Eine Verallgemeinerung des Satzes von Szegő über die Hankelschen Determinanten

Herrn Professor Dr. Andreas Rapcsák zum 50. Geburtstag gewidmet

Von L. TAR (Debrecen)

Einführung

$\{f_n(t)\}$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ sei ein System im Intervall (a, b) stetiger reeller und linear unabhängiger Funktionen. Mittels des hieraus durch das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren erhaltenen orthogonalen Funktionensystems $\{\Phi_n(t)\}$; $n=0, 1, 2, \dots$ und der über dem Intervall (a, b) L-integrierbaren reellen Funktion $f(t)$ bilden wir die quadratische Form

$$Q_n(f;\ y_0, \dots, y_n) = \int_a^b f(t)\left[y_0\Phi_0(t) + \dots + y_n\Phi_n(t)\right]^2 dt,$$

wo $Q_n(1; y_0, \dots, y_n) = I$ (Einheitsform) ist. Wenn $Q_n(f)$ bzw. $Q_n(1)$ die Matrizen dieser quadratischen Formen sind, dann genügen die Eigenwerte der quadratischen Form der Gleichung

$$\operatorname{Det}\left[Q_n(f-\lambda)\right] = 0.$$

Wenn $a = -\pi$, $b=\pi$, $f_n(t) = \Phi_n(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-int}$; $n=0, 1, \dots$ dann sind die Formen $Q_n(f; y_0, \dots, y_n)$ die sogenannten *klassischen Toeplitzschen Formen*. Wenn dagegen $a = -1$, $b=1$, $f_n(t) = t^n$ und $\Phi_n(t) = (n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(t)$ ist ($P_n(t)$ das n-te Legendresche Polynom), dann bekommen wir die *Hankelschen Formen*.

G. SZEGŐ beschäftigt sich in mehreren Arbeiten mit der Verteilung der Eigenwerte der Toeplitzschen und Hankelschen Formen. Diese Sätze ([2] Seite 64, 76, 89 (4)) über die Eigenwerte der Toeplitzschen Formen sind auf den Fall verallgemeinert worden, wenn man statt einer erzeugenden Funktion eine, auf die entsprechende Grundmenge beschränkte und meßbare Funktionenmatrix betrachtet, d. h. die erzeugende Funktion durch eine solche Matrix ersetzt, deren Elemente auf der vorgegebenen Menge meßbare und beschränkte Funktionen sind. (Siehe [6].)[1]) Diese Arbeit knüpft sich an diesen Problemkreis der Verallgemeinerung an.

[1]) Das Literaturverzeichnis enthält sämtliche solche Verallgemeinerungen der Sätze von SZEGŐ über die Eigenwerte der Toeplitz-Formen, wo statt einer erzeugenden Funktion eine Funktionenmatrix auftritt. (Siehe [3]–[8].)

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor BÉLA GYIRES meinen Dank aussprechen, der mich auf dieses Thema aufmerksam gemacht hat. In dieser Arbeit beweisen wir zunächst eine den genannten Sätzen entsprechende Aussage über die von Funktionenmatrizen erzeugten Hankelschen Hypermatrizen, außerdem geben wir mit ihrer Hilfe eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes von SZEGŐ über die Hankelschen Determinanten:

Wenn $f(t)$ eine im Intervall (a, b) positive untere Schranke hat, und eine R-integrierbare reelle Funktion ist, dann gilt für die zugeordnete Hankelsche Determinante

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(a,b)}(f)}{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(a,b)}(1)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_a^b \ln f(t)\,\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\right\}, \tag{1}$$

wobei $\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(a,b)}(f)$ die Determinante des n-ten Abschnittes der durch die Funktion $f(t)$ definierten Hankelschen Matrix ist. (Siehe [9] Satz IV'.)

