Über Hüllbahnen endlicher kinematischer Ketten

Von E. MÜLLER-PFEIFFER (Jena)

0. In [3] wurde das Problem aufgeworfen, zu vorgegebenen Winkeln $\beta_1, \ldots, \beta_n$ und vorgegebener (direkter) Ähnlichkeitstransformation T_a (ebene) Kurven K_0 zu finden, die durch T_a auf ihre Evolutoiden $K_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ abgebildet werden: $T_a[K_0] = K_{\beta_1 \ldots \beta_n}$. Die allgemeine Lösung wurde angegeben, und es ergab sich, daß alle fraglichen Kurven K_0 als Hüllbahnen zwangsläufiger kinematischer Ketten erzeugt werden können. Wir erledigen jetzt das „Umkehrproblem", geben also eine beliebige, allerdings endliche Kette mit Polbahnen vor, wie sie in [3] beschrieben worden sind, und werden zeigen, daß die Hüllbahn K_0 gewissen ihrer Evolutoiden $K_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ direkt ähnlich ist. Dazu ist der Nachweis zu führen, daß der Krümmungsradius $\varrho_0(\varphi)$ von K_0 gewissen Differenzen-Differentialgleichungen [3, (4)] genügt, oder anders gewendet, die Bestimmung der fraglichen geometrischen Größen $c, S; \beta_1, \ldots, \beta_n$ und damit der Ähnlichkeitstransformationen T_a (nach [3, (3)]) aus den charakteristischen Parametern λ_k, λ'_k der Polbahnen der vorgegebenen Kette ist darzulegen. Die λ_k, λ'_k bestimmen Lage und Vielfachheiten der Nullstellen ζ_k der gesuchten charakteristischen Funktionen $g(\zeta)$ [3, (5)] in folgender Weise.

1. Im allgemeinen sind Rast- und Gangpolbahnen eines willkürlich herausgegriffenen Kettengliedes nach [3; II, 1] (mit $\lambda_1 = \lambda_k \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda'_k \neq 0$) durch die Gleichungen

$$\varrho(\varphi) = \text{const}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda'_k}\right)^{h+1} \varphi^h e^{\lambda_k \varphi} \quad \text{bzw.} \quad \varrho(\varphi) = \text{const}\, \varphi^h e^{\lambda'_k \varphi} \tag{1}$$

bestimmt ($h = 0, 1, \ldots$). Für den Fall $c \neq 0$ ergab sich nach [3, (23)] zwischen den λ_k, λ'_k und der Wurzel $\zeta_k = a_k + ib_k$ von $g(\zeta) = 0$ der Zusammenhang

$$\lambda_k = \frac{a_k}{c + b_k}, \quad \lambda'_k = \frac{a_k}{b_k} \quad \text{oder} \quad \lambda_k = \frac{a_k}{c - b_k}, \quad \lambda'_k = -\frac{a_k}{b_k}. \tag{2}$$

Diese Gleichungspaare fassen wir jetzt als Bestimmungsgleichungen für ζ_k und ihren konjugiert komplexen Wert $\bar{\zeta}_k$ auf:

$$a_k + ib_k = c\,\frac{\lambda_k(\lambda'_k - i)}{\lambda'_k - \lambda_k} \quad \text{bzw.} \quad a_k + ib_k = c\,\frac{\lambda_k(\lambda'_k + i)}{\lambda'_k - \lambda_k}. \tag{3}$$

Mit ζ_k bezeichnen wir wie früher [3; I, 2] denjenigen Wert, dessen Imaginärteil größer als Null ausfällt:

$$\zeta_k = c\,\frac{\lambda_k \lambda'_k}{\lambda'_k - \lambda_k} + i\left| c\,\frac{\lambda_k}{\lambda'_k - \lambda_k} \right|. \tag{4}$$

Es gilt nun, eine charakteristische Funktion $g(\zeta)$ so zu finden, daß die Vielfachheit der Nullstelle ζ_k größer als h ausfällt: Ist m_k der größte unter den Exponenten h, die bei festen λ_k, λ'_k in den Gleichungen (1) der Pohlbanen auftreten, so ist für die Vielfachheit von ζ_k mindestens m_k+1 anzusetzen.

