Über tensorielle Übertragungen spezieller Art

Von L. TAMÁSSY (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 50. Geburstag gewidmet

1. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit nennt man tensoriel zusammenhängend, wenn zwischen den benachbarten Produkträumen $E_n^{(2)}(x)$ und $E_n^{(2)}(x+dx)$ der Tangentialräume $E_n(x)$, bzw. $E_n(x+dx)$ eine lineare Übertragung vorgegeben ist.[1]) Diese Übertragung kann mit Hilfe eines geometrischen Objektes $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t$ angegeben sein, dessen Transformationsgesetz im Falle der Koordinatentransformation $x^{i'}=x^{i'}(x)$ folgendermaßen lautet:

$$\gamma_{k'l'}{}^{i'j'}{}_{t'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{t'}}\delta_{l'}^{j'} + \delta_{k'}^{i'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{l'}\partial x^{t'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{t'}}\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t.$$

Zwei Elemente von $E_n^{(2)}(x)$ bzw. $E_n^{(2)}(x+dx)$ eines Tensorfeldes $T^{ij}(x)$ nennt man parallel, wenn für sie

$$dT^{ij}(x)+\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t(x)\,T^{kl}(x)\,dx^t = 0$$

besteht. Eine gewöhnliche affine Übertragung — gegeben z. B. durch $\Gamma_j{}^i{}_k$ — induziert auch ein γ:

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta_k^i \Gamma_l{}^j{}_t + \delta_l^j \Gamma_k{}^i{}_t.$$

Eine solche tensorielle Übertragung nennt man induziert oder vektoriell. Ist T^{ij} symmetrisch, antisymmetrisch oder ein tensorielles Produkt von zwei Vektoren

$$T^{ij} = \xi^i \eta^j \tag{1}$$

oder ein alternierendes Produkt von zwei Vektoren (ein einfacher Bivektor)

$$T^{ij} = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i, \tag{2}$$ [2])

so werden diese Eigenschaften während des Parallelverschiebens im allgemeinen verloren gehen.

---

[1]) Es könnten allgemeiner die Produkträume $E_n^{(r)} \otimes E_n^{*(s)}$ (siehe z. B. A. COSSU [2]), oder gewisse Mengen dieser Produkträume, z. B. $\{E_n^{(r)} \otimes E_n^{*(s)}\}$, wo r und s gerade Zahlen sind (siehe L. TAMÁSSY [5]), in Betracht gezogen werden. Wir wollen uns aber jetzt mit diesem einfacheren Falle begnügen (diese Einschränkung macht auch M. KUCHARZEWSKI [4]). Der allgemeine Fall ist nachher schon leicht zu erledigen.

[2]) Oder einfach $T=\xi\wedge\eta$.

2. In dieser Arbeit wollen wir uns mit tensoriellen Übertragungen beschäftigen, die (2) bewahren, d. h. die einfache Bivektoren in ebensolche überführen. Wir wollen zu erst bemerken, daß γ dafür nicht unbedingt induziert sein muß.

