Linienelementräume mit nicht-symmetrischem Fundamentaltensor

Von ARTHUR MOÓR (Szeged)

Herrn Professor A. Rapcsák mit bester Freundschaft
zu seinem 50 Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung

In mehreren Arbeiten wurde schon die Theorie und die geometrische Struktur eines, durch einen Fundamentaltensor g_{ij} — der in i, j symmetrisch vorausgesetzt wurde — bestimmten Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ untersucht, von denen wir jetzt nur auf die Arbeiten [5], [6] und [8] verweisen wollen[1]). Die Übertragungsparameter des invarianten Differentials genügen in den zitierten Untersuchungen der Forderung, daß sie metrisch sind, d. h. das invariante Differential des metrischen Fundamentaltensors ist identisch Null. Diese Forderung definiert aber noch nicht die Übertragungsparameter eindeutig, es können nämlich zu den symmetrischen Übertragungsparametern des Raumes zwei weitere, in i, j schiefsymmetrische Tensoren: σ_{ijm} bzw. μ_{ijm} addiert werden (vgl. [5], Formel (2. 24) und [6], (3. 9)), so daß die metrische Eigenschaft des invarianten Differentials, d. h.:

$$Dg_{ij} = 0 \tag{1. 1}$$

unverändert bleibt. Die Tensoren σ_{ijm} und μ_{ijm} können somit auch als die geometrische Struktur des $\mathfrak{L}_n$-Raumes bestimmenden Fundamentaltensoren betrachtet werden.

Im folgenden wollen wir eine Übertragungstheorie der Linienelementräume entwickeln, deren Fundamentaltensor $g_{ij}(x, v)$ in i, j nicht-symmetrisch ist, für den aber (1. 1) gilt. Eine derartige Übertragung wurde in Punkträumen von V. HLAVATÝ und L. P. EISENHART (vgl. [2], [3] und [4][2])), bzw. in Linienelementräumen von V. Bliznikas entwickelt (vgl. [1]). Unsere Methode, die wir bei der Entwicklung benützen wollen, ist aber von der von V. BLIZNIKAS verwandte fundamental verschieden, denn er benützte die Laptewsche Methode, während wir im vorliegenden Aufsatz die Resultate unserer Arbeiten [5] und [6] unmittelbar verwenden. Am Ende ist unser Hauptziel die Bestimmung jener Fundamentalgleichungssysteme, die die in i, j schiefsymmetrischen Tensoren σ_{ijm} und μ_{ijm} definieren, ausgedrückt durch den schiefsymmetrischen Teil des nicht-symmetrischen Fundamentaltensors g_{ij}.

[1]) Vgl. die Literatur am Ende unseres Aufsatzes.

[2]) In der Arbeit [4] ist die Gleichung, die unserer Relation (1.1) entspricht, die Gleichung (16.1a), nicht aber (2.1).

Im zwei bzw, dreidimensionalen Fall werden wir die Lösbarkeit dieser Fundamentalgleichungssysteme, bzw. die Eindeutigkeit der Lösungen eingehend untersuchen (vgl. § 3.).

Letztens untersuchen wir im § 4 die Lie-Ableitung des allgemeinen nicht-symmetrischen Fundamentaltensors und wir werden hinreichende Integrabilitätsbedingungen für $\Delta g_{ij}=0$ bestimmen.

§ 2. Grundformeln der Übertragungstheorie

$\mathfrak{L}_n^*$ sei eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i) in der die Zentren x^i der Linienelemente eine n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit bilden. Als Linienelementmannigfaltigkeit ist also $\mathfrak{L}_n^*$ $(2n-1)$-dimensional. Die geometrische Struktur von $\mathfrak{L}_n^*$ sei durch einen in i, j nicht-symmetrischen Tensor $g_{ij}(x, v)$ und durch ein lineares invariantes Differential von der Form

$$D\xi^i = d\xi^i + M_j{}^i{}_k \xi^j\, dv^k + L_j{}^i{}_k \xi^j\, dx^k \tag{2. 1}$$

festgelegt, wo die Übertragungsparameter $M_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$ so beschaffen sind, daß die Formel (1. 1) für den nicht-symmetrischen Fundamentaltensor g_{ij} gültig ist und außerdem — wie das in den affinzusammenhängenden Linienelementräumen immer gefordert wird:

$$M_j{}^i{}_k v^k = 0$$

ist. Selbstverständlich ist durch (2. 1) das invariante Differential für beliebige Tensoren in der gewöhnlichen Weise definiert. Diese Linienelementräume in denen also der Fundamentaltensor g_{ij} in i, j nicht-symmetrisch ist, werden wir im folgenden immer durch $\mathfrak{L}_n^*$ bezeichnen, während $\mathfrak{L}_n$ die Räume mit symmetrischem Fundamentaltensor bezeichnet.

Auf Grund von (1. 1) ist die geometrische Struktur im Wesentlichen allein durch g_{ij} bestimmt; im folgenden müssen wir somit den Zusammenhang der Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ und $M_i{}^j{}_k$ mit g_{ij} bestimmen. Vorher werden wir aber (2. 1) umformen; wir drücken nämlich (2. 1) mit Hilfe der fundamentalen kovarianten Ableitungen aus.

