Hyperflächen mit Minkowskischer Maßbestimmung in Finslerräumen

Herrn Professor A. Rapcsák zum 50. Geburtstag gewidmet

Von O. VARGA (Budapest)

In dieser Arbeit untersuchen wir, unter welchen Bedingungen eine Hyperfläche des Finslerschen Raumes eine Minkowskische Maßbestimmung besitzt.

Auf einer Hyperfläche des Finslerraumes gibt es im allgemeinen zwei Übertragungen. Es stellt sich nun heraus, daß die Übereinstimmung beider Übertragungen eine notwendige Bedingung dafür ist, daß die Maßbestimmung eine Minkowskische wird (Satz 1). Eine notwendige — und zugleich hinrechende — Bedingung, die Satz 2. beinhaltet, besteht darin, daß ein gewisser — von uns als Minkowskischer bezeichneter — Vektor, längs der Hyperfläche, zum Normalvektor proportional ist.

In Riemannschen Räumen gilt folgendes:[1]) Existiert zu jeder orientierten n-Stellung genau eine Hyperfläche mit euklidischer Metrik, dann ist der Raum ein solcher von negativer konstanter Krümmung. Man kann sich hier die entsprechende Frage stellen. Zu jeder orientierten n-Stellung existiere genau eine Hyperfläche mit Minkowskischer Maßbestimmung. Das Resultat ist hier nicht charakteristisch für Finslerräume konstanter negativer Krümmung, sondern es zeigt sich, daß sich der Finslerraum in diesem Falle (Satz 3) auf einen Riemannschen Raum konstanter negativer Krümmung reduziert.

Zu Grunde gelegt sei ein n-dimensionaler Finslerraum F_n, in dem $(x^1, \ldots, x^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ lokale Koordinaten bedeuten.

Das Bogenelement ds im F_n sei durch

$$ds = L(x, dx) \tag{1}$$

gegeben[2]), und der metrische Fundamentaltensor durch

$$g_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\, \partial_{\dot{x}^i \dot{x}^k} L^2 \tag{2}$$

bestimmt. Der zu g_{ik} reziproke Tensor werde mit g^{ik} bezeichnet. Um die Über-

[1]) Siehe O. VARGA (2); die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

[2]) Über die hier folgende Zusammenstellung von bekannten Begriffen und Formeln, sowie die analytischen Voraussetzungen über die vorkommenden Größen, siehe man E. CARTAN [1] und H. RUND [1].

tragungsobjekte angeben zu können, bezeichnen wir die, aus den g_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole erster Art mit $[ijk]$. Ferner setzen wir

$$C_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\, \partial_{\dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k} L^2, \quad C_i{}^r{}_k = g^{rj} C_{ijk}, \tag{3}$$

$$A_{ijk} \overset{\text{def}}{=} L C_{ijk}, \quad A_i{}^r{}_k = g^{rj} A_{ijk}. \tag{4}$$

Unter Verwendung der Bogenlänge als Parameter genügen die Extremalen des Variationsproblems

$$\int L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt \to \text{Extr.}$$

den Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 0, \tag{5}$$

wobei

$$G^j = \frac{1}{4}\, g^{ij}\left[\frac{\partial(L^2)}{\partial \dot{x}^i \partial x^k}\, \dot{x}^k - \frac{\partial(L^2)}{\partial x^i}\right]. \tag{6}$$

Setzt man

$$\Gamma^*_{ijk} \overset{\text{def}}{=} [ijk] - C_{ijs} G^s_k - C_{jks} G^s_i + C_{isk} G^s_j, \tag{7}$$

$$\Gamma^*{}_i{}^j{}_k = g^{jm} \Gamma^*_{imk}$$

und

$$\Gamma_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^*_{ijk} + C_{ijs} G^s_k = [ijk] - C_{jks} G^s_i + C_{isk} G^s_i \tag{8}$$

$$\Gamma_i{}^j{}_k \equiv g^{jn} \Gamma_{imk},$$

so ist das invariante Differential eines Vektorfeldes $\xi^i(x, \dot{x})$ nach E. Cartan durch

$$D\xi^i = d\xi^i + C_j{}^i{}_k \xi^j d\dot{x}^k + \Gamma_j{}^i{}_k \xi^j dx^k \tag{9}$$

bestimmt. In dieser Form des invarianten Differentiales hat $d\dot{x}^k$ keinen vektoriellen Charakter. Eine solche Darstellung bekommt man, falls man das invariante Differential Dl^i des Einheitsvektors l^i im Linienelement $(x, \dot{x})$

