Über eine Verallgemeinerung des Entropiebegriffs der maßtreuen Abbildungen

Von Z. DARÓCZY (Debrecen)

Einleitung. Wie bekannt, wurde in der Ergodentheorie eine neue invariante Größe einer maßtreuen Abbildung T, die sogenannte Entropie von T, gefunden (KOLMOGOROFF [7], [8], SINAI [12]). Die grundlegenden Ergebnisse dieser Theorie sind in den Arbeiten von HALMOS ([5]) und von ROCHLIN ([11]) dargelegt. Einen eleganten Beweis der Eigenschaften der Entropie kann man in der Arbeit von BROWN ([3]) finden.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir einen allgemeineren Begriff der Entropie einer maßtreuen Abbildung angeben, und wir werden uns mit einigen Eigenschaften des neuen Entropiebegriffs beschäftigen.

1. Es sei (X, S, μ) ein Maßraum mit dem normierten Maß $\mu(X)=1$. Es bezeichne Γ die Gruppe der invertierbaren maßtreuen Abbildungen von X auf sich. Zwei Abbildungen T und S aus Γ werden wir konjugiert nennen, wenn es eine Abbildung $R\in\Gamma$ gibt derart, daß $S=RTR^{-1}$ erfüllt ist. (HALMOS [5]). Wir wollen sagen, daß eine auf Γ definierte Funktion $\varkappa(T)$ invariant ist, wenn bei beliebigen $R\in\Gamma$ die Gleichung $\varkappa(RTR^{-1})=\varkappa(T)$ gilt.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine endliche Zerlegung des Maßraumes X, d. h.

$$\mathfrak{A}=\{A_i\in S,\ A_j\cap A_i=0\ \ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i=X\},$$

und es bezeichne Z die Menge aller endlichen Zerlegungen von X. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Zerlegungen aus Z, so bezeichne $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ die Vereinigung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, d. h. $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}=\{A\cap B|\ A\in\mathfrak{A}, B\in\mathfrak{B}\}$. Ist $T\in\Gamma$ beliebig und $\mathfrak{A}\in Z$, so ist $T\mathfrak{A}=$ $=\{TA|\ A\in\mathfrak{A}\}\in Z$. Offenbar gilt $T(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})=T\mathfrak{A}\vee T\mathfrak{B}$.

2. Es sei $G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ eine Funktion, die für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ definiert ist, für welche $p_k\geqq 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{k=1}^{n} p_k=1$. Die Funktion G heißt eine Grundfunktion, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1° die Funktion $G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ist symmetrisch in $p_1, p_2, \ldots, p_n$;

2° $G(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0)=G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Nun sei $\mathfrak{A}=\{A_i|i=1, 2, \ldots, n\}$ eine Zerlegung von X aus Z. Die Entropie von $\mathfrak{A}$ bezüglich der Grundfunktion G bezeichnen wir mit $H_G(\mathfrak{A})$:

$$H_G(\mathfrak{A})=G[\mu(A_1), \mu(A_2), \ldots, \mu(A_n)]. \tag{1}$$

Beispiel 1. Es sei

$$\varphi(t)=\begin{cases} -t\log t & \text{für} \quad t\in(0,1] \\ 0 & \text{für} \quad t=0. \end{cases}$$

Die mit der Grundfunktion

$$G_1(p_1, p_2, \ldots, p_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(p_i) \tag{2}$$

gebildete Entropie von $\mathfrak{A}$ wird die Shannonsche Entropie einer Zerlegung genannt. (S. [3] und die Arbeiten [1], [5], [7], [9], [10], [11].) Der Ausgangspunkt bei der Konstruktion der Entropie einer maßtreuen Abbildung war eben der Begriff der Shannonschen Entropie einer Zerlegung. (Vgl. [7], [8], [12].)

Beispiel 2. Es sei

$$G_\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n)=\frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{i=1}^{n}p_i^\alpha, \tag{3}$$

wo $\alpha>0$ und $\alpha\neq 1$ ist. Die mit dieser Grundfunktion definierte Entropie nennen wir die Rényische Entropie von $\mathfrak{A}$. (S. [9], [10], [1].)

3. Die Entropie von $T\in\Gamma$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{A}$ und der Grundfunktion G erklären wir durch die Größe

$$h_G(\mathfrak{A}, T)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i\mathfrak{A}\right). \tag{4}$$

Nun definieren wir die Entropie von T bezüglich der Grundfunktion G folgendermaßen:

$$h_G(T)=\sup_{\mathfrak{A}\in Z}h_G(\mathfrak{A}, T). \tag{5}$$

(Vgl. [12], [11], [3].)