Fassen wir $E_n^{(2)}$ als einen affinen Raum und die T^{ij} als seine Punkte auf, so bilden die in der Form (1) bzw. (2) darstellbaren Punkte je eine Fläche Φ bzw. Ψ von $E_n^{(2)}$.[3]) Eine induzierte Übertragung führt die Fläche Φ_0 des Produktraumes $E_n^{(2)}$ in einem beliebigen Punkt P_0 in die Fläche Φ des benachbarten Bildpunktes P über: $\Phi_0 \to \Phi$. Umgekehrt gilt dies aber nicht.[4]) Die Abbildung $\Psi_0 \to \Psi$ wird schon durch $\Phi_0 \to \Phi$ bestimmt. Ein induziertes γ verursacht also stets eine Abbildung $\Psi_0 \to \Psi$. Die Umkehrung gilt aber auch hier nicht. Ψ liegt nämlich im $\binom{n}{2}$-dimensionalen Unterraum $E_n^{\wedge(2)}$ der antisymmetrischen Elemente von $E_n^{(2)}$. Weder Φ noch Ψ liegt aber in einem linearen Unterraum von $E_n^{(2)}$ bzw. $E_n^{\wedge(2)}$ [5]). Die Forderung $\Psi_0 \to \Psi$ stellt also nur für die Abbildung $E_n^{\wedge(2)}(P_0) \to E_n^{\wedge(2)}(P)$ eine Bedingung dar, bedeutet aber keine Bedingung für die affine Abbildung $[E_n^{(2)}(P_0) - E_n^{\wedge(2)}(P_0)] \to [E_n^{(2)}(P) - E_n^{\wedge(2)}(P)]$. Da die Abbildung von Φ_0 erst durch die Abbildung des ganzen $E_n^{(2)}(P_0)$ bestimmt ist, gilt $\Phi_0 \to \Phi$ auch im Falle $\Psi_0 \to \Psi$ im allgemeinen nicht. Noch weniger braucht für $\Psi_0 \to \Psi$ das γ induziert zu sein.

3. Wir fassen diejenigen γ, für welche die zugehörigen Abbildungen über $E_n^{\wedge(2)}$ mit der von einem induzierten γ hervorgerufenen Abbildung übereinstimmen, in einer Klasse zusammen. Sie werden über den $E_n^{\wedge(2)}$ mit dem betreffenden induzierten γ äquivalent genannt. Es entsteht die Frage, ob zu einem γ, das $\Psi_0 \to \Psi$ leistet, induzierte $\bar{\gamma}$ existieren, mit denen γ äquivalent ist. Die Antwort auf diese Frage ist bejahend.[6])

Wir werden die einzige lineare Übertragung Γ zwischen den $E_n(x)$, für welche das induzierte $\bar{\gamma}$ mit einem gegebenen γ über $E_n^{\wedge(2)}$ äquivalent ist, auf geometrische und teils synthethetische Weise konstruieren. Unsere Konstruktion beleuchtet auch die geometrischen Verhältnisse hoffentlich von einer neuen Seite.

Wir nehmen also an, daß die betrachtete tensorielle Übertragung immer $\Psi_0 \to \Psi$ erfüllt. Die $\Psi_0 \to \Psi$ erzeugt zwischen den an den Origos P_0, bzw. P liegenden Ebenen von $E_n(P_0)$ und $E_n(P)$ eine ein-eindeutige Ebeneabbildung. Dies geschieht folgendermaßen. [7]) $p_0 = \xi_0 \wedge \eta_0 \in \Psi_0$ läßt sich bekanntlich in $E_n(P_0)$ als eine Ebenenstellung, ein Inhaltsmaß und ein Drehungssinn (letzterer läßt sich als Vorzeichen des Inhaltsmaßes auffassen) charakterisieren. Umgekehrt, jeder Ebenenstellung und jedem Inhaltsmaß (mit Vorzeichen) entspricht in $E_n^{(2)}(P_0)$ ein Element von Ψ_0, und zwar so, daß, wenn die Ebenenstellungen übereinstimmen, dann die Komponenten p^{ij} der entsprechenden $p \in \Psi$ proportional sind, d. h. an einer Erzeugenden der Kegelfläche Ψ_0 liegen. Da aber die durch das γ erzeugte Abbildung zwischen $E_n^{(2)}(P_0)$ und $E_n^{(2)}(P)$ linear ist, gehen die Erzeugenden von Ψ_0 in die Erzeugenden von Ψ, d. h. die Ebenen von $E_n(P_0)$ in die Ebenen von $E_n(P)$ über.

[3]) Gewisse Eigenschaften dieser Flächen sind in [7] zusammengestellt.