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{L(x, \dot{x})}$$

einführt. Man hat dann

$$D\xi^i = d\xi^i + A_j{}^i{}_k \xi^j Dl^k + \Gamma^{*i}_{jk} \xi^j dx^k. \tag{10}$$

Die Größen $C_j{}^i{}_k, \Gamma_j{}^i{}_k$, bzw. die mit ihnen äquivalenten Größen $A_j{}^i{}_k, \Gamma^{*i}_{jk}$ sind die Zusammenhangsobjekte des F_n.

Auf einer Hyperfläche F_{n-1} des F_n, die durch eine Parameterdarstellung

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}) \tag{11}$$

gegeben sei, wobei die Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind, induziert die Metrik des umgebenden Raumes eine durch

$$ds = L(x(u),\, dx(u)) = L(u,\, du) \tag{12}$$

bestimmte Metrik. Wir wollen untersuchen, wann diese Metrik eine Minkowskische wird. Dazu muß es auf F_{n-1} ein Koordinatensystem u^α $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ von derart geben, daß

$$L(x(u),\, dx(u)) = L(du) \tag{13}$$

wird. Ein solches Koordinatensystem bezeichnen wir als ein ausgezeichnetes. Für eine Hyperfläche des F_{n-1} — die einschränkende Voraussetzung (13) werde vor der Hand nicht gestellt — kann man zwei lineare Zusammenhänge definieren. Der induzierte Zusammenhang ergibt sich, falls man das invariante Differential (9) eines Hyperflächenvektorfeldes

$$\xi^i = x^i_\alpha \xi^\alpha(u); \quad x^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \tag{14}$$

auf die entsprechenden Tangentialebenen des F_{n-1} projiziert. Wir werden den zu ihm gehörenden invarianten Differentialoperator mit $\overset{(2)}{D}$ bezeichnen.

Der zweite sogenannte innere Zusammenhang des F_{n-1} ist derjenige Cartansche Zusammenhang, der aus der, auf der rechten Seite von (12) angegebenen Grundfunktion $L(u, du)$ bildbar ist. Der zu diesem Zusammenhang gehörende invariante Differentialoperator werde mit $\overset{(1)}{D}$ bezeichnet. Diese Zusammenhangsobjekte und ihre funktionale Agbhängigkeit wurden an anderer Stelle behandelt[3]), wir geben hier nur soviel an, wie für das Verständniß des Folgenden notwendig ist.

Der Fundamentaltensor des F_{n-1} ist

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\partial_{\dot u^\alpha \dot u^\beta} L(u, \dot u) \tag{15}$$

und $\gamma^{\alpha\beta}$ sein reziproker Tensor. Es gilt außerdem

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}\, L \partial_{\dot u^\alpha \dot u^\beta \dot u^\gamma} L^2 = A_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma, \tag{16}$$

$$L C_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\beta\gamma}.$$

Ist n^i der Normalvektor eines Linienelementes der F_{n-1} und x^i_α die Tangentenvektoren des betreffenden Punktes, so sind die Ableitungsgleichungen

$$Dx^i_\alpha = \omega^\sigma_\alpha x^i_\sigma + \Theta_\alpha n^i, \tag{17a}$$

$$Dn^i = -\Theta^\sigma x^i_\sigma \quad * \quad \Theta^\alpha = \gamma^{\alpha\sigma}\Theta_\sigma. \tag{17b}$$

Die ω^σ_α und Θ_α sind Pfaffsche Formen in den du^α bzw. $d\dot u^\alpha$. Da $d\dot u^\alpha$ keinen vektoriellen Charakter besitzt, kann man statt dieser Größen das innere invariante Differential

---

3) Siehe O. VARGA [1].

