О НЕКОТОРЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПОЛУПРОСТЫХ АВТОМАТОВ

И. ПЕАК (Сегед)*

В настоящей работе рассматриваются автоматы без выходных сигналов. Исследуются некоторые, так называемые ядровые расширения полупростых автоматов. Вводятся понятия эквивалентности и оптимальности относительно таких расширений, и доказывается, что автоматам, являющимся эквивалентными расширениями некоторого полупростого автомата, принадлежат изоморфные между собой полугруппы. Далее, дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторое ядровое расширение такого автомата было оптимальным. Что касается терминологии этой статьи, мы ссылаемся на работы В. М. Глушков [1] и И. Пеак [2].

Пусть задан автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$. Возьмем следующее известное расширение функции переходов δ: для каждого $a(\in\mathfrak{A})$ и $p=x_1x_2\ldots x_k(\in F(\mathfrak{X}))$[1]) мы полагаем $\delta(a, p)=a_1a_2\ldots a_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k\in\mathfrak{A}$ и $a_1=\delta(a_1, x_1), a_2=\delta(a_1, x_2), \ldots, a_k=\delta(a_{k-1}, x_k)$[2]). Таким образом, каждое состояние $a(\in)\mathfrak{A}$ автомата A индуцирует некоторое отображение

$$\varphi_a^\delta(p)\,(=\delta(a,p)) \qquad (p\in F(\mathfrak{X}))$$

свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ в свободную полугруппу $F(\mathfrak{A})$. Отображение φ_a^δ мы назовем отображением, индуцируемым состоянием $a(\in\mathfrak{A})$ в автомате A. Состояния a и a' того же самого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ называются эквивалентными, если они индуцируют одно и то же отображение в A, т. е.

$$\underset{p\in F(\mathfrak{X})}{\forall} p\,[\varphi_a^\delta(p)=\varphi_{a'}^\delta(p)].$$

Упоминаем теперь, как определяются (первое) ядро автомата и полупростой автомат. Для произвольного автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ через $K(A)$ обозначается ядро автомата A, т. е. $\mathfrak{A}$-подавтомат автомата A, множеством состояний которого является множество $\mathfrak{A}\mathfrak{X}\,(\subseteqq\mathfrak{A})$ всех состояний $a(\in\mathfrak{A})$ автомата A, для которых найдутся $a_1(\in\mathfrak{X})$ и $x(\in\mathfrak{A})$, таковы, что имеет место $a=\delta(a_1, x)$. Автомат, совпадающий со своим ядром, называется полупростым автоматом.

* I. Peák (Szeged)

[1]) Здесь, и везде в этой статье, через $F(\mathfrak{X})$ и $F(\mathfrak{A})$ мы обозначаем свободные полугруппы без единицы в алфавитах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{A}$, соответственно.

[2]) В дальнейшем мы пользуемся еще следующим обозначением: в случае $\delta(a, p)=a_1a_2\ldots a_k$, последнее состояние a_k мы условимся обозначать через $(ap)_\delta$.

Пусть задан полупростой автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ и возьмем произвольное непустое множество $\mathfrak{B}$, пересечение которого с множеством $\mathfrak{A}$ является пустым. Автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}=(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \delta')$ называется *ядровым расширением* заданного полупростого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ *при множестве* $\mathfrak{B}$, если автомат A является $\mathfrak{A}$-подавтоматом автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и для ядра автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ имеет место $K(A_{\mathfrak{B}}^{\delta'})=A$.

Фиксируем теперь некоторый полупростой автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ и непустое множество $\mathfrak{B}$, пересечение которого с $\mathfrak{A}$ является пустым, и рассмотрим все возможные ядровые расширения автомата A при множестве $\mathfrak{B}$. Два таких расширения $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ мы назовем *эквивалентными*, если для каждого $s'(\in\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})$ найдется $s''(\in\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})$, таково, что имеет место

$$\underset{p\in F(\mathfrak{X})}{\forall} p[\varphi_{s'}^{\delta'}(p)=\varphi_{s''}^{\delta''}(p)],$$

и наоборот.

При заданном автомате A и фиксированном множестве $\mathfrak{B}$ из всех ядровых расширений автомата A при множестве $\mathfrak{B}$ мы выделяем некоторые расширения, являющиеся с некоторой точки зрения наилучшими. Именно, ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ называется *оптимальным*, если оно является автоматом, не имеющим двух различных эквивалентных между собой состояний, по крайней мере одно из которых содержится в множестве $\mathfrak{B}$.

Как в статье [2], так и здесь, через $S(A)$ обозначается полугруппа, принадлежащая автомату A. Имеет место следующее предложение:

Теорема 1. *Полугруппы, принадлежащие автоматам, являющимся эквивалентными между собой ядровыми расширениями некоторого полупростого автомата, являются изоморфными.*

Доказательство. Пусть заданы полупростой автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ и некоторое непустое множество $\mathfrak{B}$, пересечение которого с множеством $\mathfrak{A}$ является пустым, и возьмем два эквивалентных между собой расширения $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ автомата A. Нам нужно доказать, что тогда имеет место $S(A_{\mathfrak{B}}^{\delta'})\approx S(A_{\mathfrak{B}}^{\delta''})$. Для этой цели достаточно показать, что соотношения конгруэнтности $\varrho'=\varrho(A_{\mathfrak{B}}^{\delta'})$ и $\varrho''=\varrho(A_{\mathfrak{B}}^{\delta''})$ в свободной полугруппе $F(\mathfrak{X})$, принадлежащие автоматам $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$, соответственно, совпадают.