Da jedoch SZEGŐ in [9] beweist, daß

$$\frac{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(a,b)}(f)}{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(a,b)}(1)} = \frac{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(-1,1)}(f)}{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(-1,1)}(1)}$$

ist, läßt sich der obige Satz leicht im folgender speziellerer Form verifizieren:

Ist $f(t)$ eine im Intervall $(-1, 1)$ R-integrierbare reelle Funktion die eine positive untere Schranke hat, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(-1,1)}(f)}{\operatorname{Det}\mathbf{H}_n^{(-1,1)}(1)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln f(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\} \tag{2}$$

(S. [9] Satz IV.).

Wir betonen noch einmal, daß die Verallgemeinerung des obigen Satzes auf Determinanten einer durch eine reelle quadratische Funktionenmatrix endlicher Ordnung erzeugten Hankelschen Matrix erfolgt. Die der Funktionenmatrix auferlegten Bedingungen sind elementweise zu verstehen.

In § 1 führen wir analog zum Begriff der in den Arbeiten [3], [4] und [6] zu findenden klassischen Toeplitz-Hypermatrizen den Begriff der verallgemeinerten Toeplitz-Hypermatrix ein, danach beweisen wir unter Benutzung des Satzes 1. von [9] (welcher auch im Falle allgemeinerer Bedingungen, d. h. wenn $f(t)$ über der Grundmenge beschränkt und meßbar ist, für die relle Funktion $f(t)$ gilt,) für uns notwendige Analoga der in der Arbeit [6] auftretenden Sätze (S. die Sätze 15., 16. und 17. von [6]).

Unser Endziel ist die Verifizierung des zum Satz 18. von [6] analogen Satzes 7 für die Determinante der verallgemeinerte Toeplitz-Hypermatrix. Der Beweis weicht sowohl von der Beweismethode von [6] als auch von [9] ab, jedoch ist wie auch in [6] der Beweis des Analogons des auf S. 112 von [6] stehenden Lemmas entscheidend. (Satz 2.)

In § 2 nach der Definition des Begriffes der Hankel-Hypermatrix werden wir die Hankel-Hyperform ähnlich wie SZEGŐ in eine verallgemeinerte Toeplitz-Hyperform überführen, und die Sätze des vorigen Paragraphs auf den Fall der transformierten Hankel-Hyperformen übertragen. Die Sätze dieses Paragraphs führen uns zu einer Verallgemeinerung des Satzes von SZEGŐ. Vor der Formulierung dieses Satzes führen wir einige Abkürzungen und Bezeichnungen ein.

Wir bezeichnen die Funktionenmatrizen mit lateinischen Buchstaben und die Zahlmatrizen mit großen lateinischen Buchstaben (z. B. $\mathbf{A} = \|a_{pq}\|_{p,q=0,1,\ldots,n}$). Sp $\mathbf{A}$ bedeutet die Spur der Matrix $\mathbf{A}$ im üblichen Sinn.

Ferner bezeichnen wir die Menge der über dem Intervall (a, b) beschränkten und meßbaren reellen Funktionenmatrizen mit $G^{(a,b)}$. $G^{(a,b)} > 0$ sei die Menge der vorigen Matrizen, wenn dieselbe noch eine positive untere Schranke haben. In allgemeinen haben die quadratischen Funktionenmatrizen und die Zahlmatrizen bei uns die Ordnung r (r ist eine natürliche Zahl).

Wir bezeichnen die mit der Funktionenmatrix $\mathbf{f}(t) \in G^{(a,b)}$ erzeugte verallgemeierte Toeplitz-Hypermatrix mit $\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f})$ und die Hankel-Hypermatrix mit $\mathbf{H}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f})$. In dieser Arbeit haben die auftretenden Indizes die folgenden ganzen Zahlwerte:

$$\begin{aligned} p, q &= 0, 1, \ldots, n \\ n &= 0, 1, 2, \ldots \\ \nu &= 1, 2, 3, \ldots \\ i, j &= 1, 2, \ldots, r \\ l &= 1, 2, \ldots, k \\ \varrho &= 1, 2, \ldots, (n+1)r. \end{aligned}$$

So kann man eine Verallgemeinerung des Satzes von SZEGŐ folgendermaßen formulieren:

Wenn $\mathbf{f}(t) \in G^{(a,b)} > 0$ ist, dann gilt für die Determinante der Hankel-Hypermatrix

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\operatorname{Det} \mathbf{H}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f})}{\operatorname{Det} \mathbf{H}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{E})} \right\}^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int_a^b \ln \operatorname{Det} \mathbf{f}(t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \right\}, \tag{3}$$

wobei $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix ist.

