Charakterisierung eines Nachbarpunkt-Schemas durch Stellen

Von MANFRED HERRMANN (Halle)

DEDEKIND und WEBER haben für algebraische Funktionen einer Veränderlichen einen *Punkt der Riemannschen Fläche* als homomorphe Zuordnung zwischen den Elementen α, β des zugehörigen Funktionenkörpers und den Elementen a, b des Körpers der komplexen Zahlen definiert (vgl. [1], S. 236–238). Dabei wird — wie in der Funktionentheorie üblich — der Ausnahmewert ∞ als bestimmte Zahl (Konstante) betrachtet, mit der nach folgenden Regeln zu rechnen ist:

$$a \pm \infty = \infty; \; a \cdot \infty = \infty \quad \forall a \neq 0;$$

$$\infty \cdot \infty = \infty; \; 1/0 = \infty; \; 1/\infty = 0.$$

Die Ausdrücke $\infty \pm \infty$; $0 \cdot \infty$; $0/0$; ∞/∞ werden nicht erklärt. Die erwähnte Zuordt nung $\alpha \to a$ genügt den Homomorphie-Gesetzen, wenn die rechten Seiten definiersind.

Diese Überlegung hängt mit dem VAN DER WAERDEN'schen Begriff der *relationstreuen Spezialisierung* [3], angewandt auf unendlich viele algebraische Funktionen, zusammen. VAN DER WAERDEN charakterisiert so *einen Punkt des zum Körper gehörenden algebraischen Gebildes*, wobei durch seine homogene Betrachtungsweise die Einführung von ∞ vermieden wird.

Benutzt man zur Beschreibung dieses Sachverhaltes konsequent den Homomorphiebegriff, so gelangt man zum *Stellenbegriff*, wie ihn u. a. LANG ([2]) und — in seiner endlichen Form — WEIL ([6]) verwenden.

Es ist das Ziel dieser Note, in Anlehnung an [1] und [3] den Begriff des *linearen* Zweiges in der komplexen Ebene E_0-*aufgefaßt als ein Schema von Nachbarpunkten* $\mathfrak{P} = (P; P_1, P_2, \ldots)$ [1]) durch den Stellenbegriff auf Ebenen E über beliebigem Grundkörper k zu übertragen. Mit anderen Worten: Der Begriff „*Punkt eines algebraischen Gebildes*" soll hier entsprechend der Betrachtungsweise aus [1] und [3] zum Begriff des Schemas $\mathfrak{P}$ verallgemeinert werden. Es handelt sich also nicht-wie in [5] — um Fragen der Begründung der Theorie der Nachbarpunkte in E (bzw. auf einer Varietät V), sondern um die Fassung des genannten verallgemeinerten Punktbegriffes durch geeignete Abbildungen eines bestimmeten Funktionenkörpers.

Bezeichnungen: a) Mit $k[\chi_1, \ldots, \chi_n]$ kennzeichnen wir den Ring der formalen Polynome in n Variablen über k. Sein Quotientenkörper ist $k(\chi_1, \ldots, \chi_n)$.

[1]) Im vorliegenden Fall: Mittelpunkt P des Zweiges una lauter freie, einfache Nachbarpunkte P_i([4]), wobei in diesem Schema jeweils die Richtung t_{i+1}, mit der P_{i+1} auf P_i folgt, zu berücksichtigen ist.

b) Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement ohne Nullteiler und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Dann heißt der Ring $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{z} \;\middle|\; \begin{matrix} a, z \in R \\ z \notin \mathfrak{p} \end{matrix} \right\}$ *der lokale* $\mathfrak{p}$*-Ring von* R.

