Konstruktionen in begrenzter hyperbolischer Ebene

Von J. STROMMER (Budapest)

Herrn Professor Dr. Andreas Rapcsák zum 50. Geburtstag gewidmet

In dieser kurzen Note wollen wir nachweisen, daß *alle diejenigen Konstruktionsaufgaben der hyperbolischen Geometrie, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind, auch in begrenzter Ebene ausgeführt werden können.* Dabei handelt es sich um Aufgaben, die verlangen, aus gegebenen Punkten andere Punkte zu konstruieren. Jeder Punkt, der aus dem Zeichenblatt herausfällt, ist als Schnitt zweier Geraden (die ihrerseits durch zwei auf das Blatt fallende Geradenstücke bestimmt sind) dargestellt zu denken. Außerdem werden wir von der Freiheit der Heranziehung willkürlicher Hilfspunkte Gebrauch machen.

Wenn nämlich irgend zwei zueinander parallele Gerade a, b vorgelegt sind und wir von irgend einem Punkte A der Geraden a das Lot AB auf die Gerade b fällen, so kann die projektive Ebene, die in bekannter Weise aus der hyperbolischen durch Hinzufügung ideeller Punkte entsteht, kollinear auf sich selbst abgebildet werden, indem wir irgend einem beliebigen Punkte P den Fußpunkt des von ihm aus auf diejenige Gerade a' gefällten Lotes zuordnen, welche die Verbindungsgerade AP in A unter demselben Winkel und in demselben Sinne wie das Lot AB die Gerade a in A schneidet. Dabei fallen genau die Punkte, die irgend einem eigentlichen Punkte entsprechen, ins Innere des Kreises um A mit dem Halbmesser AB, und zwei Geraden, die irgend zwei Parallelen entsprechen, schneiden sich in einem Punkte dieses Kreises.[1])

Wir können nunmehr auf dem Zeichenblatt zwei Punkte A und B immer derart wählen, daß jeder Punkt des Kreises um A mit dem Halbmesser AB auf das Blatt fällt, sodann auf der Verbindungsgeraden AB in B die Senkrechte errichten und zu dieser von A aus eine parallele Halbgerade ziehen, welche den Kreis um A in einem Punkte C schneidet, indem wir die von F. ENGEL angegebene Parallelenkonstruktion[2]) benutzen. Um nun den Bildpunkt P' zu einem beliebigen (zugänglichen) Punkte P zu finden, ziehen wir von A aus die Halbgerade durch P und tragen vom Schnittpunkte D dieser Linie mit dem Kreise aus die Sehne $DE = BC$ ab, so daß AP die Gerade AE unter demselben Winkel und in demselben Sinne wie die Gerade AC das Lot AB schneidet. Von den beiden Punkten A und E betrachten wir denjenigen Punkt, etwa A, der näher an P liegt. Dann beschreiben wir um P den Bogen mit

[1]) Vgl. J. HJELMSLEV, Neue Begründung der ebenen Geometrie, *Math. Ann.*, **64** (1907), 449—474; insbesondere § 4, 464—466.

[2]) Vgl. z. B. H. LIEBMANN, Nichteuklidische Geometrie, 3. Aufl., *Berlin—Leipzig*, 1923, S. 35.

dem Halbmesser AP; er schneidet AE zum zweitenmal in einem Punkte F. Um A und F schlagen wir je einen Bogen mit dem Halbmesser AF; sie schneiden einander in den Punkten G und H, die ins Innere des Kreises fallen. Verbinden wir G und H, so ist der Schnittpunkt P' dieser Linie mit AE der verlangte Bildpunkt.

Somit können wir die zu den gegebenen (zugänglichen oder unzugänglichen) Punkten gehörigen Bildpunkte bestimmen. Sodann können wir aus den Bildpunkten der gegebenen Punkte auch diejenigen Punkte bestimmen, die die Bildpunkte der gesuchten Punkte darstellen, und zwar mit dem Lineal allein, da nach der erwähnten Tatsache die Bildgeraden der beiden Parallelen durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden mittels Lineal gezeichnet werden können. Es können aber alle diejenigen Konstruktionsaufgaben, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind, durch bloßes Ziehen von Parallelen und Verbinden von Punkten ausgeführt werden.[3]) Dabei fallen alle benötigten Schnittpunkte ins Innere des Kreises um A. Da außerdem auch die Übergangskonstruktion von dem irgend einem zugänglichen Punkte P zugeordneten Bildpunkt P' zu P selbst auf dem Zeichenblatt ausgeführt werden kann und durch jeden beliebigen Punkt der Ebene verschiedene Geraden von der Art sich ziehen lassen, daß ein Stück davon auf das Blatt fällt, haben wir unsere Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 2. März 1964.)

[3]) Vgl. z. B. J. STROMMER, Konstruktionen mit dem Parallellineal in der hyperbolischen Ebene, *J. reine angew. Math.*, **211** (1962), 65–69. — Hier ist der Hinweis in Fußnote[9]) auf Seite 69 durch die Seitenzahlen 351–358 zu ergänzen.