Über die Verallgemeinerung des Kroneckerschen Rangzahlsatzes auf Polynomideale*)

Von BODO RENSCHUCH (Halle/Saale)

Die praktische Bestimmung des Ranges einer Matrix bzw. eines linearen homogenen Gleichungssystems wird durch den folgenden von KRONECKER[1]) stammenden Satz abgekürzt:

Satz 1a (KRONECKER*scher Rangzahlsatz*[2])). *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine Matrix vom Format* $(s, n+1)$ *und o. B. d. A.* $s < n+1$, *ist ferner* U *eine r-reihige Unterdeterminante von* $\mathfrak{A}$ *mit* $U \neq 0$, *während alle durch Rändern von* U *entstehenden* $(r+1)$*-reihigen Unterdeterminanten von* $\mathfrak{A}$ *verschwinden, so ist* r *der* R a n g *von* $\mathfrak{A}$.

Ist U o. B. d. A. eine Unterdeterminante der aus den ersten r Zeilen gebildeten Teilmatrix von $\mathfrak{A}$ und fassen wir $\mathfrak{A}$ als Matrix eines linearen homogenen Gleichungssystems

$$l_\sigma \equiv a_{\sigma 0}x_0 + a_{\sigma 1}x_1 + \dots + a_{\sigma n}x_n = 0 \qquad (\sigma = 1, \dots, r, r+1, \dots, s) \tag{1}$$

auf, so können wir Satz 1a auch so formulieren:

Satz 1b. *Sind die Linearformen* $l_1, \dots, l_r$ *des Linearformenmoduls* $(l_1, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_s)$ *linear unabhängig, aber* $l_1, \dots, l_r, l_{r+i}$ *für jedes* $i = 1, \dots, s-r$ *linear abhängig, also* $l_{r+i} \in (l_1, \dots, l_r)$, *so gilt*

$$(l_1, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_s) = (l_1, \dots, l_r). \tag{2}$$

Bei Linearformenmoduln ist damit gleichbedeutend der

Satz 1c. *Haben die Linearformenmoduln* $(l_1, \dots, l_r)$, $(l_1, \dots, l_r, l_{r+i})$ *für jedes* $i = 1, \dots, s-r$ *den Rang* r, *so hat* $(l_1, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_s)$ *den Rang* r *und es ist* $l_{r+i} \in (l_1, \dots, l_r)$ *für jedes* $i = 1, \dots, s-r$.

Die entsprechenden homogenen Gleichungssysteme haben dann eine allgemeine Lösung mit $n-r+1$ Parametern. Definieren wir nun in Übereinstimmung mit der

*) Vortrag, gehalten auf dem mathematischen Symposium zur 150—Jahrfeier der Berliner Universität am 10. 11. 1960.

[1]) KRONECKER, L.: Bemerkungen zur Determinantentheorie (Auszug aus Briefen an Herrn BALTZER). J. f. d. r. u. a. Math. **72**, 152—175 (1870) bzw. Werke, 1. Band, 237—269, *Leipzig* 1895.

[2]) In den meisten Lehrbüchern über lineare Algebra bzw. Analytische Geometrie wird dieser Satz ohne Bezugnahme auf KRONECKER bewiesen. Die hier gewählte Formulierung wurde der vor kurzem erschienenen deutschen Ausgabe des Buches von RÉDEI entnommen (RÉDEI, L.: Algebra I, *Leipzig* 1959, § 103, Satz 252, Seite 420).

Theorie der H-Ideale (= homogene Polynomideale) als *Dimension* des jeweiligen Linearformenmoduls die Zahl $d = n - r$, so können wir in Satz 1c die Worte „*den Rang r*" durch „*die Dimension* $d = n - r$" ersetzen.

Die von Herrn Prof. REICHARDT im Berliner algebraischen Seminar gestellte Aufgabe, den KRONECKERschen Satz auf Polynomideale zu übertragen, kann nun vermittels der Fassungen 1b und 1c auf zweierlei Weise behandelt werden.