$\overset{(1)}{D}l^\alpha$ des zum Linienelement $(u, \dot{u})$ gehörenden Einheitsvektors l^α einführen. Demnach erhält man:

$$\omega_\alpha^\sigma = K_{\alpha\beta}^\sigma du^\beta + C_{\alpha\beta}^\sigma d\dot{u}^\beta = K_{\alpha\beta}^{*\sigma}\, du^\beta + A_{\alpha\beta}^\sigma \overset{(1)}{D}l^\beta, \tag{18}$$

$$\Theta_\alpha = \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}\, du^\beta + \frac{1}{L}\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\, d\dot{u}^\beta = \overset{(1)}{\Theta}{}_{\alpha\beta}^{*}\, du^\beta + \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\overset{(1)}{D}l^\beta. \tag{19}$$

Beachtet man, daß sich G^α mit Hilfe der in (12) auftretenden Grundfunktion $L(u, du)$ des F_{n-1} genau so definieren läßt, wie G^i in Formel (6) mit Hilfe von $L(x, dx)$, und berücksichtigt den bekannten Ausdruck[4]) für $\overset{(1)}{D}l^\alpha$, so folgt für den Zusammenhang der Größen $K_{\alpha\beta}^{*\sigma}$ und $K_{\alpha\beta}^\sigma$, sowie der $\Theta_{\alpha\beta}^*$ und $\Theta_{\alpha\beta}$

$$K_{\alpha\beta}^{*\sigma} = K_{\alpha\beta}^\sigma - C_{\alpha\mu}^\sigma G_\beta^\mu, \tag{20a}$$

$$\overset{(1)}{\Theta}{}_{\alpha\beta}^{*} = \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{L}\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\mu} G_\beta^\mu. \tag{20b}$$

Die Größen $K_{\alpha\beta}^\sigma$, $\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ und $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ können durch die Zusammenhangsobjekte C_{jk}^i, Γ_{jk}^i bzw. ihren Äquivalenten A_{jk}^i, Γ_{jk}^{*i}, dem n-Bein x_α^i, n^i und den Größen

$$x_{\alpha\;\beta}^{\;i} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

ausgedrückt werden[5]). Die Größen $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ stellen einen Tensor dar, der durch

$$\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} = A_{jk}^i x_\alpha^j x_\beta^k n_i \tag{21}$$

bestimmt ist. Im Folgenden benötigen wir noch die aus den Tensor $\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ herleitbare Normalkrümmungsform[6])

$$O_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{L}\overset{(1)}{\Theta}{}_{\mu\alpha}^{*}\dot{u}^\mu = \frac{1}{L}\overset{(1)}{\Theta}_{\mu\alpha}\dot{u}^\mu, \tag{22}$$

sowie die Normalkrümmung

$$N \overset{\text{def}}{=} \frac{\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}{\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta} = \frac{\overset{(1)}{\Theta}{}_{\alpha\beta}^{*}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}{\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta} = \frac{1}{L^2}\overset{(1)}{\Theta}{}_{\alpha\beta}^{*}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta. \tag{23}$$

Wir führen noch das Objekt

$$K_\beta^\varrho \overset{\text{def}}{=} K_{\alpha\;\beta}^{\;\varrho}\dot{u}^\alpha \tag{24}$$

[4]) Siehe E. Cartan [1] S. 16 Formel XIII., wo statt Dl^α die Bezeichnung ω^α verwendet wird.

[5]) Siehe O. Varga [1] Formeln (17), (19) und (53).