Wir benutzen hier inhomogene Koordinaten x, y. Um einen Punkt $P = (x_0, y_0) \in E$ zu erfassen, hat man den Homomorphismus

$$k[x, y] \xrightarrow{\varphi} k[x, y]/(x - x_0, y - y_0)$$

zu betrachten; P ist in dieser Hinsicht durch das Primideal $(x - x_0, y - y_0)$ gekennzeichnet. Zur Charakterisierung des Schemas $\mathfrak{P}$ werden zusätzlich gebrochenrationale Ausdrücke herangezogen; durch eine geeignete Stelle ψ wird dann allen Funktionen aus $K = k_t(x, y)$ entweder ein bestimmtes Element aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper Ω oder der „Wert" ∞ zugeordnet. Als k_t bezeichnen wir die unendliche Körpererweiterung $k(t_1, t_2, \ldots)$ mit den Unbestimmten $t_1, t_2, \ldots$. Diese Erweiterung des Grundkörpers k entspricht dem Übergang von der Punktdarstellung durch den Homomorphismus φ zur Zweigdarstellung durch die Stelle ψ. Für die Zuordnung ψ gelten mit den gleichen Einschränkungen wie in [1] die Homomorphiegesetze (vgl. [2]).

Die folgenden Überlegungen behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Unbestimmten t_i zu Elementen aus k spezialisiert und die dementsprechenden Abbildungen hernimmt.

Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn *Prof.* O. H. Keller.

Zur Vereinfachung der Darstellung wählen wir $x_0 = y_0 = 0$. In E_0 wird ein linearer Zweig in P durch eine Potenzreihe

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

gegeben.

Wir betrachten folgende Ausdrücke:

$$l_1 = \frac{y}{x}, \quad l_2 = \frac{\frac{y}{x} - a_1}{x}, \ldots, l_i = \frac{l_{i-1} - a_{i-1}}{x}, \ldots.$$

Macht man den Grenzübergang $x \to 0$, so gilt:

$$l_i \to \frac{1}{i!} y^{(i)}(P).$$

Durch die Ableitungen $y^{(i)}_{(P)}$ ist der Verlauf des betrachteten Zweiges in P eindeutig bestimmt.

Darauf beruht die folgende Stellenkonstruktion über einem beliebigen Körper k. Wir setzen:

$$L_1 = l_1 = \frac{y}{x}, \ldots, L_i = \frac{L_{i-1} - t_{i-1}}{x}, \ldots.$$

Geht man von $R = k[x, y]$ aus, so kann P, wie gesagt, durch

$$k[x, y] \xrightarrow{\varphi} k[x, y]/\mathfrak{p} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} = (x, y)$$

beschrieben werden. (Wir identifizieren dabei k mit seinem φ — Bild, sodaß $\varphi\ (k[x, y]) = k$ gilt.) Die Charakterisierung von $\mathfrak{P}$ erfolgt nun so:

1) Sukzessive Erweiterung der Abbildung φ zu einem Homomorphismus σ^* eines bestimmten Unterringes $R^* \subset K = k_t(x, y)$, der jedem L_i die Unbestimmte t_i zuordnet. Die Abbildung σ^* „ersetzt" den Grenzübergang $x \to 0$ in E_0.

2) Ausdehnung von σ^* zu einer geeigneten Ω-bewerteten Stelle ψ des Körpers K [2]): ψ charakterisiert dann das Schema $\mathfrak{P}$ über $P \in E$.

Zu 1): Zunächst wird φ durch

$$\varphi^*(a/z) = \varphi(a)/\varphi(z)$$

zu einem Homomorphismus φ^* des $\mathfrak{p}$-Ringes $\mathfrak{v} = R_\mathfrak{p}$ von φ fortgesetzt. Der Kern von φ^* ist das maximale Ideal

$$\mathfrak{m} = \left\{ a/z \,\middle|\, \begin{matrix} a \in \mathfrak{p} \\ z \notin \mathfrak{p} \end{matrix} \right\} \subset \mathfrak{v}.$$

Satz. *Die Abbildung φ^* kann zu einem Homomorphismus σ_1:*

$$R_1 = \mathfrak{v}[L_1] \xrightarrow{\sigma_1} \Omega \ \ mit\ \ \sigma_1(L_1) = t_1;\ d.\,h.:\ \sigma_1(R_1) = k[t_1]$$

erweitert werden. Dabei ist $\mathfrak{v}[L_1]$ der Ring des Polynome in L_1.