Bezeichnen wir mit $\omega^i(d)$ das invariante Differential des Einheitsvektors

$$l^i = \frac{v^i}{F}, \quad F \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ab} v^a v^b}$$

und mit ∇_k bzw. $\overset{*}{\nabla}_k$ die fundamentalen kovarianten Ableitungen, so wird aus (2. 1):

$$D\xi^i = \nabla_m \xi^i\, dx^m + \overset{*}{\nabla}_m \xi^i\, \omega^m(d), \tag{2. 2}$$

wo

$$\nabla_m \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_m \xi^i - \xi^i\|_t L^{*t}_{o\ m} + L^{*i}_{t\ m} \xi^t, \quad \|_t \overset{\text{def}}{=} F\partial_{v^t}, \tag{2. 3a}$$

der Index o die Überschiebung mit l^i,

$$\overset{*}{\nabla}_m \xi^i \overset{\text{def}}{=} (\xi^i\|_t + \overline{M}_r{}^i{}_t \xi^r) J^*{}^t_m \tag{2. 3b}$$

bedeuten (vgl. [6] § 3, insbesondere die Formeln (3. 3)—(3. 4b)) und

$$L^{*i}_{j\ m} \overset{\text{def}}{=} L_{j\ m}^{\ i} - M^{*i}_{j\ t} L_{o\ m}^{\ t}, \quad M^{*i}_{j\ t} \overset{\text{def}}{=} \overline{M}_{j\ r}^{\ i} J^{*r}_{t}$$

$$\overline{M}_{j\ t}^{\ i} \overset{\text{def}}{=} F M_{j\ t}^{\ i} \equiv \sqrt{g_{ab} v^a v^b}\, M_{j\ t}^{\ i}$$

ist. Der Tensor J^{*i}_{m} ist durch das Gleichungssystem

$$(\delta^i_j + \overline{M}_{o\ j}^{\ i}) J^{*m}_{i} = \delta^m_j \tag{2. 4}$$

festgelegt, wobei wir immer bedingen wollen, daß (2. 4) auf J^{*m}_{i} eindeutig lösbar ist, d. h.

$$\operatorname{Det}(\delta^i_j + \overline{M}_{o\ j}^{\ i}) \neq 0 \tag{2. 4a}$$

besteht. Aus (2. 2)—(2. 3b) folgt, daß es für die Festlegung von $D\xi^i$ hinreichend ist statt $L_{i\ k}^{\ j}$, $M_{i\ k}^{\ j}$ die größen $L^{*}{}_{i\ k}^{\ j}$, $M^{*}{}_{i\ k}^{\ j}$ zu bestimmen.

Wir wollen bemerken, daß unsere Formeln (2. 1)—(2. 4) in die entsprechenden Formeln unserer Arbeit [5] übergehen, falls

$$J^{*m}_{i} = \delta^m_i - \overline{M}_{o\ i}^{\ m}$$

ist. Dies ist aber nur im Falle

$$\overline{M}_{o\ j}^{\ i} \overline{M}_{o\ i}^{\ m} = 0 \tag{2. 5}$$

möglich. Ist (2. 5) nicht gültig, so kann J^{*m}_{i} nicht in expliziter Form durch $M_{o\ j}^{\ i}$ ausgedrückt werden; es wird sich aber zeigen, daß im folgenden das nicht notwendig ist; die eindeutige Lösbarkeit von (2. 4) wird schon hinreichend sein.

Bezeichnen wir mit h_{ij} bzw. k_{ij} den symmetrischen, bzw. schiefsymmetrischen Teil von g_{ij} d. h.:

$$h_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{(ij)}, \quad k_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{[ij]},$$

so folgt auf Grund von (1. 1), daß das invariante Differential von h_{ij} bzw. k_{ij} identisch Null ist. Beachten wir nun die Zerlegung (2. 2) des invarianten Differentials nach den kovarianten Ableitungen, so sieht man, daß (1. 1) mit den Formeln

(2. 6a) $\nabla_m h_{ij} = 0,$ (2. 6b) $\nabla_m k_{ij} = 0$

(2. 7a) $\overset{*}{\nabla}_m h_{ij} = 0,$ (2. 7b) $\overset{*}{\nabla}_m k_{ij} = 0$

äquivalent ist. Der Tensor h_{ij} spielt also die Rolle des Maßtensors in unserem $\mathfrak{L}^*_n$-Raum.

Aus der Bedingungsgleichung (2. 6a) bekommt man für die Übertragungsparameter $L^{*i}_{j\ m}$ dieselbe Form, wie in unserer Arbeit [5] (vgl. [5], (2. 24), bzw. Gleichungen (2. 17)—(2. 24)) d. h.:

$$L^*_{ijm} = \Gamma^*_{ijm} - A_{ijr} J^r_t \sigma_{o\ m}^{\ t} + \sigma_{ijm}, \tag{2. 8}$$

wo σ_{ijm} einen in i, j schiefsymmetrischen, sonst aber noch beliebigen Tensor bedeutet, J^r_t ist die Lösung des Gleichungssystems

$$(\delta^t_s + A_{o\ s}^{\ t}) J^r_t = \delta^r_s,$$

ferner, es ist

$$A_{ijr} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} h_{ij}\|_r .$$

Das Herauf- bzw. Herunterziehen der Indizes wird immer mit dem Maßtensor h^{ij} bzw. h_{ij} durchgeführt. Für die Eindeutigkeit von J^r_t muß noch

$$\mathrm{Det}\,(\delta^t_r + A_o{}^t{}_r) \neq 0$$

bedingt werden und außerdem soll noch die Relation

$$h \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Det}\,(h_{ij}) \neq 0$$

bestehen, die die Eindeutigkeit des kontravarianten Maßtensors h^{ij} sichert. Γ^*_{ijm} ist in der Formel (2. 8) der allein aus h_{ij} gebildete in i, m symmetrische Übertragungsparameter; die explizite Formel von Γ^*_{ijm} in (2. 8) befindet sich in [5] in den Formeln (2. 18) und (2. 21).