[4]) Siehe A. Cossu [2]. oder L. Tamássy [7]. Aus $\Phi_0 \to \Phi$ folgt nur

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta_k{}^i \Gamma_l{}^j{}_t + \delta_l{}^j \overset{*}{\Gamma}_k{}^i{}_t .$$

[5]) Siehe L. Tamássy [7].

[6]) Siehe H. Hombu [3], A. Cossu [1] S. 380.

[7]) Ausführlicher siehe L. Tamássy [7].

Diese Abbildung führt die Ebenenbüschel von $E_n(P_0)$ in die Ebenenbüschel von $E_n(P)$ über. Die

$$(3) \qquad p^{ij} = [(a\underset{0}{\xi^i} + b\underset{0}{\eta^i})\zeta^j + (a\underset{0}{\xi^j} + b\underset{0}{\eta^j})\zeta^i] \in \Psi_0 \qquad (a^2 + b^2 > 0)$$

bilden nämlich in $E_n^{(2)}(P_0)$ für alle zuläßigen Konstanten a und b eine $n-1$ dimensionale Ebene (die ζ^i sind Parameter), und ihre Bilder erzeugen in $E_n(P_0)$ ein Ebenenbüschel. Wegen der Linearität der von γ erzeugten Abbildung wird die $n-1$ dimensionale Ebene (3) in eine ebensolche von $E_n^{(2)}(P)$ übergeführt, d. h. Ebenenbüschel von $E_n(P_0)$ gehen in Ebenenbüschel von $E_n(P)$ über, und diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig. Eine Ebenenabbildung die Büschel in Büschel überführt, läßt sich aber zu einer linearen Punktabbildung (Affinität) ergänzen, die die Punkte einer Ebene in die Punkte der Bildebene transformiert, und diese Affinität $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist, von einer Homothetie abgesehen, eindeutig.[8])

4. Wir werden zeigen, daß sich zu $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine Homothetie $\mathfrak{H}$ immer so finden läßt, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}\tilde{\mathfrak{A}}$ ein Vektorpaar von $E_n(P_0)$, das einen einfachen Bivektor des $E_n^{(2)}(P_0)$ repräsentiert, in ein solches Vektorpaar von $E_n(P)$ überführt, welches das Bild des genannten Bivektors in $E_n^{(2)}(P)$ repräsentiert.

Es sei p ein einfacher Bivektor von P_0, der von γ in den einfachen Bivektor p' von P überführt wird. p sei in $E_n(P_0)$ durch das Vektorpaar ξ, η repräsentiert (also $p = \xi \wedge \eta$). Das Bild p' von p wird dann in $E_n(P)$ durch ein solches Vektorpaar repräsentiert, dessen Ebenenstellung $\Pi' = \mathfrak{A}(\Pi)$ das Bild der Ebenenstellung Π von ξ und η ist. Da die Komponenten der einfachen Bivektoren von gleicher Stellung proportional sind, so ist im allgemeinen $\tilde{p} = \tilde{\mathfrak{A}}(\xi) \wedge \tilde{\mathfrak{A}}(\eta) \neq p'$, aber $\tilde{p}^{ij} = \lambda p^{ij}$. Daher gibt $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}\tilde{\mathfrak{A}}$ — mit einer geeigneten Homothetie $\mathfrak{H}$ — schon eine solche Affinität, die die Punkte der Ebenen von $E_n(P_0)$ in die Punkte der Bildebenen transformiert, wobei bereits auch $\mathfrak{A}(\xi) \wedge \mathfrak{A}(\eta) = p'$ erfüllt wird. — Wir behaupten, daß diese Affinität $\mathfrak{A}$ zwei beliebige Vektoren μ und ν in zwei solche Vektoren $\mathfrak{A}(\mu) = \mu'$, $\mathfrak{A}(\nu) = \nu'$ überführt, daß die durch sie repräsentierten einfachen Bivektoren ebenfalls Bilder voneinander sind.

