Un nouvel invariant affine des courbes tracées sur une surface et son interprétation géométrique

A M. A. Rapcsák à l'occasion de son 50e anniversaire

Par J. MERZA (Budapest)

Considérons dans l'espace affine à trois dimensions la courbe

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2)$$

tracée sur la surface

$$x = x(u^1, u^2),$$

et fixons les points P_1 et P_2 de la courbe appartenants à des valeurs t_1 et t_2 du paramètre. Construisons au point P_1 la tangente

$$(1) \qquad e_1: \qquad x = \underset{(1)}{x} + \lambda \underset{(1)}{\dot{x}}$$

de la courbe et le plan tangent

$$(2) \qquad S_1: \qquad \left| z - \underset{(1)}{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_1, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_1 \right| = 0$$

de la surface. Pareillement, on peut écrire l'équation de la tangente e_2 au point P_2 et celle du plan tangent S_2 sous la forme

$$(3) \qquad e_2: \qquad x = \underset{(2)}{x} + \mu \underset{(2)}{\dot{x}}$$

ou

$$(4) \qquad S_2: \qquad \left| z - \underset{(2)}{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right| = 0.$$

Nous nous proposons de déterminer le point d'intersection M_1 de la droite e_1 et du plan S_2. Nous pouvons le trouver par la substitution de l'expression (1) dans l'équation (4). De cette manière nous recevons

$$\lambda^* = \frac{\left| \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right|}{\left| \underset{(1)}{\dot{x}}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right|}$$

pour la valeur du paramètre du point commun. A telle valeur λ^* l'expression (1) nous donne le point

$$m_1 = \underset{(1)}{x} + \lambda^* \underset{(1)}{\dot{x}}.$$

Nous agissons par la même voie à déterminer le point d'intersection M_2 de la droite tangente e_2 et du plan tangent S_1. En ce cas nous devons substituer la formule (3) dans l'équation (2). On peut éliminer de l'équation ainsi reçue le paramètre sous la forme

$$\mu^* = - \frac{\left| \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_1, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_1 \right|}{\left| \underset{(2)}{\dot{x}}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_1, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_1 \right|}.$$

Nous obtenons le point M_2 en écrivant μ^* à la place de μ dans l'expression (3). C'est pourquoi

$$m_2 = \underset{(2)}{x} + \mu^* \underset{(2)}{\dot{x}}.$$

En joignant les points M_1 et M_2 obtenus par la construction décrite à des points P_1 et P_2, nous avons quatre points et nous pouvons les concevoir comme les sommets d'un tétraèdre. Par l'emploi des vecteurs

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}$$

$$\overrightarrow{P_1 M_1} = \lambda^* \underset{(1)}{\dot{x}}$$

$$\overrightarrow{P_1 M_2} = \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x} + \mu^* \underset{(2)}{\dot{x}}$$

le volume du tétraèdre sera fourni par le déterminant

$$V = \frac{1}{6} \left| \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}, \lambda^* \underset{(1)}{\dot{x}}, \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x} + \mu^* \underset{(2)}{\dot{x}} \right| = \frac{\lambda^* \mu^*}{6} \left| \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}, \underset{(1)}{\dot{x}}, \underset{(2)}{\dot{x}} \right|.$$

Bornons nous dans la suite au cas de la géométrie centroaffine. Introduisons la notation

$$V_i = \frac{1}{6} \left| \underset{(i)}{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_i, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_i \right|,$$

puis soit, comme d'habitude,

$$G = G_{11} G_{22} - G_{12}^2$$

le déterminant formé des coefficients de la première forme quadratique de la surface. Nous désignerons la valeur de la quantité G au point P_1 par G_1 et au point P_2 par G_2. A l'aide de ces quantités formons de la fonction V la fonction

$$v(t_1, t_2) = |V| \frac{|G_1 \cdot G_2|^{\frac{1}{4}}}{|V_1 V_2|^{\frac{1}{2}}}$$

symétrique dans les points P_1 et P_2.