Die Strukturen von (3) und von (1) sind ähnlich. Statt (3) werden wir den vorigen Satz im einfacheren Falle

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\operatorname{Det} \mathbf{H}_{nr}^{(-1,1)}(\mathbf{f})}{\operatorname{Det} \mathbf{H}_{nr}^{(-1,1)}(\mathbf{E})} \right\}^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln \operatorname{Det} \mathbf{f}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right\}$$

beweisen.

§ 1. Die verallgemeinerten Toeplitz-Hyperformen

In diesem Teil der Arbeit führen wir eine spezielle verallgemeinerte Toeplitz-Hyperform ein, die eine weitere Verallgemeinerung der K-Formen ist. Die K-Formen sind verallgemeinerte Toeplitzsche Formen, und diese treten in [9] auf.

Definition 1. Sei $\mathbf{f}(t) \in G^{(0,1)}$. Die quadratische Form

$$\mathbf{K}_{nr}(\mathbf{f};\, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) = \int_0^1 \mathbf{f}(t)[\mathbf{X}_0\boldsymbol{\Psi}_0(t) + \dots + \mathbf{X}_n\boldsymbol{\Psi}_n(t)]^2\, dt = \tag{4}$$

$$= \sum_{p,q=0}^{n} \mathbf{K}_{pq}\mathbf{X}_p\mathbf{X}_q, \qquad \mathbf{K}_{pq} = \int_0^1 \mathbf{f}(t)\,\boldsymbol{\Psi}_p(t)\boldsymbol{\Psi}_q(t)\, dt$$

heißt eine mit $\mathbf{f}(t)$ erzeugte $\mathbf{K}$-Hyperform; hier ist

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{E}x_p, \qquad \boldsymbol{\Psi}_0(t) = \mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\Psi}_\nu(t) = \mathbf{E}\sqrt{2}\cos \nu\pi t \tag{5}$$

($\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix). Wir bezeichnen die Determinante der Matrix $\|\mathbf{K}_{pq}\|$ der verallgemeinerten Toeplitz-Hyperform mit Det $\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})$.

Definition 2. Wir sagen, daß das System $\{\chi_n\}$ von quadratischen reellen Funktionenmatrizen ein über dem Intervall (a, b) orthonormiertes System bildet, wenn

$$\int_a^b \chi_p \chi_q'\, dt = \begin{cases} \mathbf{E}, & p = q \\ \mathbf{0}, & p \neq q \end{cases}$$

(χ_q' ist die transponierte der Matrix χ_q, $\mathbf{O}$ die Nullmatrix ist) gilt.

Definition 3. Wir nennen ein im Intevall (a, b) orthonormiertes Funktionenmatrixsystem $\{\chi_n\}$ vollständig, wenn die Parsevalsche Gleichung für jeden Vektor des Quasi—Hilbertschen Räumes erfüllt ist. (Die Definition des Quasi—Hilbertschen Raumes findet sich in [6].)

Bemerkung. Da das Funktionensystem $\{1; \sqrt{2}\cos \nu\pi t\}$ ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes und vollständiges System ist, (der Beweis in [9]), sieht man leicht ein, daß das Funktionenmatrixsystem (5) über dem Intervall $(0, 1)$ auch orthonormiert und vollständig ist.