$p = (\xi \wedge \eta) \in E_n^{\wedge(2)}(P_0)$ gestattet dann eine eindeutige Zerlegung $\sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{2}} \varkappa_\alpha p_\alpha$, wobei $p_\alpha = \mathfrak{e}_i \wedge \mathfrak{e}_j$ ist, die $\mathfrak{e}_i$ die Einheitsvektoren von $E_n(P_0)$ bezeichnen und die $\varkappa_\alpha$ die Maße der Projektionen auf die entsprechenden Koordinatenebenen des durch ξ, η bestimmten Parallelogrammes bedeuten, wenn dort als Maßeinheiten die durch die Einheitsvektoren aufgespannten Paralellogramme betrachtet werden. Wir zeigen, daß die Bilder in $E_n^{\wedge(2)}(P)$ der durch $\mathfrak{e}_i$ und $\mathfrak{e}_j$ repräsentierten einfachen Bivektoren p_α des Raumes $E_n^{\wedge(2)}(P_0)$ die in $E_n(P)$ durch $\mathfrak{e}'_i = \mathfrak{A}(\mathfrak{e}_i)$, $\mathfrak{e}'_j = \mathfrak{A}(\mathfrak{e}_j)$ represäntierten einfachen Bivektoren p'_α sind. Allerdings ist die Ebenenstellung der $\mathfrak{e}'_i$, $\mathfrak{e}'_j$ gleich der Ebenenstellung von p'_α, und daher gilt mindestens $\mathfrak{e}'_i \wedge \mathfrak{e}'_j = \underset{(\alpha_0)}{\lambda}\, p'_{\alpha_0}$ (für α_0 nicht summieren) mit einem geeigneten Faktor $\underset{(\alpha_0)}{\lambda}$.

Da γ zwischen $E_n^{\wedge(2)}(P_0)$ und $E_n^{\wedge(2)}(P)$ eine lineare Abbildung erzeugt, gilt offenbar $p' = \sum \varkappa_\alpha p'_\alpha$ (mit den gleichen $\varkappa_\alpha$). Ferner hat das aus $\xi' = \mathfrak{A}(\xi)$, $\eta' = \mathfrak{A}(\eta)$ gebildete Parallelogramm wegen der Eigenschaften der Affinitäten ebensogroße Projektionen

[8]) Siehe L. TAMÁSSY [6].

auf die Koordinatenebenen $\mathfrak{e}'_i = \mathfrak{A}(\mathfrak{e}_i)$, $\mathfrak{e}'_j = \mathfrak{A}(\mathfrak{e}_j)$, wie das entsprechende Parallelogramm auf die zugehörigen Koordinatenebenen in ungestrichenen System. So gilt $\mathfrak{A}(\xi) \wedge \mathfrak{A}(\eta) = \sum \varkappa_\alpha [\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_i) \wedge \mathfrak{A}(\mathfrak{e}_j)]$. Die linke Seite ist aber gleich p', während in den eckigen Klammern der rechten Seite $\underset{(\alpha_0)}{\lambda} p'_{\alpha_0}$ steht. Daher ist $p' = \sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{2}} \varkappa_\alpha \underset{(\alpha)}{\lambda} p'_\alpha$. Die Zerlegung von p' in der Form $\sum \varkappa_\alpha p'_\alpha$ ist aber eindeutig und daher gilt $\lambda = 1$, d. h. $\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_i) \wedge \mathfrak{A}(\mathfrak{e}_j) = p'_\alpha$.

