Elementare Beweise zweier Sätze über Matrizenringe

Von LUDWIG STAMMLER (Halle/Saale)

Einleitung

Der folgende Satz 1 ist ein Teil der Eindeutigkeitsaussage zum WEDDERBURN—ARTINschen Struktursatz über halbeinfache Ringe.

Mit tiefergehenden Hilfsmitteln bewiesen, steht er z. B. [1] S. 25, [2] S. 188. Für sich genommen, ist er aber eine elementare Aussage, und dem entspricht es, daß der hier gegebene Beweis auch elementar ist.

Die dabei verwendeten Eigenschaften der Durchschnitte minimaler Links- und Rechtsideale gestatten ferner einen ebenfalls elementaren Beweis des folgenden Satzes 2 (I) über die Automorphismen eines vollen Matrizenringes über einem Schiefkörper. Nach diesem Satz sind durch einfaches Zusammensetzen je eines induzierten und eines inneren Automorphismus schon alle Automorphismen zu erhalten. Auch er ist bereits bekannt, siehe z. B. [1] S. 23.

Die Eindeutigkeitsaussage hierzu, Satz 2 (II), könnte neu sein; andernfalls sei ihre Anführung mit Vollständigkeitsgründen sowie damit entschuldigt, daß ihr Beweis ebenfalls kurz und elementar ist.

Bezeichnungen

Es sei K ein Schiefkörper, n eine natürliche Zahl.

Diejenige Matrix vom Typ $n \times n$, deren i, j-Element t_{ij} lautet $(t_{ij} \in K; i, j = 1, \ldots, n)$, werde mit $(t_{ij})_n$ bezeichnet. Die Menge aller dieser Matrizen bildet den vollen Matrizenring K_n. Die p, q-Matrizeneinheit ($t_{pq} = 1$, alle anderen $t_{ij} = 0$) sei E_{pq} genannt $(p, q = 1, \ldots, n)$, die Einheitsmatrix $E = \sum_{s=1}^{n} E_{ss}$. Unter den zentralen Vielfachen einer Matrix T verstehen wir die Matrizen zT, wo z im Zentrum von K liegt.

Ferner benötigen wir Zeilenvektoren $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, Spaltenvektoren $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $(a_i, b_i \in K)$ und ihr Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \sum_{s=1}^{n} a_s b_s$.

Mit J bzw. $J_{(n)}$ bezeichnen wir die volle Automorphismengruppe von K bzw. K_n. Ist $t \in K$, $T \in K_n$, $w \in J$, $\mathfrak{F} \in J_{(n)}$, so sei $w(t)$ bzw. $\mathfrak{F}(T)$ das Bild von t bzw. T bei w bzw. $\mathfrak{F}$.

Mit I bzw. $I_{(n)}$ bezeichnen wir die Gruppe (Normalteiler in J bzw. $J_{(n)}$) der inneren Automorphismen von K bzw. K_n. Wir denken uns sogleich ein Repräsentantensystem L der Klassen von J/I festgelegt.

Ist w ein Automorphismus von K, so ist durch

$$\mathfrak{w}((t_{ij})_n) = (w(t_{ij}))_n \qquad (t_{ij} \in K;\, i, j = 1, \dots, n)$$

ein Automorphismus $\mathfrak{w}$ von K_n definiert, den wir den durch w induzierten Automorphismus nennen.

Sätze

Satz 1. *Sind K, K' Schiefkörper und n, n' natürliche Zahlen so, daß $K_n \cong K'_{n'}$ gilt, so ist $n = n'$ und $K \cong K'$.*

Satz 2. (I) *Zu jedem Automorphismus $\mathfrak{F}$ von K_n gibt es einen Automorphismus w von K und eine invertierbare Matrix $M \in K_n$ so, daß für alle $T \in K_n$*

$$\mathfrak{F}(T) = M^{-1}\mathfrak{w}(T)M$$

gilt.

(II) (a) *Durch $\mathfrak{F}$ ist dabei die Restklasse von w in J/I eindeutig bestimmt.* **(b)** *Durch $\mathfrak{F}$ und die (stets erfüllbare) zusätzliche Forderung $w \in L$ ist (somit w eindeutig und) dann auch M bis auf zentrale Vielfache eindeutig bestimmt.*

Die wesentliche Aussage von Satz 2 läßt sich kurz formulieren als

Korollar. *Es gilt*

$$J/I \cong J_{(n)}/I_{(n)},$$

und zwar vermittelt das Induzieren, d. h. der Übergang von w zu $\mathfrak{w}$, einen Isomorphismus dieser beiden Gruppen.