[6]) Die im Text definierte Normalkrümmungsform O_α bzw. Normalkrümmung N unterscheidet sich von der im O. Varga [1] — Formeln (21), (22) — vorkommenden durch den Faktor $\frac{1}{L}$ bzw. $\frac{1}{L^2}$.

ein. K^{ϱ}_{β} und G^{ϱ}_{β} hängen gemäß

$$(25)\qquad G^{\varrho}_{\beta} = K^{\varrho}_{\beta} + LN\overset{(2)}{\Theta}{}^{\varrho}_{\beta}, \quad \overset{(2)}{\Theta}{}^{\varrho}_{\beta} = \gamma^{\varrho\alpha}\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$$

zusammen[7]). Zwischen den inneren und induzierten Zusammenhangsobjekten bestehen die Relationen [8])

$$(26)\qquad \Gamma^{*}_{\alpha\varrho\beta} = K^{*}_{\alpha\varrho\beta} + N\big(A_{\alpha\beta\sigma}\overset{(2)}{\Theta}{}^{\sigma}_{\varrho} - A_{\beta\varrho\sigma}\overset{(2)}{\Theta}{}^{\sigma}_{\alpha}\big) + \big(O_{\alpha}\overset{(2)}{\Theta}_{\beta\varrho} - O_{\varrho}\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\big).$$

Die F_{n-1} soll nun eine Minkowskische Mannigfaltigkeit sein, mit u^{α} als ausgezeichneten Koordinaten, so, daß für die Grundfunktion (13) besteht. Wegen der zu (6) analogen Formel für G^{α} muß

$$(27)\qquad G^{\alpha} \equiv 0$$

und daher auch

$$(28)\qquad G^{\alpha}_{\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial G^{\alpha}}{\partial \dot{u}^{\beta}} \equiv 0$$

sein. Formel (25) besagt dann, daß

$$(29)\qquad K^{\varrho}_{\beta} = -LN\overset{(2)}{\Theta}{}^{\varrho}_{\beta}$$

ein Tensor ist. Da die Differenz von G^{ϱ}_{β} und K^{ϱ}_{β} nach (26) ein Tensor ist, gehorchen beide Objekte demselben Transformationsgesetz. Nun genügen aber die G^{ϱ}_{β} bei einer Koordinatentransformation

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(\bar{u})$$
$$\bar{u}^{\alpha} = \bar{u}^{\alpha}(u)$$

dem Transformationsgesetz

$$(30)\qquad \bar{G}^{\mu}_{\lambda} = G^{\varrho}_{\beta}\frac{\partial \bar{u}^{\mu}}{\partial u^{\varrho}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial \bar{u}^{\lambda}} + \frac{\partial \bar{u}^{\mu}}{\partial u^{\varrho}}\frac{\partial^2 u^{\varrho}}{\partial \bar{u}^{\lambda}\partial \bar{u}^{\sigma}}\dot{\bar{u}}^{\sigma}.$$

Bei einer beliebigen nicht linearen Transformation der Koordinaten müßte demnach wegen (29)

$$\frac{\partial \bar{u}^{\mu}}{\partial u^{\varrho}}\frac{\partial^2 u^{\varrho}}{\partial \bar{u}^{\lambda}\partial \bar{u}^{\sigma}}\dot{\bar{u}}^{\sigma} \equiv 0$$

sein, was gegen unsere Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 u^{\varrho}}{\partial \bar{u}^{\lambda}\partial \bar{u}^{\sigma}} \equiv 0$$

nach sich ziehen würde. Die Relation (29) kann demnach nur so bestehen, daß

$$(30)\qquad K^{\varrho}_{\beta} \equiv 0$$

[7]) Siehe O. Varga [1] Formel (37), wobei der Unterschied in beiden Formeln wegen der in Fußnote [6]) erwähnten Bezeichnungsänderung entstanden ist.

[8]) Diese Formel entspricht der Formel (41) in O. Varga [1] wobei wieder wegen der Bezeichungsänderungen von O_{α} und N formale Unterschiede entstanden.

ist. Diese Relation ist aber auch hinreichend, denn nach der gleichen Schlußweise folgt wegen (25), daß dann

$$G^{\varrho}_{\beta} \equiv 0 \tag{31}$$

sein muß. Nun gilt aber

$$\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^{\varrho}} G^{\varrho}_{\alpha} = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}} = 0,$$

woraus folgt, daß L nur von $\dot{u}^{\alpha}$ abhängt. Aus (29) und (30) folgt dann, daß entweder N oder der Tensor $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ verschwinden muß. Wegen (26) und einem Lemma über Θ_{α}, welches[9]) besagt, daß das Verschwinden von N auch das von Θ_{α} nach sich zieht, muß sonach

$$\Gamma^{*}_{\alpha\varrho\beta} = K^{*}_{\alpha\varrho\beta} \tag{32}$$

sein.