Enthält ein Kettenglied eine Gerade als Rastpolbahn („$\lambda_k=\infty$"), so ist $\zeta_k=-c\lambda'_k+i|c|$ zu setzen. Entsprechendes gilt für andere Sonderfälle. In der folgenden Übersicht sind alle Möglichkeiten, die bei der vorgegebenen Kette auftreten können, aufgeführt (vergl. [3, (24)]):

$$
(5)\qquad
\begin{array}{lllll}
 & \text{Rastpolbahn} & \text{Gangpol-bahn} & \max h & \zeta_k \\[6pt]
\begin{array}{l}\lambda_k \neq 0 \\ \lambda'_k \neq 0\end{array}: & \text{const}\left(\dfrac{\lambda_k}{\lambda'_k}\right)^{h+1}\varphi^h e^{\lambda_k\varphi} & \text{const}\,\varphi^h e^{\lambda'_k\varphi} & m_k & c\,\dfrac{\lambda_k\lambda'_k}{\lambda'_k-\lambda_k}+i\left|c\,\dfrac{\lambda_k}{\lambda'_k-\lambda_k}\right| \\[12pt]
\lambda_k=\infty: & \textit{Gerade} & \text{const}\,\varphi^h e^{\lambda'_k\varphi} & m_k & -c\lambda'_k+i|c| \\[12pt]
\begin{array}{l}\dfrac{\lambda'_k}{\lambda_k}\neq 0: \\ (\lambda_k, \lambda'_k\to 0)\end{array} & \text{const}\left(\dfrac{\lambda_k}{\lambda'_k}\right)^{h+1}\varphi^h & \text{const}\,\varphi^h & m_k & i\left|\dfrac{c}{\dfrac{\lambda'_k}{\lambda_k}-1}\right| \\[12pt]
\dfrac{\lambda'_k}{\lambda_k}\neq 0: & \textit{Gerade} & \text{const}\,\varphi^h & m_k & i|c| \\[12pt]
\begin{array}{l}\lambda'_k=\infty \\ \lambda_k=\lambda_l\end{array}: & \text{const}\,\varphi^h e^{\lambda_l\varphi} & \textit{Gerade} & \mathfrak{m}_l & c\lambda_l
\end{array}
$$

Es sei noch bemerkt, daß im Falle $\dfrac{\lambda'_k}{\lambda_k}=1$ die kinematische Kette ein „starres" Kettenglied enthält: Da Rast- und Gangpolbahn identisch ausfallen, wird ein „Rollen" unmöglich gemacht. Bei „beweglichen" Ketten, die uns natürlich allein interessieren, ist $\dfrac{\lambda'_k}{\lambda_k}\neq 1$ garantiert.

Der vorgegebenen endlichen kinematischen Kette werden also endlich viele komplexe Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_l, \ldots, \xi_{n_1}$ (alle reell) und $\zeta_1, \ldots, \zeta_k, \ldots, \zeta_{n_2}$ ($\operatorname{Im}\zeta_k>0$) zugeordnet, wobei der Parameter c noch als Unbestimmte anzusehen ist. Die Anzahl n_1+n_2 dieser komplexen Zahlen ist höchstens gleich der Anzahl der Kettenglieder.

Fragt man nach nichtverschwindenden Werten der Unbestimmten c, so ist die gesuchte charakteristische Funktion in der Gestalt $g(\zeta)=\overline{C}e^{\zeta}+\zeta^n+\tau_1\zeta^{n-1}+\ldots+\tau_n$ anzusetzen [3, (5)]. Die Koeffizienten $\overline{C}, \tau_1, \ldots, \tau_n$ und n sind so zu bestimmen, daß die $\xi_l, \zeta_k, \overline{\zeta}_k$ Nullstellen werden mit Vielfachheiten bzw. größer als $\mathfrak{m}_l, m_k, m_k$:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
g^{(\nu)}(\xi_l)&=0 && (\nu=0, 1, \ldots, \mathfrak{m}_l;\ l=1, \ldots, n_1)\\
g^{(\nu)}(\zeta_k)=g(\overline{\zeta}_k)&=0 && (\nu=0, 1, \ldots, m_k;\ k=1, \ldots, n_2).
\end{aligned}
$$