Da nach (2. 4) und (2. 4a) auch

$$\mathrm{Det}\,(J^*{}^m_i) \neq 0$$

ist, folgt aus (2. 7a):

$$\overline{M}_{ijm} = A_{ijm} + \mu_{ijm}, \tag{2. 9}$$

wo μ_{ijm} einen in i, j schiefsymmetrischen Tensor bedeutet (vgl. [6], Formel (3. 9), insbesondere Satz 2), der aber der Relation $\mu_{ijo} = 0$ genügen muß.

Der symmetrische Teil des Fundamentaltensors g_{ij} bestimmt also die Übertragungsparameter bis auf die in i, j schiefsymmetrischen Tensoren σ_{ijm} und μ_{ijm}. Die Relationen (2. 6b) und (2. 7b) bestimmen nun je $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ Gleichungen für die ebensoviel Komponenten der Tensoren σ_{ijm} und μ_{ijm}. Mit der Bezeichung

$$B_{ijm} = \frac{1}{2} k_{ij}\|_m$$

kann (2. 6b), bzw. (2. 7b) in der Form

$$\partial_m k_{ij} - 2B_{ijr} L^{*r}_{o\ m} - L^{*r}_{i\ m} k_{rj} - L^{*r}_{j\ m} k_{ir} = 0, \tag{2. 10a}$$

bzw.

$$2B_{ijm} - \overline{M}_i{}^r{}_m k_{rj} - \overline{M}_j{}^r{}_m k_{ir} = 0 \tag{2. 10b}$$

angegeben werden. Beachten wir jetzt für die Übertragungsparameter die Formeln (2. 8), bzw. (2. 9), ferner die schiefe Symmetrie von k_{ij} in i, j, so bekommt man aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\sigma_a{}^b{}_m \left(\delta^a_{[j} k_{i]b} - l^a A_t{}^r{}_s J^s_b \delta^t_{[j} k_{i]r} + l^a B_{ijr} (\delta^r_b - A_o{}^r{}_s J^s_b)\right) = \frac{1}{2} \mathring{\nabla}_m k_{ij}, \tag{2. 11a}$$

bzw.

$$\mu_{[j}{}^r{}_{|m|} k_{i]r} = \frac{1}{2} \dot{\nabla}_m k_{ij}. \tag{2. 11b}$$

wo $\overset{\circ}{\nabla}_m$ die mit $\Gamma_i^{*j}{}_m$ gebildete und (2. 3a) entsprechende kovariante Ableitung, bzw. $\dot{\nabla}_m$ eine weitere kovariante Ableitung, undzwar

$$\dot{\nabla}_m k_{ij} = k_{ij}\|_m - A_i{}^r{}_m k_{rj} - A_j{}^r{}_m k_{ir}$$

bedeutet. Es gilt:

$$\overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij} = \partial_m k_{ij} - k_{ij}\|_r \Gamma_o^{*r}{}_m - \Gamma_i^{*r}{}_m k_{rj} - \Gamma_j^{*r}{}_m k_{ir}.$$

Aus (2. 6b) und (2. 7b) folgen also die Gleichungen (2. 11a) und (2. 11b). Aber es gilt auch die Umkehrung: aus den Gleichungen (2. 11a) und (2. 11b) folgen auch die Relationen (2. 10a) (2. 10b) die im Wesentlichen mit (2. 6b) und (2. 7b) identisch sind.

Unsere bisherige Resultate können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Hauptsatz. *Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Relation* (1. 1) *für einen nicht symmetrischen Fundamentaltensor* g_{ij} *ist die Lösbarkeit der Gleichungssysteme* (2. 11a) *und* (2. 11b) *auf*

$$\sigma_i{}^j{}_m \overset{\text{def}}{=} h^{jr}\sigma_{irm}, \quad bzw. \quad \mu_i{}^j{}_m \overset{\text{def}}{=} h^{jr}\mu_{irm},$$

wo σ_{irm} *bzw.* μ_{irm} *in* i, r *schiefsymmetrische Tensoren sein sollen,* μ_{irm} *noch der Relation* $\mu_{iro}=0$ *genügen soll und*

$$h^{ir}h_{is}=\delta_s^r, \quad h_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{(ij)}, \quad k_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{[ij]}.$$

Man kann für das Gleichungssystem (2. 11a) auch die folgende äquivalente Form benützen:

$$\sigma_{abm}(\delta_t^{[a}\delta_r^{b]} - J^{s[b}l^{a]}A_{trs})Q_{ji}^{tr} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij} \tag{2. 12}$$

mit

$$Q_{ji}^{tr} \overset{\text{def}}{=} \delta_{[j}^t k_{i]}{}^r + l^t B_{ij}{}^r. \tag{2. 12a}$$

Die Identität der Gleichungssysteme (2. 11a) und (2. 12) kann unmittelbar verifiziert werden, falls man die Relationen

$$J^{sb} \overset{\text{def}}{=} h^{br}J_r^s, \quad \sigma_a{}^b{}_m \overset{\text{def}}{=} h^{bs}\sigma_{asm}$$

und die schiefe Symmetrie von σ_{asm} in a, s beachtet.