Somit haben wir bewiesen den

Satz 1. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Hyperfläche F_{n-1} des Finslerraumes F_n eine Minkowskische Metrik besitzt besteht darin, daß die innere und induzierte Übertragung der Hyperfläche zusammenfallen.*

Betrachten wir eine beliebige zweimal stetigdifferenzierbare, auf die Bogenlänge als Parameter bezogene Kurve

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s).$$

Aus den Ableitungsgleichungen (17a) folgt jetzt für

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = \frac{D}{ds}(x^i_{\alpha} u'^{\alpha}); \quad u'^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds}$$

die Gleichung

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = 2G^{\sigma} x^i_{\sigma} + Nn^i + x^i_{\sigma} u''^{\sigma}.$$

Für die linke Seite dieser Gleichung kommt auf Grund der Formel (7) und der Homogenitätseigenschaft von C^i_{jk}

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \frac{du^{\alpha}}{ds} \frac{du^{\beta}}{ds} + 2G^i(x(u), \dot{x}^i(u)) = 2G^{\sigma} x^i_{\sigma} + Nn^i. \tag{$*$}$$

Beachten wir nun daß

$$G^{\beta} \equiv 0$$

notwendig und hinreichend dafür ist, daß F_{n-1} eine Minkowskische Metrik besitzt

[9]) Siehe O. VARGA [1], Lemma, sowie die daraus auf Seite 215 gezogene Folgerung.

für die u^α ausgezeichnete Koordinaten sind. Dann kommt für eine beliebige Richtung $\dot{u}^\alpha$ der F_{n-1}

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i(x(u), \dot{x}^\alpha(u)) = L^2 N n^i. \tag{33}$$

Die auf der rechten Seite von (33) auftretende Größe

$$m^i = x^i_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i(x(u), \dot{x}(u)) \tag{33a}$$

bestimmt wegen ihres Transformationsgesetzes bei Übergang zu neuen räumlichen Koordinaten einen Vektor. Wir wollen, den durch (33a) definierten Vektor als Minkowskischen Vektor bezeichnen. Wir weisen nun nach, daß umgekehrt aus (33) folgt, daß die F_{n-1} eine Minkowskische Metrik besitzt für die, die u^α ausgezeichnete Parameter sind.

Die G_α und $\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ lassen sich folgendermaßen darstellen[10])

$$2G_\alpha = g_{ik}(x^i_{\mu\sigma}\dot{u}^\mu \dot{u}^\sigma + 2G^i)x^k_\alpha; \quad G_\alpha = \gamma_{\alpha\varrho}G^\varrho, \tag{34}$$

$$\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} = (x^i_{\alpha\beta} + \Gamma^i_{jk}x^j_\alpha x^k_\beta + C^i_{jk}x^j_\alpha x^k_{\mu\beta}\dot{u}^\mu)n_i. \tag{35}$$

Aus (35) folgt durch Überschiebung mit $\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$

$$N = \frac{\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{L^2} = (x^i_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2G^i)\frac{n_i}{L^2}. \tag{36}$$

Aus den Gleichungen (33), (34) und (36) folgt sofort, daß

$$G_\alpha \equiv 0 \tag{37}$$

wird, und N die Normalkrümmung von F_{n-1} ist. Für den in Satz 1 ausgesprochenen Tatbestand ist bloß die Bedingung

$$\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{38}$$

notwendig. Wir können somit feststellen,

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Hyperfläche F_{n-1} des Finslerschen Raumes F_n eine Minkowskische Metrik besitzt, für die die u^α ausgezeichnete Parameter sind, ist das Bestehen der Gleichungen* (33), *die ausdrücken, daß der Minkowskische Vektor längs der Hyperfläche zu dem Normalvektor derselben proportional ist. Die Normalkrümmung muß dabei nicht verschwinden.*

