar{\lambda}_n}{\log n} \left(\log n + \left(3 + 8\frac{\log\log n}{\log n}\right) \log\log n + \right.$$

$$\left. + \left(2 + 4\frac{\log\log n}{\log n}\right) \log \bar{\lambda}_n + 2\log \varrho_n\right) \leqq \left(1 + 4\frac{\log\log n}{\log n}\right) \log((\log n)^2 \bar{\lambda}_n)$$

und somit

$$a_n^{-\bar{\alpha}_n} \leqq (\log n)^{2+8\frac{\log\log n}{\log n}} \lambda_n^{1+4\frac{\log\log n}{\log n}}.$$

Daraus und aus der Definition von a_n ergibt sich nach (4.1)

$$\sum_{n=5}^{\infty} a_n^{2-\bar{\alpha}_n} \leqq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)\bar{\lambda}_n \varrho_n^2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \frac{1}{n(\log n)\bar{\lambda}_{\nu_k} \varrho_{\nu_k}^2} \leqq K_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{\nu_k} \varrho_{\nu_k}^2} < \infty.$$

Damit haben wir den Satz 6 bewiesen.

Literatur

[1] L. Leindler, Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen, *Studia Math.* **23** (1963), 113—117.
[2] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bull. Internat. Acad. Sci. Polonaise Cracovie.* (1927), 81—115.
[3] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math. Szeged* **23** (1962), 185—221.

(Eingegangen am 14. Oktober 1963.)