Es ist nun leicht zu sehen, daß das Bild q' eines beliebigen einfachen Bivektors $q = \mu \wedge \nu$ durch das Vektorpaar $\mathfrak{A}(\mu), \mathfrak{A}(\nu)$ repräsentiert wird. Die Projektionen auf die Koordinatenebenen $\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j$ des Parallelogrammes μ, ν seien mit σ_α bezeichnet. Daher gilt $\mu \wedge \nu = \sum_\alpha \sigma_\alpha (\mathfrak{e}_i \wedge \mathfrak{e}_j)$, d. h. $q = \sum_\alpha \sigma_\alpha p_\alpha$. Wegen der Eigenschaften der Affinitäten gilt wieder $\mathfrak{A}(\mu) \wedge \mathfrak{A}(\nu) = \sum_\alpha \sigma_\alpha [\mathfrak{A}(\mathfrak{e}'_i) \wedge \mathfrak{A}(\mathfrak{e}'_j)]$, wobei die rechte Seite nach dem vorigen Absatz gleich $\sum \sigma_\alpha p'_\alpha$ ist. Dies ist aber wegen der Linearität der durch γ zwischen den $E^{\wedge(2)}$-s erzeugten Abbildung gleich q', w. z. b. w.

5. Wir betrachten nun in unserer Grundmannigfeltigkeit eine beliebige kurve $x^i = x^i(t)$, bei der den Punkten P_0 und P die Parameterwerte t_0 bzw. t entsprechen. Die tensorielle Übertragung γ ordnet jedem einfachen Bivektor $p(t_0)$ in jedem Punkt P der Kurve einen einfachen Bivektor $p(t)$ zu, der das Bild von $p(t_0)$ ist. Diese Zuordnung induziert — nach dem Vorangehenden — eine Affinität $\mathfrak{A}$ zwischen $E_n(P_0)$ und $E_n(P)$, die offenbar vom Parameterwert t des Punktes P abhängt. Wir werden zeigen, daß diese Affinitäten ein Größensystem $\Gamma_j{}^i{}_k(x)$ bestimmen.

Wir betrachten einen n-dimensionalen affinen Raum A, bezogen auf ein affines Koordinatensystem, und bilden eine Umgebung von P_0 auf A ab, und zwar so, daß die Punkte mit gleichen Koordinaten einander entsprechen sollen. Einander entsprechende Objekte werden wir mit gleichen Buchstaben bezeichnen, Objekte im Raum A erhalten zusätzlich das Zeichen $\hat{}$. Die Basisvektoren des $E_n(P)$ seien jetzt die Parameterlinientangenten $\mathfrak{e}_s(P)$. Daher entsprechen dieser in A die zu einander parallelen $\hat{\mathfrak{e}}_s(\hat{P})$.

Es sei jetzt die betrachtete Kurve die durch P_0 hindurchgehende k-te Parameterlinie. Die Affinitäten $\mathfrak{A}(t)$ bestimmen in jedem Punkt $P(t)$ der betrachteten Parameterlinie ein Vektor-n-Bein $\mathfrak{e}'_s(t)$ als Bild von $\mathfrak{e}_s(t_0)$:

$$\underset{(s)}{e'^i}(t) = \underset{(k)}{c_s^l} \underset{(l)}{e^i}(t).$$

(In $\underset{(k)}{c_s^l}$ weist der Index k darauf hin, daß diese Koeffizienten bei der längs der k-ten Parameterlinie vorgenommenen Verschiebung auftraten.) Zwischen den Bildern dieser Vektoren besteht wegen der Parallelität der $\hat{\mathfrak{e}}_s(\hat{P})$ die Relation

$$\underset{(s)}{\hat{e}'^i}(t) = \underset{(k)}{c_s^l}(t) \underset{(l)}{\hat{e}^i}(t_0).$$

Nach Differentiation erhalten wir in P_0

$$\frac{d \underset{(s)}{\hat{e}'^i}(t_0)}{dt} = \frac{d \underset{(k)}{c_s^l}(t_0)}{dt} \underset{(l)}{\hat{e}^i}(t_0),$$

oder, da die Komponenten von $\mathfrak{e}'_s$ und $\hat{\mathfrak{e}}'_s$ bezüglich der Basen $\mathfrak{e}_s(P)$ bzw. $\hat{\mathfrak{e}}_s(P) = \hat{\mathfrak{e}}_s(P_0)$ übereinstimmen, die Relation

$$\frac{d \underset{(s)}{e'^i}(t_0)}{dt} = \frac{d \underset{(k)}{c_s^l}(t_0)}{dt} \underset{(l)}{e^i}(t_0).$$