Dieses Gleichungssystem wird nun zur Bestimmung der Größen $\overline{C}, \tau_1, \ldots, \tau_n$ verwendet. Für hinreichend großes n ist es immer lösbar. Wir behandeln zuerst den Fall $n=n_0=\sum_{l=1}^{n_1}(\mathfrak{m}_l+1)+2\sum_{k=1}^{n_2}{}'(m_k+1)$. (6) wird folgendermaßen aufgeschrieben:

$$(7)\quad \begin{cases} -\dfrac{\overline{C}e^{\xi_l}}{\nu!}-\dbinom{n}{\nu}\xi_l^{n-\nu} \vdots= \tau_1\dbinom{n-1}{\nu}\xi_l^{n-1-\nu}+\tau_2\dbinom{n-2}{\nu}\xi_l^{n-2-\nu}+\ldots+\tau_{n-\nu} \\ \qquad\qquad \nu=0,\ldots,\mathfrak{m}_l \\ \qquad\qquad l=1,\ldots,n_1 \\ -\dfrac{\overline{C}e^{\zeta_k}}{\nu!}-\dbinom{n}{\nu}\zeta_k^{n-\nu} \vdots= \tau_1\dbinom{n-1}{\nu}\zeta_k^{n-1-\nu}+\tau_2\dbinom{n-2}{\nu}\zeta_k^{n-2-\nu}+\ldots+\tau_{n-\nu} \\ \qquad\qquad \nu=0,\ldots,m_k \\ \qquad\qquad k=1,\ldots,n_2 \\ -\dfrac{\overline{C}e^{\overline{\zeta}_k}}{\nu!}-\dbinom{n}{\nu}\overline{\zeta}_k^{n-\nu} \vdots= \tau_1\dbinom{n-1}{\nu}\overline{\zeta}_k^{n-1-\nu}+\tau_2\dbinom{n-2}{\nu}\overline{\zeta}_k^{n-2-\nu}+\ldots+\tau_{n-\nu} \\ \qquad\qquad \nu=0,\ldots,m_k \\ \qquad\qquad k=1,\ldots,n_2 \end{cases}$$

In diesem Gleichungssystem denke man sich nach (4), (5) die $\xi_l, \zeta_k, \overline{\zeta}_k$ durch Wahl von $c(\neq 0)$ fixiert und $\overline{C}$ als reellen Parameter. Die Unbekannten $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind dann immer bestimmbar, da die Determinante des Systems für $c\neq 0$ nicht verschwindet. Wir bemerken dazu, daß die komplexen Zahlen $\xi_l, \zeta_k, \overline{\zeta}_k$ ($l=1, \ldots, n_1$; $k=1, \ldots, n_2$) paarweise voneinander verschieden sind, und verweisen auf [2]. Die $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind eindeutig bestimmbar und deshalb reell, denn mit den $\tau_1, \ldots, \tau_n$ befriedigen auch die konjugiert komplexen $\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n$ das Gleichungssystem (7). Da der Parameter c ($c\neq 0$) bereits fixiert ist, sind die elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ der $\operatorname{ctg}\beta_j$ ($j=1, \ldots, n$) wegen $\tau_i=c^i\sigma_i$ ($i=1, \ldots, n$) durch die $\tau_1, \ldots, \tau_n$ mitbestimmt [3, (4′)]. Die σ_i bestimmen über die Größen $\operatorname{ctg}\beta_j$ ($j=1, \ldots, n$) die Winkel β_j bis auf ihre Reihenfolge und Vielfache von π eindeutig. Wegen der Realität der σ_i können die Winkel β_j so ausgewählt werden, daß die nicht reellen der β_j paarweise konjugiert komplex ausfallen. Schließlich wird S aus $\overline{C}=-\dfrac{c^n\cdot S}{\prod_{j=1}^{n}\sin\beta_j}$ eindeutig berechnet ([3, (4′)]). Zu diesem Vorgehen ist allerdings zu bemerken, daß es nur dann möglich ist, wenn sich alle $\operatorname{ctg}\beta_j$ von $\pm i$ verschieden ergeben; $\operatorname{ctg}\beta_j=\pm i$ kann man aber durch die freie Wahl der Parameter c, $\overline{C}$ vermeiden. Wird $\overline{C}=0$ gesetzt, so folgt $S=0$ als Bedingung dafür, daß die Evolutoide $K_{\beta_1\ldots\beta_n}$ zu einem Punkt entartet.