Beweis. Die Abbildung

$$\sigma_1(A_1) = \sigma_1\left(\sum_1^n q_i L_1^i\right) = \sum_1^n \varphi^*(q_i)\cdot t_1^i$$

genügt [3]) den Homorphiegesetzten. Zu zeigen ist die Eindeutigkeit von σ_1, also die Richtigkeit der Aussage: Aus $A_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1(A_1) = 0$.

$$A_1 = \sum_1^n \frac{f_i(x, y)}{c_i + p_i(x, y)} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^i = 0$$

bedeutet in unserem Fall eine Identität in x und y. Setzt man $y = x\ t_1$, so erhält man hieraus eine Identität in x und t_1:

$$\bar{A}_1 = \sum_1^n \frac{f_i(x, xt_1)}{c_i + p_i(x, xt_1)} \cdot t_1^i \equiv 0.$$

Man kann nämlich den „Ersetzungs"-Homomorphismus $k[x, y] \xrightarrow{\tau_1} k[x, t_1]$ mit $\tau_1(x) = x$, $\tau_1(y) = x \cdot t_1$ und damit Kern $(\tau_1) = 0$ zu einem Isomorphismus τ_1^* des Quotientenkörpers $k(x, y)$ in $k(x, t_1)$ fortsetzen (vgl. [2], I).

Insbesondere gilt für $x = 0$:

$$\bar{A}_1(x = 0) = \sum_1^n \frac{f_i(0, 0)}{c_i + p_i(0, 0)} \cdot t_1^i \equiv 0 \ \text{ in } \ t_1;$$

[2]) Ω ist ein algebraisch abgeschlossener Körper, der k_t enthält.

[3]) $q_i = \dfrac{f_i(x, y)}{c_i + p_i(x, y)} \in \mathfrak{v}$ mit $f_i \in R$, $p_i \in \mathfrak{p}$ und $c_i \in k\ (c_i \neq 0)$.

$\bar{A}_1(x=0)$ ist aber gerade das Bild von A_1 bei der Abbildung σ_1; also gilt:

$$\bar{A}_1(x=0)=\sigma_1(A_1)=0.$$

Nun wird σ_1 genau wie φ zu einem Homomorphismus σ_1^* des $\mathfrak{p}_1$-Ringes $\mathfrak{v}_1=R_{1\mathfrak{p}_1}$ von σ_1 ausgedehnt [4]). Diese Abbildung σ_1^* erweitern wir zu σ_2:

$$R_2=\mathfrak{v}_1[L_2]\xrightarrow{\sigma_2}\Omega \quad \text{mit} \quad \sigma_2(L_2)=t_2;\ \text{d. h.: } \sigma_2(R_2)\subseteq k(t_1)[t_2].$$

Satz. *σ_2 ist ein Homomorphismus.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von σ_2 wird ähnlich wie oben gezeigt:

In der Identität (in x, y und t_1)

$$A_2=\sum_\mu \frac{\sum_i \dfrac{f_{i\mu}(x,y)}{c_{i\mu}+p_{i\mu}(x,y)}L_1^i}{\sum_\nu \dfrac{g_{\nu\mu}(x,y)}{d_{\nu\mu}+q_{\nu\mu}(x,y)}L_1^\nu}\cdot L_2^\mu\equiv 0$$

setze man nun: $y=x^2t_2+xt_1$.

Schreibt man A_2 in der Form [5])

$$A_2=\sum_\mu \frac{\dfrac{Z_{1\mu}}{N_{1\mu}}}{\dfrac{Z_{2\mu}}{N_{2\mu}}}\cdot\frac{(L_1-t_1)^\mu}{x^\mu}=\sum_\mu \frac{N_{2\mu}\cdot Z_{1\mu}(y-xt_1)^\mu}{N_{1\mu}\cdot Z_{2\mu}x^{2\mu}}=\frac{\chi}{\Delta},$$

so wird $\Delta=\Delta(x,y,t_1)\not\equiv 0$ für $y=x^2t_2+xt_1$. Anderenfalls wäre für mindestens ein μ insbesondere $N_{1\mu}(0,0,t_1)=0$ oder $Z_{2\mu}(0,0,t_1)=0$ im Widerspruch zu unseren Festsetzungen, wonach alle in $\sum\limits_\mu$ auftretenden Nenner $\sum\limits_\nu \dfrac{g_{\nu\mu}(x,y)}{d_{\nu\mu}+q_{\nu\mu}(x,y)}L_1^\nu\notin\mathfrak{p}_1$. Also liegt Δ nicht im Kern $\mathfrak{q}_2$ des „Ersetzungs"-Homomorphismus τ_2:

$$S=k[x,y,t_1]\xrightarrow{\tau_2}k[x,t_1,t_2] \quad \text{mit} \quad \tau_2(x)=x;\ \tau_2(t_1)=t_1;\ \tau_2(y)=x^2t_2+xt_1.$$