Endlich ergibt sich mit der Bezeichung $\dfrac{d \underset{(k)}{c_s^l}(t_0)}{dt} = \Gamma_k{}^l{}_s(P_0)$, und nach der Substitution $dt = dx^k$

$$d \underset{(s)}{e'^i} = \Gamma_k{}^l{}_s(P_0) \underset{(l)}{e^i}(t_0).$$

Mit Rücksicht auf $\underset{(l)}{e^i}(t_0) = \delta_l^i$ ist die i-te Komponente von $\mathfrak{e}'_s$ im zu P_0 auf der k-ten Parameterlinie benachbarten Punkt P bis auf in dx^k lineare Glieder

$$(4) \quad \underset{(s)}{e'^i}(t_0 + dt) = \underset{(s)}{e^i}(t_0) + d \underset{(s)}{e'^i}(t_0) = \underset{(s)}{e^i}(t_0) + \Gamma_{k_0}{}^l{}_s(t_0) \underset{(l)}{e^i}(t_0)\, dx^{k_0} = \delta_s{}^i + \Gamma_{k_0}{}^i{}_s(P_0)\, dx^{k_0}$$

(für k_0 nicht summieren!)
Die durch (4) zwischen $E_n(P_0)$ und $E_n(P)$ bestimmte Abbildung erzeugt offenbar dieselbe Abbildung, wie $\mathfrak{A}$ (bis auf in dx^k lineare Glieder). Läuft k_0 die Indizes $1, 2, \ldots, n$ durch, so gelangen wir zu den Größen $\Gamma_k{}^i{}_s$.

6. Das Γ und das durch dieses induzierte $\bar{\gamma}$ bewirken aber unter den einfachen Bivektoren die gleiche Abbildung. Daher stimmt das $p = \xi \wedge \eta$ durch $\bar{\gamma}$ zugeordnete $\bar{p}$ mit dem alternierenden Produkt der zu ξ und η durch Γ (d. h. durch die Affinität $\mathfrak{A}$) zugeordneten ξ' und η' überein. Dies ist aber nichts anderes, als das p durch das gegebene γ zugeordnete p'. So erzeugen γ und $\bar{\gamma}$ zwischen den einfachen Bivektoren der benachbarten Punkte dieselbe Zuordnung, mindestens in der Richtung der Parameterlinien. Eine in sonstiger Richtung vorgenommene Verschiebung ist dagegen wegen $dp^{ij} = \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t p^{kl} dx^t$ eine lineare Kombination der nach den Koordinatenlinien durchgeführten Verschiebungen. Daher bringen γ und das durch das konstruierte Γ induzierte $\bar{\gamma}$ dieselbe Abbildung zwischen den einfachen Bivektoren zustande, w. z. b. w.

Literatur

[1] A. Cossu, Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali, *Rend. Mat. e Appl.* **13** (1955), 373—389.

[2] A. Cossu, Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque, *Rend. Mat. e Appl.* **21** (1962), 167—218.

[3] H. Hombu, Zur Theorie der Affinorübertragung, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. II.* **2** (1934), 104—117.

[4] M. Kucharzewski, Über die Tensorübertragung, *Ann. Mat. Pura Appl.* **54** (1961), 64—83.

[5] L. Tamássy, Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), 65—82.

[6] L. Tamássy, Über die Kompatibilität gewisser Ebenenabbildungen und linearer Punktabbildungen, *Elem. Math.* **19** (1964), 62-63

[7] L. Tamássy, Über aus dekomponierbaren Elementen bestehende Gebilde des Produktraumes der Tangentialräume, (in Erscheirung).

(Eingegangen am 30. Dezember 1963.)