La fonction $v(t_1, t_2)$ est invariante. En effet, si l'on regarde dans l'espace l'affinité homogène

$$\bar{x}^i = a^i_k x^k, \qquad A = |a^i_k| \neq 0,$$

on peut constater que les déterminants V_1, V_2 et V se multiplient par le déterminant A et c'est pourquoi la fonction $v(t_1, t_2)$ reste invariante. Si l'on effectue la transformation

$$t = t(\tau)$$

du paramètre on voit que

$$G(t) = G(t(\tau)) = \bar{G}(\tau)$$

et

$$V_i(t) = V_i(t(\tau)) = \bar{V}_i(\tau),$$

car ces quantités ne dépendent essentiellement que des points de la surface. En ce qui concerne l'expression V, on peut constater que

$$\lambda^*(t) = \frac{\left| x(t_2) - x(t_1), \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right|}{\left| \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_1, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right|} =$$

$$= \frac{\left| \bar{x}(\tau_2) - \bar{x}(\tau_1), \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2}\right)_2 \right|}{\left| \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)_1, \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2}\right)_2 \right|} = \frac{1}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_1} \cdot \lambda^*(\tau),$$

et semblablement

$$\mu^*(t) = \frac{1}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_2} \mu^*(\tau).$$

Le troisième facteur du produit se transforme selon la formule

$$\left| \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}, \left(\frac{dx}{dt}\right)_1, \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 \right| = \left| \underset{(2)}{\bar{x}} - \underset{(1)}{\bar{x}}, \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)_1, \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)_2 \right| \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_1 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_2$$

et c'est pourquoi le produit ne change pas sa valeur.

Regardons enfin la transformation

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

des coordonnées u^α sur la surface. Il est évident qu'en ce cas les déterminants sont assujettis à la transformation

$$V_i = \bar{V}_i \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)},$$

mais la quantité $\sqrt{|G|}$ obéit aussi à la même loi de transformation

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{|\bar{G}|} \cdot \left| \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} \right| .$$

Prenons encore en considération que le déterminant V ne dépend pas du changement des coordonnées sur la surface. Sur cette base nous avons prouvé l'invariance de la fonction v.

Dans la suite nous désirons examiner le cas dans lequel le point P_2 tend vers le point P_1. A cette fin développons en série au point P_1 les fonctions figurantes dans l'expression de v.

Écrivons la quantité λ^* sous la forme

$$\lambda^* = \frac{\alpha}{\beta}$$

où

$$\alpha = \left| \underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right|$$

et

$$\beta = \left| \underset{(1)}{\dot{x}}, \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)_2, \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)_2 \right| .$$

Dans le calcul effectif nous utilisons les développements

$$\underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x} = \underset{(1)}{\dot{x}} \Delta t + \underset{(1)}{\ddot{x}} \frac{(\Delta t)^2}{2} + O(3)$$

et

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u^\alpha}\right)_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u^\alpha}\right)_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial u^\alpha}\right)_1 \Delta t + O(2).$$

Rappelons encore l'expression

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta} x \tag{5}$$

de la deuxième dérivée partielle par les vecteurs du repère mobile[1]). En substituant ces relations et en accomplissant les simplifications possibles nous avons avec les notations

$$\varphi = G_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

et

$$w = \left| \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, x \right|$$

le résultat

$$\alpha = -\frac{\varphi w (\Delta t)^2}{2} + O(3).$$

[1]) Voir: [2].

D'une manière analogue

$$\beta = -w\varphi\,\Delta t + O(2).$$

Le quotient de ces deux quantités nous donne la valeur

$$\lambda^* = \frac{\Delta t}{2} + O(2).$$

Pour plus de brièveté nous omettons le calcul de μ^* en faisant savoir seulement le résultat

$$\mu^* = -\frac{\Delta t}{2} + O(2).$$

Pour approcher le déterminant

$$|\underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x},\ \underset{(1)}{\dot{x}},\ \underset{(2)}{\dot{x}}|$$

nous devons développer le vecteur figurant dans la première colonne jusqu'aux membres du degré trois et celui, étant dans la troisième colonne jusqu'aux membres du degré deux. L'accomplissement du calcul nous donnera l'approximation

$$|\underset{(2)}{x} - \underset{(1)}{x},\ \underset{(1)}{\dot{x}},\ \underset{(2)}{\dot{x}}| = -|\underset{(1)}{\dot{x}},\ \underset{(1)}{\ddot{x}},\ \underset{(1)}{\dddot{x}}|\frac{(\Delta t)^4}{12} + O(5).$$