§ 3. Untersuchung der zwei und dreidimensionalen Fälle

Nehmen wir jetzt an, daß in unserem $\mathfrak{L}_n^*$-Raum $\sigma_o{}^j{}_m \equiv 0$ gilt. Die Übertragungsparameter $L_i^{*j}{}_m$ haben jetzt nach (2. 8) die Form:

$$L_i^{*j}{}_m = \Gamma_i^{*j}{}_m + \sigma_i{}^j{}_m, \quad \sigma_{(ij)m} = 0, \quad \sigma_{ojm} = 0.$$

Die Gleichungen (2. 11a) und (2. 11b) haben jetzt dieselbe Form, undzwar:

$$X_a{}^b{}_m \delta_{[j}^a k_{i]b} = \frac{1}{2}\Phi_{ijm}, \tag{3. 1}$$

wo $X_a{}^b{}_m$ den Tensor $\sigma_a{}^b{}_m$, bzw. $\mu_a{}^b{}_m$ bedeutet und entsprechend $\Phi_{ijm}=\overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij}$, bzw. $\Phi_{ijm}=\dot{\nabla}_m k_{ij}$ gesetzt werden soll. Φ_{ijm} ist also in beiden Fällen ein in i, j schiefsymmetrischer Tensor.

Schreiben wir jetzt (3. 1) in der Form:

$$X_{abm}\delta^a_{[j}k_{i]}{}^b = \frac{1}{2}\Phi_{ijm}, \tag{3. 2}$$

beachten wir ferner die schiefe Symmetrie in i, j und nehmen wir noch an, daß die Dimension des Raumes $=2$ ist, so bekommt man in einem $\mathfrak{L}_2^*$-Raum[3]):

$$X_{12m}(k_2{}^2+k_1{}^1) = \Phi_{21m}, \qquad m=1, 2. \tag{3. 3}$$

Bei der Herleitung dieser Formel haben wir auch

$$X_{abm} = -X_{bam}$$

beachtet, die offenbar gültig ist, da σ_{abm} und μ_{abm} in den Indexen a, b schiefsymmetrisch sind, und X_{abm} eben diese Tensoren representiert.

Wegen

$$k_1{}^1+k_2{}^2 \equiv h^{ij}k_{ij} = 0,$$

verschwindet aber der Koeffizient von X_{12m} in (3. 3), somit ist (3. 3) nur im Falle $\Phi_{ijm}\equiv 0$ lösbar. Ist aber $\Phi_{ijm}\equiv 0$, so ist offenbar X_{12m} in (3. 3) beliebig wählbar. Dieses Resultat beweist den folgenden

Satz 1. *Die Relation* (1. 1) *ist in einem $\mathfrak{L}_2^*$-Raum nur im Falle*

$$\dot{\nabla}_m k_{ij} \equiv \frac{1}{2}\dot{\nabla}_m(g_{ij}-g_{ji}) = 0 \tag{3. 4}$$

erfüllbar. Soll noch in dem Übertragungsparameter (2. 8) $\sigma_o{}^t{}_m=0$ *sein, so muß auch*

$$\overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij} \equiv \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}_m(g_{ij}-g_{ji}) = 0 \tag{3. 5}$$

gelten.

Gilt aber die Relation (3. 4), *so kann der in i, j schiefsymmetrische Tensor μ_{ijm} außer der Bedingung $\mu_{ijo}=0$ beliebig gewählt werden.*

Bemerkung. Die Relation (3. 5) folgt wegen der Bedingung $\sigma_o{}^j{}_m=0$ auch unmittelbar nach (2. 11a), da im Falle: $n=2$

$$F\sigma_{ojm} \equiv \sigma_{1jm}v^1+\sigma_{2jm}v^2 = 0,$$

woraus wegen $v^1\neq 0$, $v^2\neq 0$ und wegen

$$\sigma_{11m}\equiv\sigma_{22m}\equiv 0$$

---

[3]) Ein $\mathfrak{L}_2^*$-Raum ist als Linienelementmannigfaltigkeit 3-dimensional, nur die Zentren der Linienelemente bilden einen 2-dimensionalen Raum.

auch $\sigma_{ijm}=0$ folgt. Es kann nämlich nur $j=1$, oder $j=2$ sein. Im Falle $n>2$ folgt aus $\sigma_o{}^j{}_m=0$ die Formel (3. 5) noch nicht. —

Jetzt gehen wir zur Untersuchung des dreidimensionalen Falles über. Wegen der schiefen Symmetrie von X_{abm} in a, b hat dieser Tensor die Komponenten:

$$X_{12m},\ X_{13m},\ X_{23m}, \qquad m=1, 2, 3.$$

Alle übrige Komponenten sind entweder Null, oder aber unterscheiden sich von den angegebenen Komponenten nur im Vorzeichen.