Satz 1. *Ist* $\mathbf{f}(t) \in G^{(0,1)}$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}) = \int_0^1 \operatorname{Sp} \mathbf{f}(t)\, dt. \tag{6}$$

Beweis. Es sei $\mathbf{f} = \|f_{ij}\|$ und

$$k_{pq}^{(i,j)} = \int_0^1 f_{ij}(t)\sqrt{2}\cos p\pi t \cdot \sqrt{2}\cos \pi q t\, dt.$$

Dann kann man die Matrix. $\mathbf{K}_{pq}$ folgendermaßen aufschreiben:

$$\left\| \begin{matrix} k_{pq}^{(11)} & k_{pq}^{(12)} & \dots & k_{pq}^{(1r)} \\ k_{pq}^{(21)} & k_{pq}^{(22)} & \dots & k_{pq}^{(2r)} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{pq}^{(r1)} & k_{pq}^{(r2)} & \dots & k_{pq}^{(rr)} \end{matrix} \right\|.$$

Ordnen wir die Matrix $\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})$ mit gleichzahligen Zeilen- und Spaltenvertauschungen so um, daß die Elemente mit identischen Oberindizes in einem Block fallen. Nach der Umordnung ergibt sich

$$\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}) = \mathbf{L}\,\|\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij})\|\,\mathbf{L}^{-1} \tag{7}$$

wo $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{E}$ ($\mathbf{L}'$ die transponierte Matrix ist), und

$$\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij}) = \begin{Vmatrix} k_{00}^{(ij)} & k_{01}^{(ij)} & \dots & k_{0n}^{(ij)} \\ k_{10}^{(ij)} & k_{11}^{(ij)} & \dots & k_{1n}^{(ij)} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{n0}^{(ij)} & k_{n1}^{(ij)} & \dots & k_{nn}^{(ij)} \end{Vmatrix}$$

gilt. Da die Spur einer Matrix im Fall der Ahnlichkeitstransformation unverändert bleibt, erhalten wir auf Grund (7) die Relation

$$\operatorname{Sp} \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{p=0}^{n} k_{pp}^{(ii)}$$

Ferner besteht

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} k_{pp}^{(ii)} = \int_0^1 f_{ii}(t)\,dt, \tag{8}$$

und deshalb ist, entsprechend unserer Behauptung,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} f_{ii}(t)\,dt.$$

Folgerung. *Ist* $\mathbf{f}(t) \in G^{(0,1)}$, *so besteht*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}^2) = \int_0^1 \operatorname{Sp} \mathbf{f}^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Nämlich gilt $\mathbf{f}^2(t) \in G^{(0,1)}$.

Satz 2. *Wenn* $\mathbf{f}(t) \in G^{(0,1)}$ *gilt, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \left[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})\right]^2 = \int_0^1 \operatorname{Sp} \mathbf{f}^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Beweis. Zum Beweis dieser Behauptung verwenden wir folgenden Satz von Szegő (siehe Satz 1. in [9]):

Ist f_{ij} eine im Intervall (0, 1) beschränkte und meßbare Funktion, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \left[\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij})\right]^2 = \int_0^1 f_{ij}^2(t)\,dt. \tag{11}$$

Andererseits ergibt sich auf Grund (8)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij}^2)=\int_0^1 f_{ij}^2(t)\,dt. \tag{12}$$

Unter Anwendung von (11) und von (12) bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\operatorname{Sp}[\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij})]^2-\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij}^2)\}=0. \tag{13}$$

Daraus folgt für die Funktionen $f_{ij}(t)$ und $g_{ij}(t)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\operatorname{Sp}[\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij}+g_{ij})]^2-\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}[(f_{ij}+g_{ij})^2]\}=0$$

und hieraus ergibt sich die Relation

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij})\mathbf{K}_n^{(0,1)}(g_{ij})-\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij}g_{ij})\}=0. \tag{14}$$

Wegen (7) ist

$$\operatorname{Sp}[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})]^2=\sum_{i,j=1}^{r}\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij})\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ji}),$$

und so besteht

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\operatorname{Sp}[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})]^2=\sum_{i,j=1}^{r}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij})\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ji}).$$