Die Verallgemeinerung von Satz 1b führt zu einer ziemlich trivialen Aussage:

Satz 2. *Ist* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ *die Minimalbasis eines* H = *Ideals* $\mathfrak{a}$ *(vom Rang*[3]*)* $r \leqq t$*) und* $\varphi_{t+i} \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ *für* $s - t$ *Formen* $\varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s$*, so ist*

$$(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) = \mathfrak{a}. \tag{3}$$

Die Verallgemeinerung (V) von Satz 1c wäre hingegen etwas interessanter, nämlich:

(V) *Sei* $\mathfrak{a} = \varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ *ein H-Ideal. Aus Dim.*[3]*)* $\mathfrak{a} = d$, *Dim.* $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+i}) = d$ *für jedes* $i = 1, \ldots, s - t$ *folgt*

$$\mathrm{Dim}\,(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) = d \tag{4}$$

und

$$\varphi_{t+i} \in \mathfrak{a} \ \textit{für jedes} \ i = 1, \ldots, s - t. \tag{5}$$

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß beide Aussagen von (V) im allgemeinen *nicht* richtig sind. Als hinreichend für die Gültigkeit von (4) wird sich u. a. erweisen, daß $\mathfrak{a}$ ein Primärideal $\mathfrak{q}$ ist; für (5) wird sich als hinreichend erweisen, daß $\mathfrak{a}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist.

Um ein Gegenbeispiel für die Aussage (V) zu gewinnen, können wir uns auf den Fall Dim. $\mathfrak{a} = \mathrm{Dim.}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_t) = d = 0$ beschränken. Das Nullstellengebilde von $\mathfrak{a}$ besteht dann aus endlich vielen isolierten Punkten $P_1, \ldots, P_k$ mit $P_\varkappa = (\xi_0^{(\varkappa)}, \xi_1^{(\varkappa)}, \ldots, \xi_n^{(\varkappa)})$, denen bei algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper und $\xi_0^{(\varkappa)} \neq 0$ genau k Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ mit $\mathfrak{p}_\varkappa = (\xi_0^{(\varkappa)} x_1 - \xi_1^{(\varkappa)} x_0, \ldots, \xi_0^{(\varkappa)} x_n - \xi_n^{(\varkappa)} x_0)$ entsprechen[4]). Die Voraussetzung Dim. $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+i}) = 0$ bedeutet nun, daß für jedes $i = 1, \ldots, s - t$ wenigstens je einer der Punkte $P_\varkappa$ das Nullstellengebilde von $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+i})$ darstellt, also $P_\varkappa \in NG(\varphi_{t+i})$ gilt. Bei $k \geqq 2$ folgt daraus aber im allgemeinen *nicht*, daß wenigstens einer der Punkte $P_1, \ldots, P_k$ allen diesen Nullstellengebilden gemeinsam ist; vielmehr lassen sich die φ_{t+i} leicht so bestimmen, daß der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{s-t} NG(\mathfrak{a}, \varphi_{t+i})$ leer, also Dim. $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) = -1$ ist im Gegensatz zu (4).

Die vorstehenden Überlegungen können wir auch so formulieren:

Ist Dim. $\mathfrak{a} = d = 0$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{r}$ mit den zugehörigen nulldimensionalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ und Dim. $\mathfrak{r} = -1$, so bedeutet Dim. $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+i}) = 0$, daß es für jedes $i = 1, \ldots, s - t$ unter den nulldimensionalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ wenigstens je eines, $\mathfrak{p}_{\lambda(i)}$, mit $\varphi_{t+i} \in \mathfrak{p}_{\lambda(i)}$ gibt. Daraus folgt bei $k \geqq 2$ im allgemeinen aber

[3]) Rang und Dimension sind jetzt im idealtheoretischen Sinne zu verstehen; im Gegensatz zur linearen Algebra kann die Länge einer Minimalbasis jetzt größer als der Rang sein. Sind die φ_σ Linearformen, ergibt sich wieder der Rangbegriff der linearen Algebra.