Nehmen wir jetzt in (3. 2) für (j, i) die Zahlenpaare: $(1, 2)$, $(1, 3)$ und $(2, 3)$, so bekommen wir das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} X_{12m}(k_1{}^1+k_2{}^2)+X_{13m}k_2{}^3-X_{23m}k_1{}^3 &= -\Phi_{12m} \\ X_{12m}k_3{}^2+X_{13m}(k_1{}^1+k_3{}^3)+X_{23m}k_1{}^2 &= -\Phi_{13m} \\ -X_{12m}k_3{}^1+X_{13m}k_2{}^1+X_{23m}(k_2{}^2+k_3{}^3) &= -\Phi_{23m} \end{aligned}\right. \tag{3. 6}$$
$$m=1, 2, 3.$$

Beachten wir die Relation

$$k_r{}^r \equiv k_1{}^1+k_2{}^2+k_3{}^3 \equiv 0,$$

die aus der schiefen Symmetrie von k_{ij} unmittelbar folgt, so bekommen wir aus (3. 6) den folgenden

Hilfssatz. *Notwending und hinreichend für die Lösbarkeit des Gleichungssystems* (3. 6) *ist:*

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} -k_3{}^3 & k_2{}^3 & -k_1{}^3 \\ k_3{}^2 & -k_2{}^2 & k_1{}^2 \\ -k_3{}^1 & k_2{}^1 & -k_1{}^1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} -\Phi_{12m} & -k_3{}^3 & k_2{}^3 & -k_1{}^3 \\ -\Phi_{13m} & k_3{}^2 & -k_2{}^2 & k_1{}^2 \\ -\Phi_{23m} & -k_3{}^1 & k_2{}^1 & -k_1{}^1 \end{pmatrix} \tag{3. 7}$$
$$m=1, 2, 3.$$

Aus diesem Hilfssatz bekommt man unmittelbar die Bedingungen für die Existenz eines schiefsymmetrischen Tensors k_{ij} der den Gleichungen (2. 6b) und und (2. 7b) genügt, d. h. (1. 1) bestehen wird. Nach der Übereinstimmung der Gleichungen (2. 11a) — falls $\sigma_o{}^b{}_m\equiv 0$ — (2. 11b) und (3. 6) folgt nämlich der folgende

Satz 2. *Notwendig und hinreichend für die Existenz der Übertragungsparameter* (2. 8) — *mit* $\sigma_o{}^b{}_m\equiv 0$ — *und* (2. 9) *im Falle* $n=3$, *so, daß* (1. 1) *gültig sei, sind die Relationen* (3. 7), *wenn man in diese Relationen*

$$\Phi_{abm}=\overset{\circ}{\nabla}_m k_{ab}, \quad bzw. \quad \Phi_{abm}=\dot{\nabla}_m k_{ab} \tag{3. 8}$$

substituiert.

Wegen seiner möglichen Anwendungen in den physikalischen Feldtheorien, wollen wir noch den vierdimensionalen Fall behandeln. Die Unbekannten des Gleichungssystems (3. 2) sind wegen der schiefen Symmetrie von X_{abm} in a, b:

$X_{12m}, X_{13m}, X_{14m}, X_{23m}, X_{24m}, X_{34m}$. Das Gleichungssystem (3. 2) ist nun auflösbar auf X_{abm} falls der Rang der Matrix

$$M_m \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\Phi_{12m} & (k_1{}^1+k_2{}^2) & k_2{}^3 & k_2{}^4 & -k_1{}^3 & -k_1{}^4 & 0 \\ -\Phi_{13m} & k_3{}^2 & (k_1{}^1+k_3{}^3) & k_3{}^4 & k_1{}^2 & 0 & -k_1{}^4 \\ -\Phi_{14m} & k_4{}^2 & k_4{}^3 & (k_1{}^1+k_4{}^4) & 0 & k_1{}^2 & k_1{}^3 \\ -\Phi_{23m} & -k_3{}^1 & k_2{}^1 & 0 & (k_2{}^2+k_3{}^3) & k_3{}^4 & -k_2{}^4 \\ -\Phi_{24m} & -k_4{}^1 & 0 & k_2{}^1 & k_4{}^3 & (k_2{}^2+k_4{}^4) & k_2{}^3 \\ -\Phi_{34m} & 0 & -k_4{}^1 & k_3{}^1 & -k_4{}^2 & k_3{}^2 & (k_3{}^3+k_4{}^4) \end{pmatrix}$$

$$m=1, 2, 3, 4.$$

mit dem Rang der Matrix M_m^* übereinstimmt, wenn M_m^* diejenige Matrix bedeutet, die aus M_m durch Weglassen der Spalte $-\Phi_{abm}$ entsteht.