Hier kann man die rechte Seite wegen (14) und $f_{ij}\neq f_{ji}$ in folgender Form schreiben

$$\sum_{i,j=1}^{r}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\operatorname{Sp}\mathbf{K}_n^{(0,1)}(f_{ij}f_{ji}).$$

Da $f_{ij}(t)f_{ji}(t)$ eine über dem Intervall (0, 1) beschränkte und messbare Funktion ist, läßt sich (8) anwenden, und so folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\operatorname{Sp}[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})]^2=\int_0^1\sum_{i,j=1}^{r}f_{ij}(t)\,f_{ji}(t)\,dt,$$

d. h. es gilt (10).

Wir gewinnen aus der Folgerung des ersten Satzes und aus dem zweiten Satz den

Satz 3. *Ist* $\mathbf{f}(t)\in G^{(1,0)}$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\operatorname{Sp}[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})]^2-\operatorname{Sp}\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}^2)\}=0. \tag{15}$$

Satz 4. *Für* $\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)\in G^{(0,1)}$, *gilt die folgende Grenzwertgleichheit:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\operatorname{Sp}\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{g})-\operatorname{Sp}\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{fg})\}=0. \tag{16}$$

BEWEIS. Da $\mathbf{f}+\mathbf{g}\in G^{(0,1)}$ ist, wir erhalten wegen (15)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \{\mathrm{Sp}\,[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}+\mathbf{g})]^2 - \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}[(\mathbf{f}+\mathbf{g})^2]\} = 0.$$

Führt man die bezeichneten Operationen auf der linken Seite aus, und wendet die Relationen

$$\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(c\mathbf{f}) = c\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f}) \qquad (\text{wo } c \text{ konstant ist})$$

$$\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f})+\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{g})$$

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(c\mathbf{f}) = c\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f})$$

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{f})+\mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(a,b)}(\mathbf{g})$$

an, so ergibt sich (16).

Leicht bekommt man die folgende Verallgemeinerung des vierten Satzes.

Satz 5. *Sind* $\mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t), \ldots, \mathbf{f}_k(t)\in G^{(0,1)}$, *so erfüllt sich*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left\{\mathrm{Sp}\left[\prod_{l=1}^{k} \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}_l(t))\right] - \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}\left[\prod_{l=1}^{k} \mathbf{f}_l(t)\right]\right\} = 0. \tag{17}$$

Definition 4. Wir sagen, daß eine verallgemeinerte Toeplitz-Hypermatrix spurvollständig ist, wenn für sie (17) besteht.

BEMERKUNG. Für $r=1$ findet sich die vorige Definition in dem Buch [2].

Hat eine Normalmatrix $\mathbf{A}$ die Jordan-Normalform

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_r \end{Vmatrix}\mathbf{U}^*, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^*=\mathbf{E},$$

und ist $F(x)$ eine über den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ definierte Funktion, so verstehen wir die Funktion $F(\mathbf{A})$ der Matrix $\mathbf{A}$ im üblichen Sinne, d. h.

$$F(\mathbf{A})=\mathbf{U}\begin{Vmatrix} F(\lambda_1) & & & (0) \\ & F(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & F(\lambda_r) \end{Vmatrix}\mathbf{U}^*.$$

Es seien $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_r(t)$ die Eigenwerte der Funktionenmatrix $\mathbf{f}(t)$ und es sei

$$m = \inf_{t,j}\{\lambda_j(t)\}, \quad M = \sup_{t,j}\{\lambda_j(t)\}, \quad t\in(a,b).$$

Diese Tatsache bezeichnen wir folgendermaßen:

$$m\leqq \mathbf{f}(t)\leqq M$$

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

Ist $F(\mathbf{f})$ im Intervall (m, M) stetig, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \{\mathrm{Sp}\, \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}[F(\mathbf{f})] - \mathrm{Sp}\, F[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})]\} = 0. \tag{18}$$