[4]) Vgl. hierzu etwa GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. *Wien* und *Innsbruck* 1949, *132.8* a, Seite 103.

nicht, daß auch wenigstens ein von i unabhängiges $\mathfrak{p}_\lambda$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$, $\varphi_{t+1} \in \mathfrak{p}_\lambda, \ldots, \varphi_s \in \mathfrak{p}_\lambda$, also $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$ existiert.

Die Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf den Fall beliebiger Dimension d lautet auf Grund des GRÖBNERschen[5]) *Satzes von der Dimensionserniedrigung* folgendermaßen:

Ist Dim. $\mathfrak{a} = d$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{r}$ mit den zugehörigen d=dimensionalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ und Dim. $\mathfrak{r} < d$, so bedeutet Dim. $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+i}) = d$, daß es für jedes $i = 1, \ldots, s-t$ unter den d-dimensionalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ wenigstens je eines, $\mathfrak{p}_{\lambda(i)}$, mit $\varphi_{t+i} \in \mathfrak{p}_{\varkappa(i)}$ gibt. Daraus folgt bei $k \geqq 2$ im allgemeinen aber *nicht*, daß auch wenigstens ein von i unabhängiges $\mathfrak{p}_\lambda$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$, $\varphi_{t+1} \in \mathfrak{p}_\lambda, \ldots, \varphi_s \in \mathfrak{p}_\lambda$, also $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$ existiert.

Hinreichend für (4) ist also, daß ein von i unabhängiges $\mathfrak{p}_\lambda$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$, $\varphi_{t+1} \in \mathfrak{p}_\lambda, \ldots, \varphi_s \in \mathfrak{p}_\lambda$ existiert. Um zu zeigen, daß diese Bedingung auch notwendig ist, werde hier eine Verallgemeinerung des GRÖBNERschen Satzes[5]) bewiesen, die zugleich einen Überblick über die Gesamtheit der in Frage kommenden Primideale $\mathfrak{p}_\lambda$ liefert:

Satz 3. *Sei* $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ *und* $Dim.\, \mathfrak{a} = Dim.\, (\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) = d$. *Sind* $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_l$ *sämtliche d-dimensionalen Primideale von* $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s)$, *so sind sie auch d-dimensionale Primideale von* $\mathfrak{a}$.

BEWEIS. Wegen $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ ist $\varphi_{t+i} \in \bar{\mathfrak{p}}_\lambda$ $(i = 1, \ldots, s-t)$ und $\mathfrak{a} \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_\lambda$. Ist nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{r}$ mit Dim. $\mathfrak{q}_\varkappa = d$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, Dim. $\mathfrak{r} < d$, so ist also (bei $\lambda = 1$) $\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{r} \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_1$ und wegen $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_k \cdot \mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k \cap \mathfrak{r}$ mithin $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_k \cdot \mathfrak{r} \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}_1$. Wegen Dim. $\mathfrak{r} <$ Dim. $\bar{\mathfrak{p}}_1 = d$ ist jedenfalls $\mathfrak{r} \neq \bar{\mathfrak{p}}_1$. Wäre nun $\mathfrak{r} = \tilde{\mathfrak{q}}_1(\mathfrak{r}) \cap \ldots \cap \tilde{\mathfrak{q}}_m(\mathfrak{r}) \subset \bar{\mathfrak{p}}_1$, also $\tilde{\mathfrak{q}}_1(\mathfrak{r}) \cdot \ldots \cdot \tilde{\mathfrak{q}}_m(\mathfrak{r}) \subset \bar{\mathfrak{p}}_1$, so würde o. B. d. A. $\tilde{\mathfrak{p}}_1(\mathfrak{r}) \subset \bar{\mathfrak{p}}_1$ und daraus[6]) Dim. $\mathfrak{r} \geqq$ Dim. $\tilde{\mathfrak{p}}_1(\mathfrak{r}) >$ Dim. $\bar{\mathfrak{p}}_1 = d$ im Widerspruch zu Dim. $\mathfrak{r} < d$ folgen. Wir haben also $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_k \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_1$ und somit o. B. d. A. $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \bar{\mathfrak{p}}_1$ Wegen der Gleichheit der Dimensionen folgt daraus $\mathfrak{p}_1 = \bar{\mathfrak{p}}_1$. Entsprechend folgt bei geeigneter Numerierung $\mathfrak{p}_2 = \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l = \bar{\mathfrak{p}}_l$ $(l \leqq k)$, q. e. d.