Pour le volume du tétraèdre nous obtiendrons l'expression

$$V = \frac{1}{6.48}|\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}|(\Delta t)^6 + O(7),$$

qui — après la normalisation — prendra la forme

$$v(t_1, \Delta t) = \frac{1}{48}\cdot\frac{\big||\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}|\big|\cdot\big(|G| + O(1)\big)^{\frac{1}{2}}}{|w| + O(1)}\cdot(\Delta t)^6 + O(7).$$

Divisons la sixième racine de cette fonction par Δt et calculons la limite

$$u(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v^{\frac{1}{6}}(t, \Delta t)}{\Delta t} = \left|\frac{\sqrt{|G|}}{48w}\cdot|\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}|\right|^{\frac{1}{6}}.$$

Il est facile à voir que la fonction $u(t)$ n'est pas invariante par rapport à la transformation du paramètre t. Par contre, il est vrai que la fonction $u(s)$ a une signification géométrique (s désigne l'arc centro-affine de la courbe). Notamment, en ce cas[2]) la relation

$$ds^3 = \frac{|\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}|}{|x, \dot{x}, \ddot{x}|}\,dt^3$$

nous donne, comme conséquence, la relation

$$|x, x', x''| = |x', x'', x'''|.$$

[2]) Voir: [3].

Par l'application de cette égalité nous pouvons écrire l'invariant

$$T = \frac{|x, \dot{x}, \ddot{x}|^2}{|\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}|}$$

de TZITZÉICA[3]) sous la forme plus simple

$$T(s) = |x', x'', x'''|.$$

A l'ensemble des courbes tracées sur la surface et passantes par le point P_1 on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 1. *La fonction $u(s)$ reçue par la construction précédente donne — sans compter un facteur dépendant du point de la surface — la sixième racine de la valeur absolue de l'invariant de Tzitzéica de la courbe, c-est-à-dire*

$$u(s) = c\big(u^1(s), u^2(s)\big)\cdot|T(s)|^{\frac{1}{6}}.$$

REMARQUE 1. Nous avons obtenu l'invariant de Tzitzéica par telle construction qui utilisait les plans tangents pris le long de la courbe plongée dans la surface. C'est intéressant car c'est le plan osculateur avec lequel cet invariant a une certaine relation[4]).

REMARQUE 2. On voit de la déduction que l'intégrale

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} u(t)\, dt$$

est un invariant de la courbe tracée sur la surface. A cause de cette propriété

$$U(t) = U(s) = \int_{s_0}^{s} u(s)\, ds$$

et sur cette base nous pouvons formuler le

Théorème 2. *La fonction $U(t)$ est l'intégrale de l'invariant de Tzitzéica multiplié par un facteur de surface. La signification géométrique de la fonction $U(t)$ se manifeste de la construction précédente.*

Passons maintenant à la géométrie affine unimodulaire. En ce cas la normalisation par $\sqrt{|G|}/w$ est inutile. On peut accomplir le calcul comme dans la géométrie centro-affine, il doit remplacer uniquement le vecteur x par le vecteur normal affine n de la surface et la formule (5) par[5])

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta}\, n.$$

Nous énonçons le résultat dans le théorème suivant.

[3]) Voir: [3].
[4]) Voir: [4].
[5]) Voir: [2].

Théorème 3. *Désignons dans la géométrie affine unimodulaire par $U^*(t)$ la fonction $U(t)$ non-normalisée. En ce cas*

$$U^*(t) = \frac{1}{\sqrt[6]{288}} \int_{t_0}^{t} |\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}|^{\frac{1}{6}} dt = c(s - s_0),$$

c'est-à-dire, la fonction $U^*(t)$ est proportionnelle à la longueur d'arc affine unimodulaire de la courbe.

Remarque. Notons que nous sommes arrivés à la longueur d'arc affine unimodulaire par l'emploi des plans tangents de la surface, bien que chez les courbes gauches on doit utiliser les plans osculateurs de certains arcs paraboliques[6]).

Bibliographie

[1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II., *Berlin*, 1923.
[2] J. Merza, L'introduction de la différentiation absolue dans l'espace affine, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 330–337.
[3] P. A. Schirokow—A. P. Schirokow, Affine Differentialgeometrie, *Leipzig*, 1962.
[4] G. Tzitzéica, Sur certaines courbes gauches. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 3. *Sér.* **28** (1911), 9–32.

(Reçu le 18. mai 1964.)

[6]) Voir: [1] et [3], p. 76, exercice 10.