Beweise

Satz 1. Beweis zu $n = n'$. Wir definieren in K_n eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch die Festsetzung: Für $S, T \in K_n$ sei genau dann $S \sim T$, wenn es invertierbare Matrizen $U, V \in K_n$ gibt, so daß $S = UTV$ ist. Nun gilt bekanntlich (siehe etwa [3] S. 401 ff., 407 ff., 417 ff.):

(1) Jede Matrix $T \in K_n$ kann durch Elementarumformungen (Linksmultiplikation einer Zeile oder Rechtsmultiplikation einer Spalte mit einem nichtverschwindenden Element aus K, Vertauschung oder Addition zweier paralleler Reihen) auf die Gestalt $\sum_{s=1}^{r} E_{ss}$ gebracht werden (r eine ganze Zahl, $0 \leqq r \leqq n$).

(2) Jede Elementarumformung läßt den Rang (die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren bei Linksmultiplikation mit Elementen aus K) invariant.

(3) Jede Elementarumformung kommt der Links- oder Rechtsmultiplikation mit einer geeigneten invertierbaren Matrix (Multiplikations-, Vertauschungs-, Additionsmatrix) gleich, und umgekehrt: Jede Multiplikation mit einer solchen Matrix bewirkt eine Elementarumformung.

Daraus folgt weiter:

(4) Eine Matrix aus K_n ist genau dann invertierbar, wenn sie den Rang n hat.

(5) Jede Multiplikation mit irgend einer invertierbaren Matrix läßt den Rang invariant.

(6) Zu je zwei Matrizen S, T von gleichem Rang gibt es invertierbare Matrizen U, V, so daß $S=UTV$ gilt.

Die Feststellungen (5), (6) besagen:

(7) Es gilt $S\sim T$ genau dann, wenn S und T gleichen Rang haben.

Zusammen mit (1), (2) folgt hieraus:

(8) Die Äquivalenzrelation $\sim$ teilt K_n in genau $n+1$ Klassen ein.

Nun ist die Relation $\sim$ ihrer Definition nach isomorphieinvariant. Aus (8) folgt somit $n=n'$.

Satz 1. Beweis zu $K\cong K'$. Wir betrachten ein beliebiges minimales Linksideal $\mathfrak{A}\subseteqq K_n$. Dieses enthält eine Matrix $C=(c_{ij})_n\neq 0$. Sei etwa $c_{kl}\neq 0$; wir setzen zur Vereinfachung $c_{kj}=a_j$ $(j=1,\ldots,n)$, haben also insbesondere $a_l\neq 0$. Sind dann $x_1,\ldots,x_n\in K$ beliebig, so gilt

$$(x_i a_j)_n=\sum_{s=1}^{n} x_s E_{sk} C\in\mathfrak{A}.$$

Da aber die Menge aller $(x_i a_j)_n$ $(x_i\in K)$ selbst ein von 0 verschiedenes Linksideal ist, muß sie bereits $\mathfrak{A}$ sein. Daher gilt:

(9) Zu jedem minimalen Linksideal $\mathfrak{A}\subseteqq K_n$ gibt es einen nichtverschwindenden Zeilenvektor $\mathfrak{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ so, daß $\mathfrak{A}$ die Menge aller $(x_i a_j)_n$ $(x_i\in K)$ ist.

Wir können $\mathfrak{a}$ etwa einen $\mathfrak{A}$ definierenden Zeilenvektor nennen. (Bemerkung: Falls man die aus der Theorie bekannte Existenz der minimalen Linksideale hier nicht schon mitverwenden will, entnimmt man dem Bisherigen zugleich einen Beweis für sie.) Man sieht unmittelbar:

(10) Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{A}$ definierender Zeilenvektor, so auch $z\mathfrak{a}$ $(z\in K, z\neq 0)$.

Analog gilt:

(11) Zu jedem minimalen Rechtsideal $\mathfrak{B}\subseteqq K_n$ gibt es einen nichtverschwindenden Spaltenvektor $\mathfrak{b}=(b_1,\ldots,b_n)^*$ (etwa mit $b_m\neq 0$) so, daß $\mathfrak{B}$ die Menge aller $(b_i y_j)_n$ $(y_j\in K)$ ist.

Hieraus schließen wir:

(12) Seien $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ wie bisher definiert. Dann ist $\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ die Menge aller $(b_i u a_j)_n$ $(u\in K)$.

Beweis. Daß alle $(b_i u a_j)_n\in\mathfrak{D}$ sind, ist klar. Ist umgekehrt eine Matrix $T\in\mathfrak{D}$, so hat sie sowohl die Form $(x_i a_j)_n$ als auch die Form $(b_i y_j)_n$; insbesondere gilt $x_m a_j=b_m y_j$ $(j=1,\ldots,n)$, also hat T die Form $(b_i b_m^{-1} x_m a_j)_n$, w. z. b. w.