Wir haben damit als Lösung unserer Aufgabe den

Satz 4. *Ist* $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ *ein d-dimensionales H-Ideal und* $Dim.\, (\mathfrak{a}, \varphi_{t+i}) = d$ *für jedes* $i = 1, \ldots, s-t$, *so ist für die Gültigkeit von*

$$(4) \qquad Dim.\, (\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) = d$$

notwendig und hinreichend, daß wenigstens ein zu $\mathfrak{a}$ *gehöriges d-dimensionales Primideal* $\mathfrak{p}_\lambda$ *mit* $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$, $\varphi_{t+1} \in \mathfrak{p}_\lambda, \ldots, \varphi_s \in \mathfrak{p}_\lambda$ *existiert.*

Hinreichend für die Gültigkeit von

$$(5) \qquad \varphi_{t+1} \in \mathfrak{a} \qquad \textit{für jedes } i = 1, \ldots, s-t$$

ist, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_\lambda \doteq \mathfrak{p}$ *ein Primideal ist.*

[5]) GRÖBNER, a. a. 0. *133.15*, Seite 112.

[6]) GRÖBNER, a. a. 0. *133.12*, Seite 111, V. D. WAERDEN, B. L.: Algebra II, 4. Auflage, § 120, Seite 101, *Berlin, Göttingen, Heidelberg* 1959.

Spezialfälle

1. $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) = \mathfrak{a}$. In diesem Falle ist jedes zu $\mathfrak{a}$ gehörige d-dimensionale Primideal ein solches $\mathfrak{p}_\lambda$, das den obigen Bedingungen genügt, die mithin von selbst erfüllt sind.

2. $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ ist ein d-dimensionales Primärideal. Dann sind die zusätzlichen Bedingungen ebenfalls von selbst erfüllt. Denn ist $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primärideal, so ist wegen Dim. $(\mathfrak{q}, \varphi_{t+i}) = d$ für jedes $i = 1, \ldots, s-t$ zwangsläufig $\varphi_{t+1} \in \mathfrak{p}, \ldots, \varphi_s \in \mathfrak{p}$.

Im Falle der linearen Algebra ist $\mathfrak{a}$ speziell ein Primideal mit einer Basis aus Linearformen; die Spezialfälle *1)* und *2)* fallen dann zusammen.

3. Dasselbe gilt bereits, wenn $\mathfrak{a}$ nur eine d-dimensionale größte Primärkomponente, also die Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{r}$ mit Dim. $\mathfrak{q} = d$, Dim. $\mathfrak{r} < d$ besitzt.