Erweitert man τ_2 zu einem Homomorphismus τ_2^* des lokalen $\mathfrak{q}_2$-Ringes $S\mathfrak{q}_2$ in den Körper $k(x,t_1,t_2)$, so geht bei τ_2^* die gegebene Identität in (x,y,t_1) in eine Identität mit x,t_1,t_2 über.

Dann gilt:

$$\bar{A}_2(x=0)=\sum_\mu \frac{\sum_i \dfrac{f_{i\mu}(0,0)}{c_{i\mu}+p_{i\mu}(0,0)}t_1^i}{\sum_\nu \dfrac{g_{\nu\mu}(0,0)}{d_{\nu\mu}+q_{\nu\mu}(0,0)}t_1^\nu}\,.\,t_2^\mu\equiv 0 \text{ in } t_1,t_2;$$

und dabei ist

$$0=\bar{A}_2(x=0)=\sigma_2(A_2).$$

---

[4]) $\mathfrak{p}_1$ ist als Kern des Homomorphismus σ_1 von R_1 in den Körper Ω ein Primideal.

[5]) $\Delta=\prod\limits_\mu N_{1\mu}Z_{2\mu}x^{2\mu}$.

In dieser Weise können wir fortfahren. Beim i-ten Schritt wäre entsprechend in $A_i=0$ (Identität in x, y und $t_1, \ldots, t_{i-1}$):

$$y = x^i t_2 + \ldots + x t_1$$

und anschließend $x=0$ zu setzen, um die Eindeutigkeit von: $R_i = \mathfrak{v}_{i-1}[L_i] \xrightarrow{\sigma_i} \Omega$ mit $\sigma_i(L_i)=t_i$ zu zeigen. Es ist: $\sigma_i(t_{i-1}) = t_{i-1} \in R_i$ [6]); aus

$$\sigma_i(L_{i-1} - t_{i-1}) = \sigma_i(x \cdot L_i) = 0$$

folgt nämlich:

$$\sigma_i(t_{i-1}) = \sigma_i(L_{i-1}) = \sigma_{i-1}(L_{i-1}) = t_{i-1}.$$

Wir gewinnen so eine Kette von Unterringen aus $K = k_t(x, y)$:

$$(\ast) \qquad R \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots \ldots;$$

und zu jedem R_i gehört ein Homomorphismus σ_i mit den Eigenschaften:

$\sigma_i(R_\nu) = \sigma_\nu(R_\nu) \forall_\nu \leqq i$, insbesondere $\sigma_i(R) = \varphi(R)$;

$\sigma_i(R_i) \subset k(t_1, \ldots, t_i) \subset \Omega$, wobei $\sigma_i(L_i) = t_i$ und $\sigma_i(t_j) = \sigma_{j+1}(t_j) = t_j$ für $1 \leqq j \leqq i-1$.

Die Kette $(\ast)$ besitzt bezüglich der beiden Eigenschaften eine obere Schranke (R^* mit σ^*):

$$R^* = \bigcup_i R_i \quad \text{und} \quad \sigma^*(R_i) = \sigma_i.$$

Der Homomorphismus $\sigma^*: R^* \to \Omega$ ordnet damit jedem L_i die Unbestimmte t_i zu; und es ist: $\sigma^*(t_i) = t_i \forall i$.