Der dem Satze 2 entsprechende Satz ist nun:

Satz 2a. *Notwendig und hinreichend für die Existenz der Übertragungsparameter* (2. 8) — *mit* $\sigma_o{}^b{}_m \equiv 0$ — *und* (2. 9) *im Falle* $n=4$, *so, daß* (1. 1) *gültig sei sind die Relationen*

$$Rang\ M_m = Rang\ M_m^*, \qquad m=1, 2, 3, 4,$$

wenn Φ_{abm} *die Größen* (3. 8) *bedeutet.*

Der Fall der Punkträume sind in unseren Resultaten enthalten. Wir wollen auch diesen Fall kurz besprechen. In Punkträumen sind alle charakteristische Größen nur vom Orte x^i abhängig und von der Richtung v^i unabhängig. Außerdem ist

$$A_{ijk} \equiv 0, \quad B_{ijk} \equiv 0, \quad \mu_{ijk} \equiv 0.$$

Aus dem $\sigma_a{}^b{}_m$ bestimmenden Gleichungssystem (2. 11a) wird:

$$\text{(3. 9)} \qquad \sigma_{abm} \delta^a_{[j} k_{i]}{}^b = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij}.$$

Dieses Gleichungssystem stimmt aber vollständig mit dem Gleichungssystem (3. 2) überein, falls $X_{abm} = \sigma_{abm}$ und $\Phi_{abm} = \overset{\circ}{\nabla}_m k_{ab}$ gesetzt wird; jetzt ist die Bedingung $\sigma_o{}^b{}_m = 0$ nicht nötig dafür, daß die Gleichung von σ_{abm} die Form (3. 2) habe. Der den Sätzen 1 und 2 entsprechende Satz lautet jetzt:

Satz 3. *Notwendig und hinreichend für* (1. 1) *ist in Punkträumen im Falle* $n=2$:

$$\overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij} = 0,$$

und im Falle $n=3$ *die Bedingungsgleichung* (3. 7) *mit* $\Phi_{ijm} = \overset{\circ}{\nabla}_m k_{ij}$.

Bemerkung. In Punkträumen ist $\overset{\circ}{\nabla}_m$ eben die durch die aus h_{ij} gebildeten Christoffelschen Symbole bestimmte kovariante Ableitung.

§ 4. Lie-Ableitung des Fundamentaltensors g_{ij}

Die Transformation

$$\text{(4. 1)} \qquad \begin{cases} \bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta t \\ \bar{v}^i = v^i + v^r \partial_r \xi^i \delta t \end{cases}$$

nennen wir eine *infinitesimale Transformation* der Linienelemente, falls in (4. 1) δt infinitesimal ist. Die Lie-Ableitung eines geometrischen Objektums Ω bezüglich der Transformation (4. 1) definieren wir durch die Formel:

$$\text{(4. 2)} \qquad \Delta\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Omega(\bar{x}, \bar{v}) - \bar{\Omega}(\bar{x}, \bar{v})}{\delta t}$$

(vgl. [5] § 9.).

Im folgenden benötigen wir einige Identitäten der Lie-Ableitung (vgl. [5] § 9 und § 10), undzwar:

$$\text{(4. 3)} \qquad \Delta\eta_{ij} = \xi^r \partial_r \eta_{ij} + v^r \partial_r \xi^m \partial_{v^m} \eta_{ij} + \eta_{rj} \partial_i \xi^r + \eta_{ir} \partial_j \xi^r,$$

wo η_{ij} einen beliebigen rein kovarianten Tensor zweiter Stufe bedeutet;

$$\text{(4. 4)} \qquad \begin{aligned} \Delta L^{*j}_{i\ \ k} = {} & \nabla_k \nabla_i \xi^j + \bar{R}_i{}^j{}_{kr} \xi^r + L^{*j}_{i\ \ k}\|_r (\nabla_o \xi^r + 2\Omega^{*r}_{o\ \ t} \xi^t) + \\ & + 2\xi^r \nabla_k \Omega^{*j}_{i\ \ r} + 2\nabla_k \xi^r \Omega^{*j}_{i\ \ r}, \end{aligned}$$

wo

$$\Omega^{*j}_{i\ \ k} \stackrel{\text{def}}{=} L^{*j}_{[ik]}, \qquad \bar{R}_i{}^j{}_{kr} \stackrel{\text{def}}{=} 2(\partial_{[r} L^{*\ \ j}_{|i|\ \ k]} - L^{*j}_{i\ \ [k}\|_{|t|} L^{*\ \ t}_{o|\ \ r]} + L^{*t}_{i\ \ [k} L^{*\ \ j}_{|t|\ \ r]})$$

bedeutet; ferner

$$\text{(4. 5)} \qquad \Delta(\nabla_m \eta_{ij}) - \nabla_m(\Delta\eta_{ij}) \equiv -\eta_{ir} \Delta L^{*r}_{j\ \ m} - \eta_{rj} \Delta L^{*r}_{i\ \ m} - \eta_{ij}\|_r l^t \Delta L^{*r}_{t\ \ m},$$

$$\text{(4. 6)} \qquad \partial_{v^m} \Delta\eta_{ij} - \Delta\partial_{v^m} \eta_{ij} \equiv 0.$$

Die kovarianten Ableitungen genügen den Vertauschungsformeln:

$$\text{(4. 7)} \qquad \nabla_m(\partial_{v^s} \eta_{ij}) - \partial_{v^s}(\nabla_m \eta_{ij}) \equiv \partial_{v^s} L^{*r}_{t\ \ m}(\delta^t_i \eta_{rj} + \delta^t_j \eta_{ir} + v^t \partial_{v^r} \eta_{ij}).$$