По определению ϱ' для каждого $p, q(\in F(\mathfrak{X}))$ мы имеем

$$p\equiv q(\varrho')\Leftrightarrow \underset{s'\in\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}}{\forall} s'[(s'p)_{\delta'}=(s'q)_{\delta'}]. \tag{1}$$

Пусть s'' есть произвольное состояние из $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$. При условиях теоремы найдется состояние s' из $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$, такое, что для s' и s'' имеет место:

$$\underset{r\in F(\mathfrak{X})}{\forall} r[\delta'(s', r)=\delta''(s'', r)]. \tag{2}$$

Из этого следует

$$\underset{r\in F(\mathfrak{X})}{\forall} r[(s'r)_{\delta'}=(s''r)_{\delta''}].$$

В частности, мы получаем,

$$(s'p)_{\delta'} = (s''p)_{\delta''}, \quad (s'q)_{\delta'} = (s''q)_{\delta''}.$$

И так из правой стороны (1) следует

$$(s''p)_{\delta''} = (s''q)_{\delta''}. \tag{3}$$

Так как $s''(\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$ мы выбрали произвольно, то из правой стороны (1) из-за (3) следует

$$\underset{s'' \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}}{\forall} s''[(s''p)_{\delta''} = (s''q)_{\delta''}],$$

т. е. $p \equiv q(\varrho'')$. Итак, мы доказали заключение

$$p \equiv q(\varrho') \Rightarrow p \equiv q(\varrho'') \qquad (p, q \in F(\mathfrak{X})).$$

Таким же образом получается и обратное заключение

$$p \equiv q(\varrho'') \Rightarrow p \equiv q(\varrho') \qquad (p, q \in F(\mathfrak{X})).$$

А это именно означает совпадение отношений конгруэнтности ϱ' и ϱ'', принадлежащих автоматам $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$, соответственно. Теорема доказана.

В дальнейшем мы дадим необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторое ядровое расширение заданного полупростого автомата было оптимальным.

Пусть задан произвольный автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, имеющий некоторый $\mathfrak{A}$-подавтомат $A_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}, \delta_1)$. Однозначное отображение η множества $\mathfrak{A}$ в себя называется относительным $\mathfrak{A}$-эндоморфизмом автомата A над подавтоматом A_1, если для всякой пары $a(\in \mathfrak{A}), x(\in \mathfrak{X})$ имеет место

$$\eta(\delta(a, x)) = \delta(\eta(a), x) \tag{4}$$

и при этом состояния из $\mathfrak{A}_1$ при отображении η являются недподвижными. Относительный $\mathfrak{A}$-эндоморфизм автомата A над подавтоматом A_1 называется собственным, если он не является тождественным отображением множества $\mathfrak{A}$ на себя.

Мы докажем следующее предложение:

Теорема 2. *Ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата A при множестве $\mathfrak{B}$ является оптимальным тогда и только тогда, если оно не имеет собственного относительного $\mathfrak{A}$-эндоморфизма над A.*

Доказательство. Для доказательства необходимости мы предполагаем, что ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ является оптимальным, и при этом автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ обладает собственным относительным $\mathfrak{A}$-эндоморфизмом η над подавтоматом A. Мы придем к противоречию. Из предыдущих предположений следует существование состояния $s(\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$ автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$, для которого $s \neq \eta(s)$ и поэтому s не содержится в множестве $\mathfrak{A}$. Для того, чтобы получить противоречие, достаточно показать, что состояния s и $\eta(s)$ автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ являются эквивалентными между собой. Пусть $p = x_1 x_2 \ldots x_k$ есть произвольное слово из $F(\mathfrak{X})$ и пусть

$$\varphi_s^{\delta'}(p) = s_1 s_2 \ldots s_k, \quad \varphi_{\eta(s)}^{\delta'}(p) = t_1 t_2 \ldots t_k \qquad (s_i, t_i \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B};\ i = 1, \ldots, k).$$

Так как при отображении η все состояния из множества $\mathfrak{A}$ являются неподвижными, то для всех $s(\in\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})$ и $x(\in\mathfrak{X})$ имеет место $\delta'(\eta(s), x) = \delta'(s, x)$. Отсюда мы получаем, что $s_1=\delta'(s, x_1)=\delta'(\eta(s), x_1)=t_1$, $s_2=\delta'(s_1, x_2)=$ $=\delta'(t_1, x_2)=t_2, \ldots, s_k=\delta'(s_{k-1}, x_k)=t_k$, т. е. для произвольного $p(\in F(\mathfrak{X}))$ имеет место равенство $\varphi_s^{\delta'}(p)=\varphi_{\eta(s)}^{\delta'}(p)$. А это именно означает, что (различные друг от друга) состояния s и $\eta(s)$ автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ являются эквивалентными. Так как при этом $s\notin\mathfrak{A}$, то это противоречит тому, что автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ был оптимальным ядровым расширением заданного полупростого автомата A при множестве $\mathfrak{B}$.