Beweis. Es sei $\mathbf{f}_1(t) = \ldots = \mathbf{f}_k(t) = \mathbf{f}(t)$. Auf Grund der Relation (17) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \{\mathrm{Sp}\, [\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})]^k - \mathrm{Sp}\, \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}^k)\} = 0. \tag{19}$$

Diese Relation zeigt, daß die Gleichheit (18) im Fall $F(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^k(t)$ richtig ist. Darum gilt (18) im Fall eines beliebigen Polynoms, und so ist auf Grund des Weierstrasschen Approximationssatzes die Formel (18) für eine beliebige stetige Funktion $F(\mathbf{f})$ gültig.

Mit der Anwendung von (6) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \mathrm{Sp}\, \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}[F(\mathbf{f})] = \int_0^1 \mathrm{Sp}\, F(\mathbf{f})\, dt.$$

Wenn man noch die Relation (18) betrachtet, dann bekommt man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \mathrm{Sp}\, F[\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})] = \int_0^1 \mathrm{Sp}\, F(\mathbf{f})\, dt. \tag{20}$$

Satz 6. *Ist $\mathbf{f}(t) \in G^{(0,1)}$, und ist $F(\lambda)$ im Intervall (m, M) stetig, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{p=0}^{n} F(\lambda_i^{(p)}) = \sum_{j=1}^{r} \int_0^1 F[(\lambda_j(t)]\, dt, \tag{21}$$

wobei die $\lambda_i^{(p)}$ die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})$ bezeichnen.

Der Beweis verläuft ebenso, wie derjenige des entsprechenden Satzes von [6], wenn man von der Definition der $F(\mathbf{A})$ und von der Formel (20) ausgeht.

Satz 7. *Ist $\mathbf{f}(t) \in G^{(0,1)} > 0$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \{\mathrm{Det}\, \mathbf{K}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})\}^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{\int_0^1 \ln \mathrm{Det}\, \mathbf{f}(t)\, dt\right\}. \tag{22}$$

Beweis. Man kann die Formel (21) auch folgendermaßen schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varrho=1}^{(n+1)r} F(\lambda_\varrho) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{r} F[\lambda_j(t)]\, dt.$$

Es sei hier speziell $F(\lambda) = \ln \lambda$, so ergibt sich mit einfacher Überlegung (22).

§ 2. Die Hankel-Hyperformen

Eine Hankel-Hyperform ist mit einer Funktionenmatrix endlicher Ordnung dargestellt. Nach der Definition der Hankel-Hyperformen führen wir diese Formen durch eine geeignete lineare Transformation in eine verallgemeinerte Toeplitz-Hyperform über. So sind die Sätze des vorigen Paragraphs gültig auch für die transformierten Hankel-Hyperformen.

Definition 5. Es sei $\mathbf{f}(t) \in G^{(a,b)}$. Die qadratische Form

$$\mathbf{H}_{nr}^{(a,b)}[\mathbf{f}(t); \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n] =$$

$$= \int_a^b \mathbf{f}(t)[\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 t + \ldots + \mathbf{X}_n t^n]^2 \, dt = \sum_{p,q=0}^{n} \mathbf{H}_{p+q} \mathbf{X}_p \mathbf{X}_q,$$

$$\mathbf{H}_{p+q} = \int_a^b \mathbf{f}(t) t^{p+q} \, dt$$

nennt man eine mit $\mathbf{f}(t)$ erzeugten Hankel-Hyperform. Die Formmatrix

$$\mathbf{H}_{nr}^{(a,b)}[\mathbf{f}(t)] = \|\mathbf{H}_{p+q}\|$$

ist die sogenannte Hankel-Hypermatrix. ($\mathbf{X}_p = \mathbf{E}x_p$).