Wir untersuchen nun ob es Finslerräume gibt, in denen zu jeder orientierten n-Stellung genau eine Hyperfläche F_{n-1} mit Minkowskischer Metrik existiert. Wegen Satz 1 muß in einem solchen Raum notwendigerweise zu jeder n-Stellung eine Hyperfläche vorhandensein, für die, die innere und induzierte Übertragung

[10]) Siehe O. VARGA [1], Formeln (19), (22) und (31), wo wieder wegen der in Fußnote [6]) gemachten Bemerkung formale Änderungen auftreten.

zusammenfallen. Nach einem an anderer Stelle bewiesenen Satz[11]) ist der Raum also entweder ein Finslerscher von konstanter Krümmung, oder ein Riemannscher. Wir untersuchen zunächst den ersten Fall. Zufolge der unbeschränkten Existenz von Hyperflächen F_{n-1}, mit Minkowskischen Metrik, können wir bei festem Linienelement $(x, \dot{x})$ die n-Stellung die die Hyperfläche berührt, beliebig um diese Richtung drehen. Dabei wird zu jeder solchen n-Stellung genau eine Hyperfläche der gewünschten Eigenschaft existieren. Daraus folgt aber wegen (33), daß der Minkowskische Vektor in $(u, \dot{u})$ identisch verschwinden muß, d. h.

$$x^i_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta + 2G^i \equiv 0. \tag{39}$$

Diese Gleichung besagt aber, da die $\dot{u}^\alpha$ nur vermöge der $\dot{x}^i$ in den G^i auftreten, daß G^i ein quadratisches Polynom in den $\dot{x}^i$ ist. (Man kann dies auch durch zweimalige partielle Ableitung der Gleichung (39) hinsichtlich den $\dot{u}^\alpha$ verifizieren.)

Somit ist

$$G^i(x, \dot{x}) \equiv G^i_{kr}(x)\dot{x}^k\dot{x}^r. \tag{39a}$$

Bildet man aus G^i_{kr} den Tensor

$$K_h{}^i{}_{jk} = \frac{\partial G^i_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_{hk}}{\partial x^j} + G^r_{hj}\, G^i_{rk} - G^r_{hk}\, G^i_{rj} \tag{40}$$

und verjüngt hinsichtlich i und h, und setzt

$$K_{hj} = K_h{}^i{}_{ji}, \tag{41}$$

so ist nach L. BERWALD[12]) für einen Finslerschen Raum konstanter Krümmung R die Gleichung

$$K_{hj} = (n-1)\, R g_{hj} \tag{42}$$

charakteristisch. Hieraus folgt, daß die g_{ik} Ortsfunktionen sind, der Raum also ein Riemannscher, und wegen der Formeln (41), (42) und den Umstand, daß (40) ein Riemannscher Krümmungstensor ist, von konstanter Krümmung ist.

Daraus folgt, daß der F_n in beiden Fällen ein Riemannscher ist. Die Hyperflächen mit Minkowskischer Metrik werden dabei zu solchen mit euklidischer Metrik. Die unbeschränkte Existenz solcher Hyperflächen hat aber zur Folge, daß der Raum ein Riemannscher von konstanter negativer Krümmung wird.[13]) Daraus folgt

Satz 3. *Existiert in einem Finslerschen Raum F_n zu jeder orientierten n-Stellung genau eine Hyperfläche mit Minkowskischer Metrik, dann reduziert sich der F_n zu einem Riemannschen Raum konstanter negativer Krümmung.*

---

[11]) Siehe O. VARGA [1] Satz 2 und Folgerungen.
[12]) Siehe L. BERWALD [1], Seite 775, insb. Formel (13, 11).
[13]) Siehe O. VARGA [2], insb. Seite 115 und Satz 1.

Literatur

L. BERWALD [1], Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math.* **48** (1947), 755—781.

E. CARTAN [1], Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Ind.* **79** (1934), 1—42.

H. RUND [1], The Differential Geometry of Finsler Spaces, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1959.

O. VARGA [1], Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 208—217.

[2], Über eine Kennzeichnung der Riemannschen Räume konstanter negativer und konstanter positiver Krümmung, *Ann. Mat. Pura Appl.* **53** (1961), 105—118.

(Eingegangen am 14. Mai 1964.)