Es gilt der folgende

Satz 1. *Die Funktion $h_G(T)$ ist eine invariante Größe einer Abbildung $T\in\Gamma$, d. h. für jedes $R\in\Gamma$ gilt*

$$h_G(RTR^{-1})=h_G(T).$$

Beweis. In der Tat gilt:

$$h_G(\mathfrak{A}, RTR^{-1})=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_G\left[\bigvee_{i=0}^{n-1}(RTR^{-1})^i\mathfrak{A}\right]=$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}RT^iR^{-1}\mathfrak{A}\right)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_G\left[\bigvee_{i=0}^{n-1}T^i(R^{-1}\mathfrak{A})\right]=h_G(R^{-1}\mathfrak{A}, T),$$

woraus folgt:

$$h_G(RTR^{-1}) = \sup_{\mathfrak{A}\in Z} h_G(\mathfrak{A}, RTR^{-1}) = \sup_{\mathfrak{A}\in Z} h_G(R^{-1}\mathfrak{A}, T) = h_G(T),$$

was zu beweisen war.

4. Die mit der Grundfunktion (2) gebildete Entropie $h_{G_1}(T)=h_1(T)$ einer maßtreuen Abbildung heißt die Shannonsche Entropie von T. Aus den informationstheoretischen Ergebnissen kann man einige grundlegende Eigenschaften der Shannonschen Entropie $h_1(T)$ erhalten, die bei der Anwendung des Entropiebegriffs in der Ergodentheorie eine wichtige Rolle spielen. Zunächst wollen wir beweisen, daß die Beziehung

$$h_1(T^k)=|k|h_1(T)$$

(k eine beliebige ganze Zahl) gilt. Sie folgt aus einer bekannten Ungleichung für die Shannonsche Entropie einer Zerlegung.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Zerlegungen von X. Man sagt dann, daß $\mathfrak{A}$ eine Unterzerlegung von $\mathfrak{B}$ ist, wenn zu jedem $A\in\mathfrak{A}$ eine Mengenfolge $B_1, \dots, B_l$ aus $\mathfrak{B}$ existiert, derart, daß $A=\bigcup_{i=1}^{l} B_i$ gilt. Man schreibt dafür $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$. Nun gilt für die Shannonsche Entropie $H_{G_1}=H_1$ die Ungleichung

$$H_1(\mathfrak{A})\leqq H_1(\mathfrak{B}),$$

wenn $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$ ist.

Wir führen jetzt den Begriff einer monotonen Grundfunktion ein. Man sagt, daß eine Grundfunktion G monoton ist, wenn aus der Beziehung $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$

$$H_G(\mathfrak{A})\leqq H_G(\mathfrak{B}) \tag{6}$$

folgt. Offenbar ist G_1 eine monotone Grundfunktion (S. [3]). Wir beweisen den folgenden

Satz 2. *Ist G eine monotone Grundfunktion, so gilt die Beziehung*

$$h_G(T^k)=|k|\,h_G(T) \tag{7}$$

für alle ganzen Zahlen k.

Beweis. Der Beweis des Satzes 2 zerfällt in mehrere aufeinanderfolgende Schritte.

a) *Ist $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$, so gilt $h_G(\mathfrak{A}, T)\leqq h_G(\mathfrak{B}, T)$.*

In der Tat folgt aus $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\mathfrak{A}\subset \bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\mathfrak{B},$$

d. h. wegen der Monotonität von G gilt $H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\mathfrak{A}\right)\leqq H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\mathfrak{B}\right)$, woraus sich die Behauptung ergibt.

b) *Es sei k eine natürliche Zahl, dann gilt $h_G(\mathfrak{A}, T^k)\leqq k h_G(\mathfrak{A}, T)$.*

Ist $\mathfrak{A}$ eine Zerlegung von X, so gilt $\mathfrak{A} \subset \bigvee_{j=0}^{k-1} T^j \mathfrak{A}$ für beliebige natürliche Zahlen k. Dann erhalten wir nach a):

$$h_G(\mathfrak{A}, T^k) \leqq h_G\left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^j \mathfrak{A}, T^k\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_G\left[\bigvee_{i=0}^{n-1} (T^k)^i \left(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^j \mathfrak{A}\right)\right] =$$

$$= k \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nk} H_G\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} T^i \mathfrak{A}\right) = k h_G(\mathfrak{A}, T),$$

was zu beweisen war.

c) *Ist k eine beliebige ganze Zahl, so gilt* $h_G(\mathfrak{A}, T^k) \leqq |k| h_G(\mathfrak{A}, T)$.