Die Lie-Ableitung von g_{ij} genügt auf Grund der Definitionsformel (4. 2) der Relation:

$$\text{(4. 8)} \qquad \Delta g_{ij} \equiv \Delta h_{ij} + \Delta k_{ij}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß

$$\text{(4. 9)} \qquad \Delta g_{ij} = 0$$

gilt. Auf Grund der Definition der Tensoren von h_{ij} und k_{ij} folgt aus der Relation (4. 9), daß auch

$$\text{(4. 10a)} \qquad \Delta h_{ij} = 0, \qquad\qquad \text{(4. 10b)} \qquad \Delta k_{ij} = 0$$

bestehen. Gilt nun für eine Transformationsgruppe (4. 9), so kann diese Transformationsgruppe als eine *verallgemeinerte Bewegung* betrachtet werden, da aus (4. 9) folgt die Relation (4. 10a) und der Tensor h_{ij} ist im wesentlichen der metrische Fundamentaltensor unseres $\mathfrak{L}^*_n$-Raumes. Durch (4. 10a) sind aber eben die Bewegungen eines metrischen Linienelementraumes charakterisiert (vgl. [5], Gleichung (10. 1)).

Die Integrabilitätsbedingungen von (4. 9) bestehen also aus den Integrabilitätsbedingungen von (4. 10a) und (4. 10b). Statt der Integrabilitätsbedingungen von (4. 9) werden wir aber die Integrabilitätsbedingungen von

$$\Delta L^{*}_{i}{}^{j}{}_{k}=0 \tag{4. 11}$$

mit den Nebenbedingungen (4. 9) bestimmen. Dadurch erhalten wir offenbar hinreichende Bedingungen für $\Delta g_{ij}=0$, die aber nicht umbedingt notwendig sind, da für die Gültigkeit von (4. 9) die Relation (4. 11) nicht umbedingt bestehen muß. Die Relation (4. 9) werden wir durch die beiden mit (4. 9) äquivalenten Relationen (4. 10a) und (4. 10b) ersetzen; *wir werden also die Integrabilitätsbedingungen von* (4. 11) *mit den Nebenbedingungen* (4. 10a) *und* (4. 10b) *bestimmen.*

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die bestimmenden Integrabilitätsbedingungen des Systems (4. 11) und (4. 10a), (4. 10b) die bisherigen in dieser Richtung durchgeführten verallgemeinern und daß sie auch notwendig sind, falls aus (4. 10a) und (4. 10b) auch die Relation (4. 11) folgt, wie z. B. im Finslerschen Raum (vgl. [7], Kap. VI. § 1, insbesondere S. 220), der durch die Relationen

$$k_{ij}\equiv 0,\quad h_{ij}=\frac{1}{2}\partial^2_{v^i v^j}F^2,\quad L^{*}_{i}{}^{j}{}_{k}=\Gamma^{*}_{i}{}^{j}{}_{k}$$

charakterisiert werden kann. Es sind in den gesuchten Integrabilitätsbedingungen die Resultate des § 10 unserer Arbeit [5] — d. h. die Integrabilitätsbedingungen des aus (4. 11) und (4. 10a) bestehenden Systems — auch enthalten.

Um die Integrabilitätsbedingungen von (4. 11) mit den Nebenbedingungen von (4. 10a) und (4. 10b) zu bekommen, müssen wir auf Grund von (4. 4) und (4. 11) für den Vektor ξ^i die Vertauschungsformeln der partiellen bzw. kovarianten Ableitungen bilden, und die in dieser Weise bekommenen Tensorrelationen zusammen mit (4. 10a) und (4. 10b) weiter differenzieren.

Aus dem Differentialgleichungssystem (4. 11) und (4. 10a) erhalten wir nun die lange Reihe der Integrabilitätsbedingungen, die wir schon in unserer Arbeit [5] im Theorem B auf S. 110 angegeben hatten, neuere Integrabilitätsbedingungen erhalten wir also durch die verschiedenen kovarianten Ableitungen[4]) von (4. 10b). — Statt partieller Ableitungen nach x^k können wir sofort die kovarianten Ableitungen ∇_k benützen, um die Bedingungen sofort in tensorieller Form zu bekommen. —

Aus (4. 10b) folgt:

$$\nabla_m \Delta k_{ij}=0. \tag{4. 12}$$

Substituiren wir aber in die Formel (4. 5) $\eta_{ij}=k_{ij}$, beachten wir ferner die Relation (2. 6b), so wird im Hinblick auf (4. 12):

$$\nabla_m \Delta k_{ij}\equiv k_{ir}\Delta L^{*}_{j}{}^{r}{}_{m}+k_{rj}\Delta L^{*}_{i}{}^{r}{}_{m}+k_{ij}\|_r l^t \Delta L^{*}_{t}{}^{r}{}_{m}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß (4. 12) auf Grund von (4. 11) immer identisch erfüllt ist. Aus (4. 12) bekommt man also keine weitere Integrabilitätsbedingungen.

---

[4]) Die partielle Ableitung nach v^s kann auch als eine Art der kovarianten Ableitungen betrachtet werden.