Wir vermerken noch, daß die für die Gültigkeit von (5) hinreichende (aber offenbar keineswegs notwendige) Bedingung, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal ist, gleichbedeutend ist mit folgendem

Satz 5. *Ist* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s)$ *eine Minimalbasis des H-Ideals* $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s)$ *mit* $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ *und Dim.* $(\mathfrak{a}, \varphi_{t+1}, \ldots, \varphi_s) =$ *Dim.* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{a}$ *kein Primideal.*

Obwohl Satz 4 ein Beispiel dafür ist, daß sich gewisse Aussagen der linearen Algebra — evtl. unter zusätzlichen Bedingungen — auch auf solche Polynomideale übertragen lassen, deren Basis nicht nur aus Linearformen besteht, kann andererseits nicht übersehen werden, daß infolge dieser zusätzlichen Bedingungen die praktische Bedeutung von Satz 4 für die effektive Rang- und Dimensionsbestimmung eines Polynomideals im Gegensatz zur Bedeutung der Sätze 1a, b, c für Matrizen bzw. Linearformen recht gering ist. Dabei erhebt sich die Frage, ob wenigstens dasjenige Verfahren der linearen Algebra zur Rangbestimmung, bei welchem der KRONECKERsche Rangzahlsatz *nicht* benutzt wird, bei dem also das Verschwinden *aller* $(r+1)$-reihigen Unterdeterminanten gezeigt werden muß, *ohne* Zusatzbedingungen verallgemeinert werden kann.

Zunächst behalten die Sätze 3 und 4 (und auch 5, was aber hier weiter nicht interessiert) ihre Gültigkeit, wenn an Stelle von $\mathfrak{a}$ alle $\binom{s}{t}$ Ideale $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t})$ den Bedingungen für $\mathfrak{a}$ genügen. Wir haben also

Satz 3*. *Es sei für jede Kombination* $k_1, \ldots, k_t$ *der s Zahlen* $1, \ldots, s$ *zur t-ten Klasse Dim.* $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t}) =$ *Dim.* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) = d$. *Sind* $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_l$ *sämtliche d-dimensionalen Primideale von* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$, *so sind sie auch d-dimensionale Primideale von jedem Ideal* $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t})$.

Entsprechend gilt

Satz 4*. *Sind die für jede Kombination* $k_1, \ldots, k_t$ *der s Zahlen* $1, \ldots, s$ *entstehenden Ideale* $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t})$ *d-dimensionale H-Ideale und gilt Dim.* $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t}; \varphi_{k_{t+i}}) = d$ *für jedes* $k_{t+i} \in (1, \ldots, s)$ *mit* $k_{t+i} \neq k_\tau$ *für jedes* $\tau = 1, \ldots, t$, *so ist für die Gültigkeit von*

(4) $$\text{Dim.}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) = d$$

notwendig und hinreichend, daß wenigstens ein zu jedem Ideal $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t})$ *gehöriges Primideal* $\mathfrak{p}_\lambda$ *mit* $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t}) \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$, $\varphi_{k_{t+i}} \in \mathfrak{p}_\lambda$ *existiert.*

Hinreichend für die Gültigkeit von

$$\varphi_{k_{t+i}} \in (\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t}) \quad \textit{für jedes } k_{t+i} \in (1, \ldots, s) \textit{ mit } k_{t+i} \neq k_\tau \textit{ für jedes } \tau = 1, \ldots, t \textit{ bei fester Kombination } k_1, \ldots, k_t \tag{5}$$

ist, daß $(\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t})$ *ein Primideal ist.*

Wir wollen nun an zwei einfachen Gegenbeispielen zeigen, daß *die zur Gültigkeit von* (4) *notwendige und hinreichende Zusatzbedingung* (Existenz des Primideals $\mathfrak{p}_\lambda$) *auch unter den stärkeren Voraussetzungen von Satz* 4* *im allgemeinen nicht von selbst erfüllt ist.*