Diese Behauptung ist für positive k mit dem Ergebnis b) gleichwertig. Wir zeigen zuerst, daß die Behauptung auch für $k=0$ gilt. Da $T^\circ = I$ ist, wo mit I die indentische Abbildung bezeichnet wird, gilt $H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} I^i \mathfrak{A}\right) = H_G(\mathfrak{A})$, und folglich ist $h_G(\mathfrak{A}, I) = \lim\sup \frac{1}{n} H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} I^i \mathfrak{A}\right) = 0$. Ist $k = -1$, so erhalten wir die Beziehung

$$H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i \mathfrak{A}\right) = H_G\left(T^{n-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathfrak{A}\right) = H_G\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathfrak{A}\right)$$

und folglich ist $h_G(\mathfrak{A}, T) = h_G(\mathfrak{A}, T^{-1})$. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall $k = -l$ $(l > 0)$. Es gilt $h_G(\mathfrak{A}, T^k) = h_G(\mathfrak{A}, T^{-l}) = h_G(\mathfrak{A}, (T^l)^{-1}) = h_G(\mathfrak{A}, T^l) \leqq$ $\leqq l h_G(\mathfrak{A}, T) = |k| h_G(\mathfrak{A}, T)$ und damit ist der Beweis von c) geführt.

d) *Ist k eine natürliche Zahl, so gilt* $h_G(T^k) = k h_G(T)$.

Offenbar ist

$$\bigvee_{j=0}^{n-1} (T^k)^j \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^i \mathfrak{A}\right) = \bigvee_{i=0}^{kn-1} T^i \mathfrak{A}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{n} H_G\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} (T^k)^j \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^i \mathfrak{A}\right)\right) = k \frac{1}{kn} H_G\left(\bigvee_{i=0}^{kn-1} T^i \mathfrak{A}\right).$$

Also gilt

(8) $$k h_G(\mathfrak{A}, T) = h_G\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^i \mathfrak{A}, T^k\right) \leqq h_G(T^k).$$

Andererseits erhalten wir aus b)

(9) $$h_G(\mathfrak{A}, T^k) \leqq k h_G(\mathfrak{A}, T) \leqq k h_G(T).$$

Aus (8) bzw. (9) folgt $k h_G(T) \leqq h_G(T^k)$ bzw. $h_G(T^k) \leqq k h_G(T)$, d. h. $h_G(T^k) = k h_G(T)$, was zu beweisen war.

Endlich betrachten wir den Fall $k = -l$ $(l \geqq 0)$. Im Beweis von c) haben wir gesehen, daß $h_G(\mathfrak{A}, T) = h_G(\mathfrak{A}, T^{-1})$ gilt, und daraus folgt $h_G(T) = h_G(T^{-1})$. Im allgemeinen Fall bekommen wir (wegen d)) die Gleichung

$$h_G(T^k) = h_G(T^{-l}) = h_G((T^l)^{-1}) = h_G(T^l) = l h_G(T) = |k| h_G(T),$$

womit wir unseren Satz restlos bewiesen haben.

Der Satz 2 zeigt: *wenn eine Abbildung* $T\in\Gamma$ *eine endliche von Null verschiedene, mit einer monotonen Grundfunktion gebildete Entropie* $h_G(T)$ *besitzt, so sind die Abbildungen* T^k *und* T^j *für* $|k|\neq|j|$ *nicht konjugiert.*

5. Wir betrachten jetzt spezielle Grundfunktionen, die für die informationstheoretischen Entropiefunktionen in Frage kommen. Wir wollen zeigen, daß eine wichtige Klasse dieser Entropiefunktionen zu monotonen Grundfunktionen gehört. Die Entropiefunktion von $\mathfrak{A}$ der Ordnung (p, q) wird mit

$$H_{p,q}(\mathfrak{A}) = -\log\left[\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mu(A)^{p+q}\Big/\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mu(A)^q\right]^{\frac{1}{p}} \qquad p\neq 0 \tag{10}$$

bzw.

$$H_{0,q}(\mathfrak{A}) = \lim_{p\to 0} H_{p,q}(\mathfrak{A}) = -\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mu(A)^q\log\mu(A)\Big/\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mu(A)^q \tag{11}$$

bezeichnet, wo die Parameterwerte p und q beliebig sein können. Man kann leicht sehen, daß die Shannonsche Entropie eine solche von der Ordnung $(0, 1)$ und die Rényische Entropie eine der Ordnung $(p, 1)$ mit $p+1=\alpha>0$ $(\alpha\neq 1)$ ist. Die Entropiefunktionen (10) und (11) wurden in der Arbeit [2] eingeführt (Vgl. [4]).

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$. *Ferner sei* $p+q\geqq 1$ *und* $0<q\leqq 1$ *oder* $q\geqq 1$ *und* $0<p+q\leqq 1$. *Dann gilt die folgende Ungleichung:*

$$H_{p,q}(\mathfrak{A})\leqq H_{p,q}(\mathfrak{B}).$$

Mit anderen Worten: Ist $p+q\geqq 1$ *und* $0<q\leqq 1$ *oder* $q\geqq 1$ *und* $0<p+q\leqq 1$, *so ist die Funktion* $H_{p,q}$ *eine monotone Grundfunktion.*

Bemerkung. Man kann leicht sehen, daß die Rényische Entropie der Ordnung $\alpha>0$ ($\alpha=1$ ist die Shannonsche Entropie) eine monotone Grundfunktion ist.