Satz. *R^* ist ein lokaler Ring und σ^* der zum maximalen Ideal von R^* gehörige Homomorphismus.*

Beweis. $\mathfrak{q} \overset{\text{def}}{=} \text{Kern}(\sigma^*)$ und $\mathfrak{p}^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{p}_i = \text{Kern}(\sigma_i)$. Aus $a \in \mathfrak{q}$ folgt

$$\exists i : a \in R_i, \text{ d. h.}: 0 = \sigma^*(a) = \sigma_i(a);$$

danach ist

$$a \in \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}^*.$$

Umgekehrt folgt aus $a \in \mathfrak{p}^*$:

$$\exists i: \; a \in \mathfrak{p}_i \subset R_i; \text{ d. h.: } \sigma_i(a) = 0;$$

somit gilt:

$$\sigma^*(a) = \sigma_i(a) = 0 \text{ und daher: } a \in \mathfrak{q}.$$

Es ist demnach:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^*.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{p}^*$ das einzige maximale Ideal in R^* ist. Dafür ist die Kette der „Zwischenglieder" aus $(\ast)$ entscheidend:

$$R_{\mathfrak{p}} \subset R_{1\mathfrak{p}_1} \subset R_{2\mathfrak{p}_2} \subset \ldots.$$

---

[6]) Aus $L_i \in R_i$ folgt: $t_{i-1} \in R_i$; z. B. ist: $t_1 = -y \cdot (L_2)^1 + L_1 (L_2)^0 \in R_2$.

(Kette von *lokalen* Ringen): Sei v eine Nichteinheit (NE) aus R^*. Dann $\exists j: v \in R_{j\mathfrak{p}_j}$; v ist (wegen $v^{-1} \notin R^*$) auch NE in $R_{j\mathfrak{p}_j}$. Daher gilt [7]):

$$v \in \mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{p}_{j+1} \subset \mathfrak{p}^*.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{p}^* = \{NE \in R^*\};$$

d. h.: $\mathfrak{p}^*$ ist das einzige maximale Ideal in R^*.

Durch R^* und den zugehörigen Homomorphismus σ^* sind nunmehr sämtliche Nachbarpunkte P_i des Schemas $\mathfrak{P}$ erfaßt.

Zu 2): Die Abbildung σ^* erweitern wir zu einer Ω-bewerteten Stelle ψ von K. Dazu wählen wir nach [2] aus der Menge aller Elemente (R_j^*, σ_j^*) [8]) mit

$$R_j^* \supset R^* \quad \text{und} \quad \sigma_j^*(R^*) = \sigma^*$$

auf Grund der Ordnungsrelation

$$(R_{j_1}^*, \sigma_{j_1}^*) \leqq (R_{j_2}^*, \sigma_{j_2}^*) \leftrightarrow R_{j_1}^* \subset R_{j_2}^* \text{ und } \sigma_{j_2}^*(R_{j_1}^*) = \sigma_{j_1}^*$$

ein maximales Element (R_L, ψ_L) aus, wobei ψ_L der *zentrale Homomorphismus* des *lokalen* Ringes R_L (d. h. der Homomorphismus mit dem maximalen Ideal von R_L als Kern) ist. R_L ist ein *Bewertungsring*. Dann ist die Abbildung ψ:

$$\psi(R_L) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_L$$

$$\psi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \infty \; \forall a \in K: a \notin R_L$$

im Sinne von Lang eine *Stelle*.

Jede solche Stelle charakterisiert in diesem lokalen Sinn das Schema $\mathfrak{P}$ mit dem Träger $P \in E$ und den Richtungen $t_1, t_2, \ldots$.

Literatur

[1] R. Dedekind,—H. Weber. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.* **92** (1882), 181—290.

[2] S. Lang, Introduction to algebraic geometry. *New York*, 1958.

[3] B. L. Waerden, Der Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie, *Math. Ann.* **97** (1927), 756—774.

[4] B. L. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, *Berlin*, 1939.

[5] B. L. Waerden, Infinitely Near Points, *Proc. Sect. Sci.* **12** (1950), 1136—1145.

[6] A. Weil, Foundations of algebraic geometry, *New York*, 1962.

(Eingegangen am 15. Januar 1964.)

[7]) $\mathfrak{m}_j$ = maximales Ideal von $R_{j\mathfrak{p}_j}$.

[8]) R_j^* ist Unterring $\subset K$; σ_j^* ist ein Homomorphismus: $R_j^* \to \Omega$.