Für die somit gewonnene Abbildung von K auf $\mathfrak{D}$ zeigen wir:

(13) Die Zuordnung $u\to(b_i u a_j)_n$ $(u\in K)$ ist eineindeutig und für die Addition operationstreu.

Beweis. Aus $(b_i u a_j)_n=(b_i v a_j)_n$ folgt insbesondere $b_m u a_l=b_m v a_l$ und hieraus $u=v$. Die übrigen Behauptungen sind evident.

Das Produkt zweier Matrizen aus $\mathfrak{D}$ ist

$$(b_i u a_j)_n(b_i v a_j)_n=(b_i u\mathfrak{a}\mathfrak{b} v a_j)_n.$$

Es gilt also $\mathfrak{D}^2=0$ oder $\mathfrak{D}^2=\mathfrak{D}$ je nachdem, ob $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ verschwindet oder nicht. Schließlich erhalten wir:

(14) Im Fall $\mathfrak{D}^2=\mathfrak{D}$ ist $\mathfrak{D}\cong K$.

BEWEIS. Nach (10) kann man $\mathfrak{a}$ durch $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}\mathfrak{a}$ ersetzen und somit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=1$ erreichen. Dann ist die Zuordnung $u\to(b_i u a_j)_n$ auch für die Multiplikation operationstreu, woraus zusammen mit (13) die Behauptung folgt.

Nun sind die Durchschnitte $\mathfrak{D}$ je eines minimalen Linksideals $\mathfrak{A}$ und eines minimalen Rechtsideals $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{D}^2=\mathfrak{D}$ ebenfalls isomorphieinvariant. Aus (14) ergibt sich somit $K\cong K'$.

Satz 2. Beweis zu (I). Für jedes $q=1,\dots,n$ sei $\mathfrak{A}_q$ das minimale Linksideal aller $\sum_{p=1}^{n} x_p E_{pq}$ $(x_p\in K)$ und $\mathfrak{B}_q$ das minimale Rechtsideal aller $\sum_{r=1}^{n} y_r E_{qr} (y_r\in K)$. Für $\mathfrak{D}_{qq}=\mathfrak{A}_q\cap\mathfrak{B}_q$ trifft dann der Fall $\mathfrak{D}_{qq}^2=\mathfrak{D}_{qq}$ zu. Daher gilt das Entsprechende für $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_{qq})$. Also können wir einen das minimale Linksideal $\mathfrak{G}_q=\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_q)$ definierenden Zeilenvektor $\mathfrak{g}_q=(g_{q1},\dots,g_{qn})$ und einen das minimale Rechtsideal $\mathfrak{H}_q=\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_q)$ definierenden Spaltenvektor $\mathfrak{h}_q=(h_{1q},\dots,h_{nq})^*$ so wählen, daß

$$\mathfrak{g}_q\mathfrak{h}_q=1 \tag{15}$$

gilt.

Für jedes $\mathfrak{D}_{pq}=\mathfrak{A}_q\cap\mathfrak{B}_p$ $(p,q=1,\dots,n)$, also $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_{pq})=\mathfrak{G}_q\cap\mathfrak{H}_p$, erhält man wegen (13) ferner nunmehr eine durch

$$\mathfrak{F}(uE_{pq})=(h_{ip}w_{pq}(u)g_{qj})_n \tag{16}$$

definierte eineindeutige und bezüglich der Addition operationstreue Abbildung

$$u\to w_{pq}(u) \qquad (u\in K)$$

von K auf sich.

Für beliebige $u,v\in K$ und $p,q,r=1,\dots,n$ gilt dann

$$\begin{aligned}(h_{ip}w_{pr}(uv)g_{rj})_n &= \mathfrak{F}(uvE_{pr}) = \mathfrak{F}(uE_{pq})\mathfrak{F}(vE_{qr})\\ &= (h_{ip}w_{pq}(u)g_{qj})_n(h_{iq}w_{qr}(v)g_{rj})_n\\ &= (h_{ip}w_{pq}(u)w_{qr}(v)g_{rj})_n\end{aligned}$$

(das Letztere wegen (15)), also, da $\mathfrak{h}_p$ und $\mathfrak{g}_r$ nicht verschwinden,

$$w_{pr}(uv)=w_{pq}(u)\,w_{qr}(v). \tag{17}$$

Insbesondere sind die w_{qq} $(q=1,\dots,n)$ Automorphismen von K (wie es nach (15), (16) und (14) auch sein muß).