Die Identitäten (4. 5) und (4. 6), die auf beliebige Tensoren erweitert werden können, zeigen, daß für Tensoren die kovariante Ableitung ∇_m und die partielle Ableitung ∂_{v^m} mit der Lie-Ableitung Δ vertauschbar sind, falls (4. 11) gilt. Somit bekommt man nach partiellen Ableitungen von (4. 10b) auf Grund von (4. 11)

$$(4.13) \qquad \Delta\partial_{v^{m_1}} k_{ij} = 0, \ldots, \Delta\partial_{v^{m_1}} \ldots \partial_{v^{m_s}} k_{ij} = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen von der Form:

$$(4.14) \qquad \nabla_m \Delta\partial_{v^s} k_{ij} = 0$$

sind in den bisherigen schon enthalten, da wenn man in die Identität (4. 7) $\eta_{ij} = k_{ij}$ substituiert, (2. 6b) beachtet und auf beide Seiten die Lie-Ableitung anwendet, so wird:

$$(4.15) \qquad \Delta\nabla_m \partial_{v^s} k_{ij} = \Delta\{\partial_{v^s} L^{*r}_{t\ m}(\delta^t_i k_{rj} + \delta^t_j k_{ir} + v^t \partial_{v^r} k_{ij})\},$$

wenn wir jetzt noch die Vertauschbarkeit der Lie-Ableitung mit den Operationen ∇_m und ∂_{v^m} beachten, die für Tensoren — wie wir es schon bemerkt haben — auf Grund von (4. 11) immer erfüllt ist, so wird nach der leicht beweisbaren Identitäten (vgl. [5], Formel (10. 12)):

$$\Delta\partial_{v^s} L^{*r}_{t\ m} \equiv \partial_{v^s} \Delta L^{*r}_{t\ m}, \qquad \Delta v^t = 0,$$

die Formel (4. 15) eben in (4. 14) übergehen. Es gilt somit der

Satz 4. *Hinreichende Integrabilitätsbedingungen für* (4. 9) *sind außer den Integrabilitätsbedingungen von* (4. 11) *und* (4. 10a)[5]) *die Gleichungen* (4. 13).

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Existenzfragen der Transformationsgruppen über. Bezüglich der Existenz von Transformationsgruppen, für die (4. 9) gilt, beweisen wir den folgenden

Satz 5. *Gilt für eine einparametrige Transformationsgruppe die Relation $\Delta g_{ij} = 0$, so existiert ein geeignetes Koordinatensystem in dem $\partial_{x^1} g_{ij} = 0$ besteht. Umgekehrt: ist $\partial_{x^1} g_{ij} = 0$, so bestimmt die Gruppe*

$$(4.16) \qquad \bar{x}^i = x^i + \delta^i_1 t$$

eine Transformationsgruppe, für die $\Delta g_{ij} = 0$.

Beweis. In einem geeigneten Koordinatensystem wird der Fundamentalvektor ξ^i der infinitesimalen Transformation die Komponenten $\xi^i = \delta^i_1$ haben. Für $\eta_{ij} = g_{ij}$ und $\xi^i = \delta^i_1$ bekommt man aus (4. 3) im Hinblick auf (4. 9) eben die beweisende Relation

$$\partial_{x^1} g_{ij} = 0.$$

Aus (4. 16) und (4. 3) folgt nun

$$\Delta g_{ij} = \partial_{x^1} g_{ij},$$

woraus die zweite Behauptung des Satzes folgt.

---

[5]) Die lange Reihe der Integrabilitätsbedingungen des Systems (4. 11) und (4. 10a) s. etwa in [5] im Theorem B) auf S. 110.

Aus dem Satz 5 folgt noch auch für die verallgemeinerten Bewegungen die in $\mathfrak{L}_n$- und $\mathfrak{L}_n^*$-Räumen für gewöhnliche Bewegungen (die mit $\Delta h_{ij}=0$ charakterisiert sind) wohlbekannte Behauptung:

Existiert im $\mathfrak{L}_n^*$-Raum eine infinitesimale verallgemeinerte Bewegung, so existiert in $\mathfrak{L}_n^*$ auch eine einparametrige verallgemeinerte Bewegungsgruppe, die von der infinitesimalen verallgemeinerten Bewegung erzeugt wird.

Literatur

[1] V. Bliznikas, Zur Differentialgeometrie der bilinear-metrischen Linienelementräume, *Vilniaus Valstybinio V. Kapsuko Vardo Universiteto Mokslo Darbai* 33. *Matematika, Fizika* **9** (1960), 97–106. Russisch mit deutscher Zusammenfassung.
[2] L. P. Eisenhart, Generalized spaces of general relativity, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **45** (1959), 1759–1762.
[3] V. Hlavatý, The element basic principles of the unified theory of relativity. A., *J. Rational Mech. Anal.* **1** (1952), 539–562.
[4] V. Hlavatý, The element basic principles of the unified theory of relativity. B., *J. Rational Mech. Anal.* **2** (1953), 1–52.
[5] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956), 85–120.
[6] A. Moór, Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 145–150.
[7] H. Rund, The differential geometry of Finsler spaces, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1959.
[8] J. R. Vanstone, A generalization of Finsler geometry, *Canad. Math.* **14** (1962), 87–112.

(Eingegangen am 14. Dezember 1963.)