In dem hier diskutierten Fall $n=n_0$ sind also bei der Bestimmung der geometrischen Größen $c, S; \beta_1, \ldots, \beta_n$ zwei freie Parameter vorhanden. Durch folgendes Schema wird die Reihenfolge der Berechnung nochmals verdeutlicht:

$$c\neq 0, \quad \overline{C}\to\tau_i\to\sigma_i\to\operatorname{ctg}\beta_j\to S \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

Setzt man $n=n_0+r$, so sind entsprechend $2+r$ Parameter frei wählbar. Die Bestimmung der $c, S, \beta_1, \ldots, \beta_n$ kann dann nach folgendem Schema geschehen:

$$c(\neq 0), \quad \overline{C}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\to\tau_{r+1}, \ldots, \tau_n\to\sigma_1, \ldots, \sigma_n\to\beta_j\to S.$$

Für $n = n_0 - 1$ geben wir dem Gleichungssystem folgende Form

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{e^{\xi_l}}{\nu!} \stackrel{\vdots}{\underset{\vdots}{=}} \frac{1}{\overline{C}}\binom{n}{\nu}\xi_l^{n-\nu}+\frac{\tau_1}{\overline{C}}\binom{n-1}{\nu}\xi_l^{n-1-\nu}+\ldots+\frac{\tau_{n-\nu}}{\overline{C}}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu=0,\ldots,\mathfrak{m}_l,\quad l=1,\ldots,n_1; \\
&-\frac{e^{\zeta_k}}{\nu!} \stackrel{\vdots}{\underset{\vdots}{=}} \frac{1}{\overline{C}}\binom{n}{\nu}\zeta_k^{n-\nu}+\frac{\tau_1}{\overline{C}}\binom{n-1}{\nu}\zeta_k^{n-1-\nu}+\ldots+\frac{\tau_{n-\nu}}{\overline{C}}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu=0,\ldots,m_k,\quad k=1,\ldots,n_2; \\
&-\frac{e^{\bar\zeta_k}}{\nu!} \stackrel{\vdots}{\underset{\vdots}{=}} \frac{1}{\overline{C}}\binom{n}{\nu}\bar\zeta_k^{n-\nu}+\frac{\tau_1}{\overline{C}}\binom{n-1}{\nu}\bar\zeta_k^{n-1-\nu}+\ldots+\frac{\tau_{n-\nu}}{\overline{C}}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu=0,\ldots,m_k,\quad k=1,\ldots,n_2.
\end{aligned}
\right.
$$

Nach Wahl eines $c(\neq 0)$ sind die Quotienten $\frac{1}{\overline{C}}, \frac{\tau_1}{\overline{C}}, \ldots, \frac{\tau_n}{\overline{C}}$ eindeutig zu berechnen. Der für unsere Zwecke nicht brauchbare Fall $\frac{1}{\overline{C}} = 0$ ist als Ausnahmeerscheinung anzusehen, denn $\frac{1}{\overline{C}}$ kann als analytische Funktion von c nur in diskreten Werten verschwinden. Für solche c aber, die $\frac{1}{\overline{C}} \neq 0$ zur Folge haben, ergibt sich hier das Schema:

$$
c \to \frac{1}{\overline{C}}(\neq 0),\ \frac{\tau_1}{\overline{C}}, \ldots, \frac{\tau_n}{\overline{C}} \to \tau_1, \ldots, \tau_n \to \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \beta_1, \ldots, \beta_n \to S.
$$