1. Beispiel: Es sei $n = 1$, $d = 0$, $s = 3$ und

$\varphi_1 = (\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0)(\xi_0 x_1 - \xi_2 x_0)$, $\varphi_2 = (\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0)(\xi_0 x_1 - \xi_3 x_0)$, $\varphi_3 = (\xi_0 x_1 - \xi_2 x_0)(\xi_0 x_1 - \xi_3 x_0)$ mit $\xi_0 \neq 0$, $\xi_1 \neq \xi_2$, $\xi_1 \neq \xi_3$, $\xi_2 \neq \xi_3$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (&\xi_0^2 x_1^2 - \xi_0(\xi_1 + \xi_2) x_0 x_1 + \xi_1 \xi_2 x_0^2,\\ &\xi_0^2 x_1^2 - \xi_0(\xi_1 + \xi_3) x_0 x_1 + \xi_1 \xi_3 x_0^2,\\ &\xi_0^2 x_1^2 - \xi_0(\xi_2 + \xi_3) x_0 x_1 + \xi_2 \xi_3 x_0^2).\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Voraussetzungen für die ξ_i folgt hieraus durch Subtraktion bzw. durch Abspaltung positiver Koeffizienten

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= \left(x_1^2 - \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_0} x_0 x_1 + \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_0^2} x_0^2,\; x_0 x_1 - \frac{\xi_1}{\xi_0} x_0^2,\; x_0^2\right)\\ &= (x_1^2, x_0 x_1, x_0^2) = (x_0, x_1)^2.\end{aligned}$$

Es ist also $\mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -1$, aber

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \text{ wegen } (\varphi_1, \varphi_2) &= (\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0)\cdot(\xi_0 x_1 - \xi_2 x_0, \xi_0 x_1 - \xi_3 x_0)\\ &= (\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0)\cdot(x_0, x_1) = (\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0) \cap (x_0, x_1^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_3) = 0 \text{ wegen } (\varphi_1, \varphi_3) &= (\xi_0 x_1 - \xi_2 x_0)\cdot(\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0, \xi_0 x_1 - \xi_3 x_0)\\ &= (\xi_0 x_1 - \xi_2 x_0)\cdot(x_0, x_1) = (\xi_0 x_1 - \xi_2 x_0) \cap (x_0, x_1^2) \quad \text{und auch}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim.}(\varphi_2, \varphi_3) = 0 \text{ wegen } (\varphi_2, \varphi_3) &= (\xi_0 x_1 - \xi_3 x_0)\cdot(\xi_0 x_1 - \xi_1 x_0, \xi_0 x_1 - \xi_2 x_0)\\ &= (\xi_0 x_1 - \xi_3 x_0)\cdot(x_0, x_1) = (\xi_0 x_1 - \xi_3 x_0) \cap (x_0, x_1^2).\end{aligned}$$

Die Betrachtung der jeweiligen Nullstellengebilde führt zu der einfachen geometrischen Tatsache, daß drei Punktepaare auf einer Geraden, die zu je zweien einen Punkt gemeinsam haben, insgesamt keinen gemeinsamen Punkt zu haben brauchen.

2. Beispiel: Es sei $n = 2$, $d = 0$, $s = 4$, $t = 2$. Auch dann kann aus

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_3) = \mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_4) = \mathrm{Dim.}(\varphi_2, \varphi_3) = \mathrm{Dim.}(\varphi_2, \varphi_4) =\\ = \mathrm{Dim.}(\varphi_3, \varphi_4) = 0\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) = \mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4) = \mathrm{Dim.}(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0$$

im allgemeinen *nicht* auf $\mathrm{Dim.}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0$ geschlossen werden.

Wählen wir

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv x_1^2+x_2^2+8x_0x_1-9x_0^2\\
\varphi_2 &\equiv x_1^2+x_2^2-8x_0x_1-9x_0^2\\
\varphi_3 &\equiv x_1^2+x_2^2-\frac{32}{3}x_0x_2-41x_0^2\\
\varphi_4 &\equiv x_2-3x_0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= (x_1,\, x_2+3x_0)\\
\mathfrak{p}_2 &= (x_1,\, x_2-3x_0)\\
\mathfrak{p}_3 &= (x_0,\, x_1+ix_2)\\
\mathfrak{p}_4 &= (x_0,\, x_1-ix_2)\\
\mathfrak{p}_5 &= (x_1+8x_0,\, x_2-3x_0)\\
\mathfrak{p}_6 &= (x_1-8x_0,\, x_2-3x_0),
\end{aligned}$$