Es sei ferner $a = -1, b = 1$. Setzen wir in die Hankel-Hyperform $t = \cos \pi\theta$ ein. Danach verwenden wir die reguläre lineare Transformation

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1 \cos \pi\theta + \ldots + \mathbf{X}_n \cos^n \pi\theta = \mathbf{Y}_0 \mathbf{\Psi}_0(\theta) + \mathbf{Y}_1 \mathbf{\Psi}_1(\theta) + \ldots + \mathbf{Y}_n \mathbf{\Psi}_n(\theta).$$

So ergibt sich die transformierte Hankel-Hyperform in der Form

$$\overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0.1)}[\mathbf{f}(\cos \pi\theta); \mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n] =$$

$$= \pi \int_0^1 \mathbf{f}(\cos \pi\theta) \sin \pi\theta \, [\mathbf{Y}_0 \mathbf{\Psi}_0)\theta) + \mathbf{Y}_1 \mathbf{\Psi}_1(\theta) + \ldots + \mathbf{Y}_n \mathbf{\Psi}_n(\theta)]^2 \, d\theta =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{n} \overline{\mathbf{H}}_{p+q} \mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_q,$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{p+q} = \pi \int_0^1 \mathbf{f}(\cos \pi\theta) \sin \pi\theta \, \mathbf{\Psi}_p(\theta) \mathbf{\Psi}_q(\theta) \, d\theta, \tag{23}$$

wobei $\mathbf{Y}_p = \mathbf{E}y_p$ ist, und das Funktionenmatrixsystem $\{\mathbf{\Psi}\}$ über dem Intervall $(0, 1)$ vollständig und orthonormiert ist.

Die Struktur der transformierten Hankel-Hypermatrix ist derjenigen der Toeplitz-Hypermatrix ähnlich, nur in der transformierten Hankel-Hypermatrix tritt statt der Matrix $\mathbf{f}(t)$ die Matrix $\pi\mathbf{f}(\cos \pi\theta) \sin \pi\theta$ auf.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache werden wir die Sätze des vorigen Paragraphs umformen.

Satz 8. *Ist* $\mathbf{f}(\cos \pi\theta) \in G^{(0,1)}$ *(kurz* $\mathbf{f}(\theta) \in G^{(0,1)}$*), so erhalten wir*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}[f(\theta)] = \pi \int_0^1 \operatorname{Sp}[f(\cos\pi\theta)\sin\pi\theta]\,d\theta. \tag{24}$$

Folgerung. *Für* $\mathbf{f}(\theta) \equiv \mathbf{E}$ *ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{E}) = \pi \int_0^1 \operatorname{Sp}[\mathbf{E}\sin\pi\theta]\,d\theta.$$

Satz 9. *Sind* $\mathbf{f}(\theta), \mathbf{g}(\theta) \in G^{(0,1)}$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \{\operatorname{Sp} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}[\mathbf{f}(\theta)\,\mathbf{g}(\theta)] - \operatorname{Sp} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}[\mathbf{f}(\theta)]\overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}[\mathbf{g}(\theta)]\} = 0.$$

Satz 10. *Sind* $\mathbf{f}_1(\theta), \mathbf{f}_2(\theta), \ldots, \mathbf{f}_k(\theta) \in G^{(0,1)}$, *so besteht*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left\{\operatorname{Sp} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}\left[\prod_{l=1}^{k} \mathbf{f}_l(\theta)\right] - \operatorname{Sp}\left[\prod_{l=1}^{k} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}_l)\right]\right\} = 0.$$

Die entsprechende Relation der Gleichheit (20) bekommen wir in der Gestalt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{Sp} F[\overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f}(\theta))] = \int_0^1 \operatorname{Sp}\{F[\pi\mathbf{f}(\cos\pi\theta)\sin\pi\theta]\}\,d\theta. \tag{25}$$