Пусть наоборот, предполагается, что ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ не имеет собственного относительного $\mathfrak{A}$-эндоморфизма над A. Покажем, что тогда $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ является оптимальным расширением. В противоположном случае нашлись бы различные, эквивалентные между собой состояния s_1 и s_2 автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$, по крайней мере одно из которых не содержалось бы в множестве $\mathfrak{A}$. Пусть например $s_1\notin\mathfrak{A}$. В дальнейшем мы фиксируем эти состояния s_1 и s_2 и конструируем некоторый собственный относительный $\mathfrak{A}$-эндоморфизм автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ над A. Возьмем следующее отображение η множества $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ в себя:

$$\eta(s)=\begin{cases} s & \text{если} \quad s\neq s_1 \\ s_2 & \text{если} \quad s=s_1 \end{cases} \qquad (s\in\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}).$$

Мы покажем, что η удовлетворяет условию (4). Пусть $s\neq s_1$. Тогда из $\delta'(s, x)\in\mathfrak{A}$ и $s_1\notin\mathfrak{A}$ следует $\delta'(s, x)\neq s_1$ и мы имеем

$$\eta(\delta'(s, x)) = \delta'(s, x) = \delta'(\eta(s), x).$$

В случае $s=s_1$ из $\delta'(s_1, x)\neq s_1$ для эквивалентных между собой состояний s_1 и s_2 получается

$$\eta(\delta'(s_1, x)) = \delta'(s_1, x) = \delta'(s_2, x) = \delta'(\eta(s_1), x).$$

В обоих случаях мы получили, что для η имеет место (4). Осталось еще показать, что при η все состояния из $\mathfrak{A}$ являются неподвижными. А это следует из того, что при η подвигается только одинственное состояние s_1 и $s_1\notin\mathfrak{A}$. Итак, мы построили относительный $\mathfrak{A}$-эндоморфизм автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta}$ над A, не являющийся тождественным отображением множества $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ на себя. А это противоречит условиям. Тем самым теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь все ядровые расширения полупростого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при некотором множестве $\mathfrak{B}$. Мы говорим, что автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ явяется относительным $\mathfrak{A}$-гомоморфным образом автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$, если автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ обладает $\mathfrak{A}$-гомоморфным отображением на автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$, при котором все состояния из $\mathfrak{A}$ являются неподвижными.

Легко доказывается следующее утверждение:

Теорема 3. *Оптимальное ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta^*}$ полупростого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ является относительным $\mathfrak{A}$-гомоморфным образом любого из эквивалентных ему ядровых расширений $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$.*

Доказательство. Пусть автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta^*}$ является оптимальным расширением полупростого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ и возьмем произвольное, эквивалентное ему расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ автомата A. Тогда, по определению эквивалентности расширений для всякого $s(\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$ существует некоторое $s^*(\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$, удовлетворяющее условию

$$\forall_{x \in \mathfrak{X}} x[\delta'(s, x) = \delta^*(s^*, x)] \tag{5}$$

и ясно, что такое s^* однозначно определено через s. Мы определим теперь следующее отображение: в случае $s \in \mathfrak{A}$ мы полагаем $\eta(s)=s$, а если $s \in \mathfrak{B}$, тогда пусть $\eta(s)=s^*$, где s^* — однозначно определенное состояние в $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, принадлежащее состоянию s и удовлетворяющее условию (5). Легко убедиться, что отображение η будет относительным $\mathfrak{A}$-гомоморфизмом автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ на автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta^*}$. Действительно, для всякой пары $s(\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$, $x(\in \mathfrak{X})$ из-за $\delta'(s, x) \in \mathfrak{A}$ мы имеем $\eta(\delta'(s, x))=\delta'(s, x)=\delta^*(s^*, x)=\delta^*(\eta(s), x)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Эквивалентные между собой оптимальные ядровые расширения некоторого полупростого автомата являются изоморфными.*

Следствие 2. *Для каждого ядрового расширения полупростого автомата существует (с точностью до изоморфизма) не более одного эквивалентного ему оптимального расширения того же самого автомата.*

Ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата A при конечном множестве $\mathfrak{B}$ называется конечным ядровым расширением автомата A.

Следствие 3. *Если по крайней мере одно из конечных эквивалентных между собой ядровых расширений $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ некоторого полупростого автомата A является оптимальным, то автоматы $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ будут изоморфными.*

Литература

[1] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи матем. наук*, **16:5 (101)** (1961), 3—62.

[2] И. Пеак, Автоматы и полугруппы I, Acta Sci. Math. **25** (1964), 193—201.

(Поступило 22. XII. 1963.)