Wir kommen schließlich zu dem Fall $n = n_0 - 2$. Das homogene Gleichungssystem

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&0 \stackrel{\vdots}{\underset{\vdots}{=}} \eta_1\frac{e^{\xi_l}}{\nu!}+\eta_2\binom{n}{\nu}\xi_l^{n-\nu}+\ldots+\eta_{n+2-\nu}, && \nu=0,\ldots,\mathfrak{m}_l,\ l=1,\ldots,n_1; \\
&0 \stackrel{\vdots}{\underset{\vdots}{=}} \eta_1\frac{e^{\zeta_k}}{\nu!}+\eta_2\binom{n}{\nu}\zeta_k^{n-\nu}+\ldots+\eta_{n+2-\nu}, && \nu=0,\ldots,m_k,\ k=1,\ldots,n_2; \\
&0 \stackrel{\vdots}{\underset{\vdots}{=}} \eta_1\frac{e^{\bar\zeta_k}}{\nu!}+\eta_2\binom{n}{\nu}\bar\zeta_k^{n-\nu}+\ldots+\eta_{n+2-\nu}, && \nu=0,\ldots,m_k,\ k=1,\ldots,n_2,
\end{aligned}
\right.
$$

ist nichttrivial lösbar, wenn seine Determinante verschwindet, also gerade dann, wenn im Falle $n = n_0 - 1$ (Gleichungssystem (8)) die Lösung $\left(0, \frac{\tau_1}{\overline{C}}, \ldots, \frac{\tau_n}{\overline{C}}\right)$ zur

Bestimmung der c, S, β_j nicht brauchbar ist. Für ein gewisses $c_0 \neq 0$ möge also die Determinante von (9) gleich Null sein. Die Komponenten $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{n+2}$ eines nichttrivialen Lösungsvektors $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+2})$ können nicht alle verschwinden. Setzen wir dann

$$\eta_1 = \bar{C}, \eta_r = 1, \eta_{r+1} = \tau_1, \eta_{r+2} = \tau_2, \ldots, \eta_{n+2} = \tau_{n^*}, \text{ wobei } \eta_2 = \eta_3 = \ldots = \eta_{r-1} = 0$$

sich ergeben haben möge, so besteht folgendes Gleichungssystem

$$(10) \qquad \begin{cases} 0 = \bar{C}\dfrac{e^{\xi_l}}{\nu!} + \dbinom{n^*}{\nu}\xi_l^{n^*-\nu} + \tau_1\dbinom{n^*-1}{\nu}\xi_l^{n^*-\nu-1} + \ldots + \tau_{n^*-\nu} \\ \qquad\qquad \nu = 0, \ldots, \mathfrak{m}_l \\ \qquad\qquad l = 1, \ldots, n_1 \\ 0 = \bar{C}\dfrac{e^{\zeta_k}}{\nu!} + \dbinom{n^*}{\nu}\zeta_k^{n^*-\nu} + \tau_1\dbinom{n^*-1}{\nu}\zeta_k^{n^*-\nu-1} + \ldots + \tau_{n^*-\nu} \\ \qquad\qquad \nu = 0, \ldots, m_k \\ \qquad\qquad k = 1, \ldots, n_2 \\ 0 = \bar{C}\dfrac{e^{\bar{\zeta}_k}}{\nu!} + \dbinom{n^*}{\nu}\bar{\zeta}_k^{n^*-\nu} + \tau_1\dbinom{n^*-1}{\nu}\bar{\zeta}_k^{n^*-\nu-1} + \ldots + \tau_{n^*-\nu} \\ \qquad\qquad \nu = 0, \ldots, m_k \\ \qquad\qquad k = 1, \ldots, n_2 \end{cases}$$

mit $n^* = n + 2 - r$ $(2 \leqq r \leqq n+2)$. Man überlegt sich leicht, daß für n^* die Abschätzung $n^* \geqq \sum_{l=1}^{n_1} \mathfrak{m}_l + 2\sum_{k=1}^{n_2} m_k$ gilt.

In dem Falle, daß die Wurzeln ζ_l und ζ_k alle einfach sind, d. h. für $\mathfrak{m}_l = m_k = 0$ $(l = 1, \ldots, n_1; k = 1, \ldots, n_2)$, ist es durchaus denkbar, daß $n^* = 0$ wird. Auf diesen Sonderfall stößt man beim Studium von Kurven K_0, die direkte Ähnlichkeitstransformationen in sich gestatten $(T_a[K_0] = K_0$; siehe Abb.); dies soll aber hier nicht weiter verfolgt werden.