Beweis. Wir führen den Beweis des Satzes nur im Falle $p+q\geqq 1$ und $0<q\leqq 1$ durch, da der Beweis im Falle $q\geqq 1$ und $0<p+q\leqq 1$ ähnlich ist. Ist $f(t)$ im Intervall $[0, 1]$ konvex und $f(0)=0$, so gilt für beliebige $x, y, x+y\in[0, 1]$ die Ungleichung

$$f(x+y)\geqq f(x)+f(y). \tag{12}$$

Wir bemerken noch, daß im Falle einer konkaven Funktion eine entsprechende Ungleichung $f(x+y)\leqq f(x)+f(y)$ gilt. (S. [6], Seite 132.)

Nun sei $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Wegen der Voraussetzung $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$ existieren zu jeder Menge $A_i\in\mathfrak{A}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ endlich viele Mengen $B_{ij}\in\mathfrak{B}$ (j durchläuft eine endliche Indexmenge), so daß $A_i=\bigcup_j B_{ij}$ ist, woraus, $\mu(A_i)=\sum_j\mu(B_{ij})$ folgt. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases}\mu(A_i) = x_i & \left(1\leqq i\leqq n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{und} \quad x_i\geqq 0\right)\\[2mm] \mu(B_{ij}) = y_{ij} & \left(1\leqq i\leqq n,\ \sum_{i=1}^n\sum_j y_{ij} = 1 \quad \text{und} \quad y_{ij}\geqq 0\right).\end{cases} \tag{13}$$

Offenbar ist

$$x_i = \sum_j y_{ij} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Nun sei $F(t) = -\log t^{\frac{1}{p}}$. Diese Funktion ist wegen $p>0$ abnehmend. Da t^{p+q} $(p+q \geqq 1)$ eine konvexe und t^q $(0<q\leqq 1)$ eine konkave Funktion im Intervall $[0, 1]$ ist (im Punkt $t=0$ verschwinden beide Funktionen), gilt die folgende Ungleichung

$$H_{p,q}(\mathfrak{A}) = -\log \left[\sum_{i=1}^n \mu(A_i)^{p+q} \Big/ \sum_{i=1}^n \mu(A_i)^q\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= F\left(\sum_{i=1}^n x_i^{p+q} \Big/ \sum_{i=1}^n x_i^q\right) = F\left[\sum_{i=1}^n \Big(\sum_j y_{ij}\Big)^{p+q} \Big/ \sum_{i=1}^n \Big(\sum_j y_{ij}\Big)^q\right] \leqq$$

$$\leqq F\left[\sum_{i=1}^n \Big(\sum_j y_{ij}^{p+q}\Big) \Big/ \sum_{i=1}^n \Big(\sum_j y_{ij}^q\Big)\right] =$$

$$= -\log \left[\sum_{i=1}^n \sum_j \mu(B_{ij})^{p+q} \Big/ \sum_{i=1}^n \sum_j \mu(B_{ij})^q\right]^{\frac{1}{p}} = H_{p,q}(\mathfrak{B}),$$

was zu beweisen war.

6. Wir werden uns nun mit folgendem Problem beschäftigen. Wir suchen jene Entropiefunktionen $H_{p,q}(\mathfrak{A})$, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

1* $H_{p,q}$ ist eine monotone Grundfunktion;

2* $H_{p,q} \leqq H_{0,1} = H_1$.

Es ist bekannt (S. [4], Satz 5), daß $H_{p,q}$ eine abnehmende Funktion von p und q ist. Daraus folgt, daß $H_{p,q}$ die Eigenschaft 2* im Falle $p\geqq 0$ und $q\geqq 1$ besitzt. Wegen des Satzes 3 hat also $H_{p,q}$ im Falle $p\geqq 0$ und $q=1$ die Eigenschaften 1* und 2*. Es gilt der

Satz 4. *Für die Entropie $h_\alpha(T)$ einer Abbildung $T\in\Gamma$, die mit Hilfe der Rényischen monotonen Entropiefunktion der Ordnung $\alpha\geqq 1$ gebildet ist, gilt die Ungleichung*

$$0 \leqq h_\alpha(T) \leqq h_1(T). \tag{15}$$

Beweis. Mit der Bezeichnung $\alpha = p+1$ sehen wir, daß H_α im Falle $\alpha\geqq 1$ die Eigenschaften 1* und 2* besitzt. