ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

Б. М. ШАЙН (Саратов)

Мы рассматриваем полугруппы и группы, записанные мультипликативно. Если S — полугруппа, то S^0 есть полугруппа S с присоединённым нулём 0. Группа с нулём — это полугруппа S^0, где S есть группа.

Цель настоящей заметки заключается в доказательстве следующих двух теорем:

Теорема А. *Полугруппа будет коммутативной и сепаративной, т. е. удовлетворяющей условиям*

(1) $$xy = yx$$

(2) $$x^2 = xy = y^2 \to x = y$$

если и только если она изоморфна подпрямому произведению семейства абелевых групп (к которым могут быть присоединены нули).

Теорема Б. *Полугруппа является коммутативной полугруппой с сокращением, т. е. удовлетворяет условию* (1) *и*

(3) $$xz = yz \to x = y$$

если и только если она изоморфна подпрямому произведению семейства абелевых групп.

Предварительно мы докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Все подпрямо неразложимые абелевы группы периодичны.*

Доказательство. Пусть G — подпрямо неразложимая абелева группа. Тогда G содержит наименьший нетривиальный нормальный делитель G_0. Поэтому G_0 не имеет собственных подгрупп, т. е. G_0 есть циклическая группа простого порядка p. Пусть $[g]$ обозначает подгруппу G, порождённую элементом $g \in G$, отличным от единицы. Тогда $G_0 \subset [g]$, т. е. $g^n \in G_0$. Значит, g имеет конечный порядок.

(Легко доказать, что все подпрямо неразложимые абелевы группы исчерпываются группами типа p^∞ и их подгруппами [2]).

Пусть S — полугруппа, $g, \bar{g} \in S$ и $g\bar{g}g = g$, $\bar{g}g\bar{g} = \bar{g}$. Тогда $\bar{g}$ называется обобщённо обратным для g. Если для любого g существует единственный обобщённо обратный, S называется обобщённой группой (или инверсной полугруппой). Известно [1], что

Полугруппа вложима в коммутативую обобщённую группу если и только если эта полугруппа удовлетворяет условиям (1) и (2).

Коммутативная обобщённая группа, содержащая лишь один идемпотент, есть группа. Известно [2], что подпрямо неразложимая полугруппа не содержит центральных идемпотентов, отличных от нуля и единицы. Поэтому подпрямо неразложимая коммутативная обобщённая группа есть абелева группа или абелева группа с нулём. Если полугруппа S не содержит нуля, то S^0 подпрямо неразложима если и только если S подпрямо неразложима [2]. Всё это вместе с леммой 1 доказывает:

Лемма 2. *Любая коммутативная обобщённая группа изоморфна подпрямому произведению семейства периодических абелевых групп (к которым может быть присоединён нуль).*

Если полугруппа S удовлетворяет условиям (1) и (2), то она вложима в некоторую коммутативную обобщённую группу G, поэтому S вложима в прямое произведение семейства $(G_i)_{i\in I}$ абелевых групп (к которым может быть присоединён нуль). Поэтому S изоморфна подпрямому произведению семейства $(S_i)_{i\in I}$ полугрупп, где S_i есть подполугруппа G_i. Но G_i периодичны, поэтому S_i суть группы или группы с присоединённым нулём. Чтобы завершить доказательство теоремы А, достаточно отметить, что всякая абелева группа (с нулём или без него) удовлетворяет условиям (1) и (2), так что любое подпрямое произведение групп с нулём или без него удовлетворяет условиям (1) и (2).

Условия (1) и (3) необходимы и достаточны для того, чтобы полугруппа была вложима в абелеву группу. Если в доказательстве теоремы А коммутативные обобщённые группы заменить абелевыми группами, то получится доказательство теоремы Б.

Следствие 1. *Каждая подполугруппа коммутативной обобщённой группы изоморфна подпрямому произведению семейства абелевых групп (к которым может быть присоединён нуль).*

Следствие 2. *Каждая подполугруппа абелевой группы изоморфна подпрямому произведению семейства абелевых групп.*

Литература

[1] E. Hewitt — H. S. Zuckerman, The l_1-algebra of a commutative semigroup, *Trans. Amer. Math. Soc.* **83** (1956), 1, 70–97.

[2] Б. М. Шайн, О подпрямо неразложимых полугруппах, *Доклады АН СССР* **144** (1962), 5, 999—1002; поправка, там же **148** (1963), 5, 996.

(Поступило 16. V. 1964)