Für $n^* \geqq 1$ ergeben sich die geometrischen Größen $S, \beta_1, \ldots, \beta_n$ mit Hilfe von $\bar{C} = -\dfrac{S \cdot c_0^{n^*}}{\prod_{j=1}^{n^*} \sin\beta_j}$ nach dem Schema:

$$c_0 \to \bar{C}, \tau_1, \ldots, \tau_{n^*} \to \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \beta_1, \ldots, \beta_n \to S.$$

2. Das Umkehrproblem ist auch für $c = 0$ immer lösbar[1]). In (4) und der Übersicht (5) ist jetzt der dort auftretende Parameter c formal gleich Eins zu setzen. (Man vergleiche dazu die Bemerkung am Schluß von [3; II, 3]). Die zu bestimmende charakteristische Funktion $g(\zeta)$ ist das Polynom $g(\zeta) = \zeta^n + \sigma_1\zeta^{n-1} + \ldots + \sigma_{n-1}\zeta +$

[1]) $c = 0$ führt zu solchen Evolutoiden, bei denen die durch die Ähnlichkeitstranformation T_a zugeordneten Punkte von K_0 und $K_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ sich auch als zugeordnet bei der Evolutoidenkonstruktion erweisen ([3; I, 1] und Abb. 1).

$+\sigma_n - \frac{S}{C}$, $C = \prod_{\nu=1}^{n} \sin\beta_j$. Die Koeffizienten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n - \frac{S}{C} = \hat{\sigma}_n$ werden so bestimmt, daß die $\xi_l, \bar{\zeta}_k, \zeta_k$ Nullstellen mit Vielfachheiten $\geqq m_l + 1, m_k + 1, m_k + 1$ werden. Danach wird σ_n willkürlich gewählt, und die Größen $S, \beta_1, \ldots, \beta_n$ können nach folgendem Schema berechnet werden:

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \beta_1, \ldots, \beta_n \to S\left(\text{nach } \sigma_n - \frac{S}{C} = \hat{\sigma}_n\right).$$

Wenn $\sigma_n = \hat{\sigma}_n$ gesetzt wird, folgt $S = 0$ als Bedingung dafür, daß $K_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ zu einem Punkt entartet. Als einfaches Beispiel dazu geben wir für die Radlinien K_0 (Epi- und Hypozykloiden) die Winkel β_1, β_2 an, für die $K_{\beta_1\beta_2}$ ein Punkt wird. Ist q das (vorzeichenbehaftete) Verhältnis des Radius des Rollkreises zum Radius des Festkreises, so sind nach (5) für die Wurzeln des zu bestimmenden charakteristischen Polynoms die Werte $i\left|\frac{1}{q-1}\right|, -i\left|\frac{1}{q-1}\right|$ anzusetzen. Aus $\zeta^2 = \frac{1}{(q-1)^2} = (\zeta + \operatorname{ctg}\beta_1)(\zeta + \operatorname{ctg}\beta_2)$ folgt wegen $\operatorname{ctg}\beta_1 = \pm i \frac{1}{q-1}$, $\operatorname{ctg}\beta_2 = \mp i \frac{1}{q-1}$ für die Winkel β_1, β_2

$$\beta_1 \equiv \underset{(-)}{+}\frac{i}{2}\log\frac{q}{2-q}\,(\pi), \quad \beta_2 \equiv \underset{(+)}{-}\frac{i}{2}\log\frac{q}{2-q}\,(\pi).$$

