ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

СИМЕОН ТОДОРИНОВ (Пловдив)

Обозначим через L_0 множество всех функций $f(x)$ циклически монотонных косинусого типа на сегменте [0, 1] [1].

Пусть L подмножество L_0 обладает следующим свойством: если $f(x) \in L$, то функция $f(x)+k(f)f''(x)$, где $K(f) \geqq k_1 = \dfrac{1}{q_1^2}$, тоже принадлежит множеству L.

Множество L не пусто. Обозначим через $F(\lambda, \mu; x)$ функцию

$$F(\lambda, \mu; x) = \begin{cases} \cos(\lambda x+\mu), & q \geqq \lambda \geqq 0,\ \mu \geqq 0,\ \lambda+\mu \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & , q \geqq \lambda \geqq 0,\ \mu \geqq 0,\ \lambda+\mu > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где $q = \min\left(\dfrac{\pi}{2}, q_1\right)$. Пусть $\alpha(\lambda, \mu)$ неотрицательная и неубывающая функция по переменным λ и μ в области $D\left(0 \leqq \lambda \leqq q, 0 \leqq \mu \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда каждя функция вида

$$f(x) = A(1-x) + \iint_D F(\lambda, \mu; x)\, d\alpha(\lambda, \mu) \tag{1}$$

где $A \geqq 0$, тоже принадлежит множеству L. Покажем, что и обратное предложение верно.

При доказательстве пользуемся теоремой Тагамлицкого [2]. Мы придерживаемся терминологии указанной работы.

Множество L регулярный и компактный конус относительно базе $\Phi_\nu(f)=f(\tau_\nu)$, где τ_ν являются рационалными числами, принадлежащими сегменту [0, 1] и норме $\|f\|=f(0)$.

Из определения следует, что $f(x)+kf''(x)$ и $-kf''(x)$, $k=\dfrac{1}{q^2}$, тоже принадлежат множеству L и, что равенство

$$f(x) = [f(x)+kf''(x)] + [-kf''(x)]$$

является разложением по норме.

Неразложимые векторы конуса L будут удовлетворять одно из следующих уравнений

$$f''(x)+(\lambda_1 q)^2 f(x) = 0, \quad f''(x) = 0$$

где λ_1 неотрицательное число, меньше единици.

Последнее уравнение дает нам неразложимый вектор $1-x$. Каждое решение первого уравнения можно записать в виде $p\cos(\lambda x+\mu)$, где $\lambda=\lambda_1 q$. При этом из принадлежности $p\cos(\lambda x+\mu)$ конуса L следует, что $0\leqq\lambda\leqq q$ и $0\leqq\mu\leqq\frac{\pi}{2}-\lambda$.

Обозначим через L' подмножество L, содержащее все функции вида (1). Множество L' регулярный и компактный конус относительно базе и норме в L. Из теоремы Тагамлицкого следует, что $L'=L$. Отсюда вытекает:

Теорема. *Если $f(x)$ принадлежит множеству L, то существует неотрицательная константа A и неубывающая функция $\alpha(\lambda, \mu)$ в области D, для которых выполняется равенство*

$$f(x) = A(1-x)+\iint\limits_D F(\lambda, \mu; x)\, d\alpha(\lambda, \mu)$$

для каждого $x\in[0, 1]$.

Аналогичное утверждение имеет место и при циклических монотонных функциях синусого типа.

Ряд авторов [3], [4], [5] применяли с успехом метод Тагамлицкого в теории функций.

Литература

[1] С. Н. Бернштейн, Об некоторых свойствах циклически монотонных функций, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **14** (1950), 381—404.

[2] Я. А. Тагамлицки, Върху едно обобщение на понятието неразложимост, *Годишник на Софийския университет*, **48** (1953/54), 69—85.

[3] Я. А. Тагамлицки, Допълване на конуси и приложение към проблемата за обобщение на понятието функция, **49** (1954/55), част I 34—48 и част II 41—54.

[4] Б. Сендов, Об одном классе регулярно монотонных функций, *Доклады АН СССР* **110** (1956).

[5] Т. Генчев, За неразложимите вектори на някои конуси, *Изв. на Математическия институт при БАН*, **3** (1958), кн. 1, 69—88.

(Поступило 25. I. 1964.)