Setzen wir nun noch

$$(w_{1i}(1)g_{ij})_n=M,\quad (h_{ij}w_{j1}(1))_n=M',$$

so ergibt sich für jedes $T=(t_{ij})_n\in K_n$ nach (16), (17) schließlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(T) &= \sum_{p,q=1}^{n}\mathfrak{F}(t_{pq}E_{pq})\\ &= \left(\sum_{p,q=1}^{n} h_{ip}w_{p1}(1)w_{11}(t_{pq})w_{1q}(1)g_{qj}\right)_n\\ &= M'\mathfrak{w}_{11}(T)M.\end{aligned} \tag{18}$$

Insbesondere ist $E = \mathfrak{F}(E) = M' \mathfrak{w}_{11}(E) M = M'M$, also $M' = M^{-1}$, wonach die Behauptung (I) nun aus (18) folgt.

Satz 2. Beweis zu (II). Daß M höchstens bis auf zentrale Vielfache bestimmt sein kann, ist evident, ebenso:

(19) Ist U eine skalare Matrix $U = vE$ ($v \in K$), so ist der innere Automorphismus $T \to U^{-1}TU$ von K_n zugleich ein induzierter Automorphismus, nämlich durch den inneren Automorphismus $t \to v^{-1}tv$ von K induziert.

Hieraus folgen bereits die weiteren Teilbehauptungen in (II), daß w höchstens bis auf seine Restklasse in J/I eindeutig bestimmt sein kann, und daß jeder Repräsentant in dieser Klasse anstelle von w erreicht werden kann, indem man M geeignet wählt.

Es gilt aber auch die Umkehrung von (19):

(20) Ist ein durch einen Automorphismus w von K induzierter Automorphismus $\mathfrak{w}$ zugleich auch innerer Automorphismus $T \to U^{-1}TU$ von K_n, so hat U die Form vE, und w ist der innere Automorphismus $t \to v^{-1}tv$ von K.

Beweis. Sei $U = (u_{ij})_n$. Für alle $p, q = 1, \ldots, n; p \neq q$ gilt nach Voraussetzung $U^{-1}E_{qp}U = \mathfrak{w}(E_{qp}) = E_{qp}$, also $E_{qp}U = UE_{qp}$. Vergleich der q, q-Elemente und der q, p-Elemente ergibt $u_{pq} = 0, u_{pp} = u_{qq}$, d. h. $U = u_{11}E$. Daraus erhalten wir dann durch Betrachtung der einzelnen Elemente in den Matrizengleichungen $\mathfrak{w}(T) = U^{-1}TU$ ($T \in K_n$) auch $w(t) = u_{11}^{-1}tu_{11}$ ($t \in K$), und (20) ist gezeigt.

Sei nun, um die restlichen Aussagen in (II) zu beweisen,

$$M^{-1}\mathfrak{w}(T)M = \hat{M}^{-1}\hat{\mathfrak{w}}(T)\hat{M}$$

für alle $T \in K_n$ angenommen. Daraus folgt

$$\mathfrak{w}^{-1}(M\hat{M}^{-1})^{-1}T\mathfrak{w}^{-1}(M\hat{M}^{-1}) = \mathfrak{w}^{-1}\hat{\mathfrak{w}}(T),$$

nach (20) also weiter:

(21) $w^{-1}\hat{w}$ ist ein innerer Automorphismus; w und $\hat{w}$ liegen folglich in derselben Restklasse von J/I.

Damit ist (II) (a) gezeigt.

Haben wir schließlich noch $w, \hat{w} \in L$ als Voraussetzung, so folgt $w = \hat{w}$, also

$$\mathfrak{w}^{-1}(M\hat{M}^{-1})^{-1}T\mathfrak{w}^{-1}(M\hat{M}^{-1}) = T,$$

d. h. die Vertauschbarkeit von $\mathfrak{w}^{-1}(M\hat{M}^{-1})$ mit allen $T \in K_n$. Wie im Beweis von (20) erhalten wir hieraus

$$\mathfrak{w}^{-1}(M\hat{M}^{-1}) = zE \qquad (z \in K)$$

und dann wegen der Vertauschbarkeit insbesondere mit allen skalaren Matrizen weiter, daß z sogar im Zentrum von K liegen muß. Dasselbe gilt für $w(z)$; also ist mit

$$M = \mathfrak{w}(zE)\hat{M} = w(z)\hat{M} \tag{22}$$

auch (II) (b) vollständig bewiesen.

Literatur

[1] N. JACOBSON, The theory of rings, *New York* 1943.
[2] A. G. KUROŠ, Vorlesungen über allgemeine Algebra, *Leipzig*, 1964.
[3] L. RÉDEI, Algebra, *Leipzig*, 1959.

(Eingegangen am 28. Januar 1964.)