Satz 11. *Gilt* $\mathbf{f}(\theta) \in G^{(0,1)}$ *und* $m \leqq \mathbf{f}(\theta) \leqq M$, *ist ferner* $F(\mu)$ *im Intervall* (m, M) *stetig, so erhalten wir*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left[\sum_{\varrho=1}^{(n+1)r} F(\mu_\varrho)\right] = \int_0^1 \sum_{j=1}^{r} F[\mu_j(\theta)]\,d\theta, \tag{26}$$

wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{(n+1)r}$ *die Eigenwerte der Matrix* $\overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}[\mathbf{f}(\theta)]$ *bezeichnen, und* $\mu_1(\theta), \ldots, \mu_r(\theta)$ *die Eigenwerte der Funktionenmatrix* $\mathbf{f}(\theta)$ *sind.*

Satz 12. *Ist* $\mathbf{f}(\theta) \in G^{(0,1)} > 0$, *so ergibt sich*

$$\lim_{n\to\infty} \{\operatorname{Det} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}[\mathbf{f}(\theta)]\}^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{\int_0^1 \ln[\operatorname{Det}\mathbf{f}(\cos\pi\theta)\operatorname{Det}(\mathbf{E}\pi\sin\pi\theta)]\,d\theta\right\}. \tag{27}$$

Folgerung. *Ist* $\mathbf{f}(\theta) \equiv \mathbf{E}$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \{\operatorname{Det} \overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{E})\}^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{\int_0^1 \ln\operatorname{Det}(\mathbf{E}\pi\sin\pi\theta)\,d\theta\right\}. \tag{28}$$

Satz 13. *Für* $\mathbf{f}(t) \in G^{(-1,1)} > 0$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\operatorname{Det}\mathbf{H}_{nr}^{(-1,1)}[\mathbf{f}(t)]}{\operatorname{Det}\mathbf{H}_{nr}^{(-1,1)}(\mathbf{E})}\right\}^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\operatorname{Det}\mathbf{f}(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}. \tag{29}$$

BEWEIS. Dividieren wir (27) mit der Relation (28), so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\operatorname{Det}\overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{f})}{\operatorname{Det}\overline{\mathbf{H}}_{nr}^{(0,1)}(\mathbf{E})}\right\}^{\frac{1}{n+1}}=\exp\left\{\int_0^1 \ln\left[\operatorname{Det}\mathbf{f}(\cos\pi\theta)\right]d\theta\right\}.$$

Dann setzen wir auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichheit $t=\cos\pi\theta$. Da

$$\frac{\operatorname{Det}\overline{\mathbf{H}}_{nr}(\mathbf{f})}{\operatorname{Det}\overline{\mathbf{H}}_{nr}(\mathbf{E})}=\frac{\operatorname{Det}\mathbf{H}_{nr}^{(-1,1)}(\mathbf{f})}{\operatorname{Det}\mathbf{H}_{nr}^{(-1,1)}(\mathbf{E})}$$

besteht, gilt tatsächlich (29).

Literatur

[1] F. R. GANTMACHER, Matrizenrechnung I., *Berlin*, 1958.

[2] U. GRENANDER—G. SZEGŐ, Toeplitz forms and their applications, *Berkeley* and *Los Angeles* 1958.

[3] B. GYIRES, Über Determinanten, deren Elemente Integrale von Funktionen sind, *Acta Univ. Debreceniensis* **3** (1956), 41—48.

[4] B. GYIRES, Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 171—179.

[5] B. GYIRES, Valós függvénymatrixokhoz tartozó Toeplitz-féle determinánsokról, *Acta Univ. Debreceniensis* **5** (1958), 145—158.

[6] B. GYIRES, Über die Spuren der verallgemeinerten Toeplitzschen Matrizes, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 93—116.

[7] B. GYIRES, A generalization of a theorem of Szegő, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **8** (1962), 43—51.

[8] B. GYIRES, Függvénymatrixokkal generált Toeplitz-féle matrixokról (Im Druck.).

[9] G. SZEGŐ, A Hankel-féle formákról, *Mat. Term. tud. Értesítő* **36** (1918), 497—538.

(Eingegangen am 1. November 1963.)