so folgt

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (x_1^2+x_2^2-9x_0^2,\, x_0x_1) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4$$

mit

$$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = (x_1,\, x_2^2-9x_0^2), \quad \mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4 = (x_0,\, x_1^2+x_2^2)$$

und $NG(\varphi_1, \varphi_2) = \{(1, 0, -3), (1, 0, 3), (0, 1, i), (0, 1, -i)\}$, also

$$\text{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_2) = 0;$$

$$(\varphi_1, \varphi_3) = \big(x_1^2+8x_0x_1+x_2^2-9x_0^2,\, x_0(12x_0+3x_1+4x_2)\big) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_5 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_5 &= (x_1x_2-3x_0x_1,\, 12x_0+3x_1+4x_2)\\
&= (x_1^2=8x_0x_1,\, 12x_0+3x_1+4x_2)\\
&= (x_1^2+8x_0x_1+x_2^2-9x_0^2,\, 12x_0+3x_1+4x_2),\\
\mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4 &= (x_0,\, x_1^2+x_2^2) = (x_1^2+8x_0x_1+x_2^2-9x_0^2,\, x_0)
\end{aligned}$$

und $NG(\varphi_1, \varphi_3) = \{(1, -8, 3), (1, 0, -3), (0, 1, i), (0, 1, -i)\}$, also

$$\text{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_3) = 0;$$

$$(\varphi_1, \varphi_4) = \big(x_1(x_1+8x_0),\, x_2-3x_0\big) = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_5$$

und $NG(\varphi_1, \varphi_4) = \{1, -8, 3), (1, 0, 3)\}$, also

$$\text{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_4) = 0;$$

$$(\varphi_2, \varphi_3) = \big(x_1^2+8x_0x_1+x\ \ -9x_0^2,\, x_0(12x_0-3x_1+4x_2)\big) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_6 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_6 &= (x_1^2-8x_0x_1+x_2^2-9x_0^2,\, 12x_0-3x_1+4x_2),\\
\mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4 &= (x_1^2-8x_0x_1+x_2^2-9x_0^2,\, x_0)
\end{aligned}$$

und $NG(\varphi_2, \varphi_3) = \{(1, 0, -3), (1, 8, 3), (0, 1, i), (0, 1, -i)\}$, also

$$\text{Dim.}\,(\varphi_2, \varphi_3) = 0;$$

$$(\varphi_2, \varphi_4) = \big(x_1(x_1-8x_0),\, x_2-3x_0\big) = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_6$$

und $NG(\varphi_2, \varphi_4) = \{(1, 8, 3), (1, 0, 3)\}$, also

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_2, \varphi_4) = 0;$$

$$(\varphi_3, \varphi_4) = (x_1^2 - 64x_0^2, x_2 - 3x_0) = \mathfrak{p}_5 \cap \mathfrak{p}_6$$

und $NG(\varphi_3, \varphi_4) = \{(1, -8, 3), (1, 8, 3)\}$, also

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

Weiterhin wird

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \big(x_1^2 + x_2^2 - 9x_0^2, x_0x_1, x_0(x_2 + 3x_0)\big) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \mathfrak{p}_4$$

und $NG(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \{(1, 0, -3), (0, 1, i), (0, 1, -i)\}$, also

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0;$$

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) = (x_1^2 + 8x_0x_1, x_1^2 - 8x_0x_1, x_2 - 3x_0) = (x_1^2, x_0x_1, x_2 - 3x_0) = \mathfrak{p}_2 \cap (x_0, x_2, x_1^2)$$

und $NG(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) = \{(1, 0, 3)\}$, also

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) = 0;$$

$$(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4) = \big(x_0(x_1 + 8x_0), x_1(x_1 + 8x_0), x_2 - 3x_0\big) = \mathfrak{p}_5 \cap (x_0, x_2, x_1^2)$$

$$\text{wegen } x_2(x_1 + 8x_0) = 3x_0(x_1 + 8x_0) + (x_1 + 8x_0)(x_2 - 3x_0),$$

$NG(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4) = \{(1, -8, 3)\}$, also

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4) = 0;$$

$$(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \big(x_0(x_1 - 8x_0), x_1(x_1 - 8x_0), x_2 - 3x_0\big) = \mathfrak{p}_6 \cap (x_0, x_2, x_1^2)$$

$$\text{wegen } x_2(x_1 - 8x_0) = 3x_0(x_1 - 8x_0) + (x_1 - 8x_0)(x_2 - 3x_0),$$

$NG(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \{1, 8, 3)\}$, also

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

Wir haben also $\mathrm{Dim.}\,(\varphi_i, \varphi_j) = \mathrm{Dim.}\,(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k) = 0$ für alle Kombinationen zur zweite und zur dritten Klasse.

Dagegen wird

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) &= \big((\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_3, \varphi_4)\big)\\ &= (x_1^2 + x_2^2 - 9x_0^2, x_0x_1, x_1^2 - 64x_0^2, x_2 - 3x_0)\\ &= (x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_2 - 3x_0);\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}x_0x_2 &= x_0(x_2 - 3x_0) + 3x_0^2,\\ x_1x_2 &= x_1(x_2 - 3x_0) + 3x_0x_1,\\ x_2^2 &= (x_2 + 3x_0)(x_2 - 3x_0) + 9x_0^2\end{aligned}$$

ist

$$(x_0, x_1, x_2)^2 \subset (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \subset (x_0, x_1, x_2),$$

also ist $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ ein T=Ideal, mithin

$$\mathrm{Dim.}\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = -1, \quad \text{q. e. d.}$$

Wie angekündigt zeigen also diese Beispiele, daß die zusätzliche Voraussetzung in Satz 4* nicht generell fortgelassen werden kann. Dies hat Konsequenzen bei der Aufstellung eines *Resultantensystems*.

Seien $F_1(x_0, \ldots, x_n), \ldots, F_s(x_0, \ldots, x_n)$ mit $s \geqq n+1$ *vollständige* Formen mit *unbestimmten* Koeffizienten. Damit bei einer *Spezialisierung* der Koeffizienten das Ideal $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$ die Dimension 0 hat, ist das Verschwiden eines Resultantensystems notwendig und hinreichend. Die hier behandelten Beispiele zeigen, daß die $\binom{s}{n+1}$ Resultanten der $\binom{s}{n+1}$ Ideale $(F_{k_1}, F_{k_2}, \ldots, F_{k_{n+1}})$ noch *kein* Resultantensystem bilden. Dennoch ist es möglich, daß die so bestimmten Resultanten für die Vereinfachung eines auf andere Weise[7]) bestimmten Resultantensystems von $F_1 = 0, \ldots, F_s = 0$ von Bedeutung sind, wenn das vorhandene Resultantensystem noch keine Basis des Resultantenideals[8]) liefert.

(Eingegangen am 10. Dezember 1963.)

[7]) vgl. dazu etwa ORSINGER, H.: Resultantensysteme und algebraische Relationen. *Math. Nachr.* **12** (1954), 209–248. v. D. WAERDEN, B. L.: Algebra II, 4. Auflage, § 121, Seite 104, *Berlin–Göttingen–Heidelberg* 1959, v. D. WAERDEN, B. L.: Zur Konstruktion des Resultantensystems für homogene Gleichungen, *Arch. Math.* **5**, 371–375 (1954).

[8]) GRÖBNER, W., a. a. O. *125.3*, *125.8* Seite 55, 58, v. D. WAERDEN, B. L.: Algebra II, 3. Auflage, § 87, Seite 11, *Berlin–Göttingen–Heidelberg*, 1955.