Für $q = \frac{1}{2}$ z. B. entsteht die Astroide, und für β_1, β_2 folgt

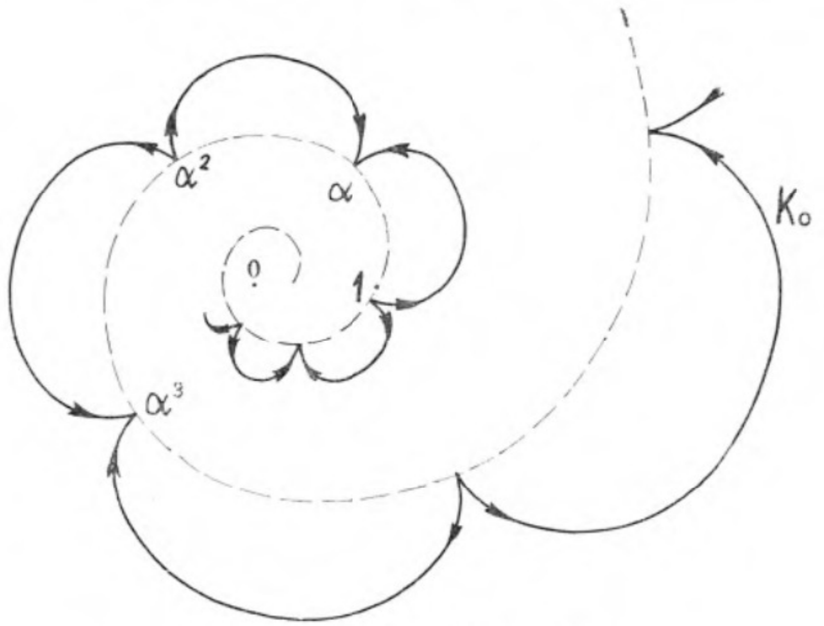
$$\beta_1 \equiv \underset{(+)}{-}\frac{i}{2}\log 3\,(\pi), \quad \beta_2 = \underset{(-)}{+}\frac{i}{2}\log 3\,(\pi).$$

Das Umkehrproblem ist als gelöst zu betrachten:

Satz. *Jede vorgegebene endliche (bewegliche) kinematische Kette erzeugt eine Hüllbahn K_0, die gewissen ihrer Evolutoiden $K_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ ähnlich ist; diese Evolutoiden sind prinzipiell alle angebbar.*

3. Betrachten wir zum Abschluß speziell solche Ketten, deren einzelne Rast- und Gangpolbahnen Kreise sind. Ein solcher Mechanismus kann in folgender Weise vereinfacht dargestellt werden. Wir ersetzen jedes Glied der Kette (Rast- und Gangpolbahn) jeweils durch einen Vektor, der den Mittelpunkt des Rastkreises (Nullpunkt der Rastebene) mit dem Mittelpunkt des Gangkreises (Nullpunkt der Gangebene) verbindet. Insgesamt wird die Kette also durch einen (endlichen) Gelenkmechanismus ersetzt, der in seinem Endpunkt die einhüllende Gerade T trägt. Der Ablauf dieses Gelenkmechanismus geht dann so vonstatten, daß die Drehwinkel der einzelnen Vektoren (Gelenkglieder) linear vom Drehwinkel φ der Gerade T abhängen. Die Drehungen werden alle relativ zu der Ebene verstanden, in der die Hüllbahn K_0 entsteht. Umgekehrt kann jeder solche Gelenkmechanismus als ein Kreisrollmechanismus verstanden werden: Die Längen der Gelenkvektoren bestimmen die Abstände der Mittelpunkte der aufeinander rollenden Kreise, und die Winkelgeschwindigkeiten der Vektoren lassen sich durch passende Radienverhältnisse der Kreispaare realisieren. Nennen wir die hier betrachteten Hüllbahnen Gelenkhüllbahnen, so gilt folgendes

Korollar. Jede Gelenkhüllbahn K_0 besitzt gewisse ihr ähnliche Evolutoiden $K_{\beta_1 \dots \beta_n}$.



Hüllbahn einer eingliedrigen Kette
(Nullstelle ζ_k einfach)

Literatur

[1] W. Wunderlich, Autoevoluten, *Elem. Math.* **17** (1962), 121–128. Nr. 6.
[2] E. Müller-Pfeiffer, Lösung der Aufgabe 380., *Jber. Deutsch. Math. Verein* **64** (1962).
[3] E. Müller-Pfeiffer, Über Kurven, die gewissen ihrer Evolutoiden direkt ähnlich sind, *Math. Nachr.* **27** (1964), 229–252.

(Eingegangen am 7. Februar 1964.)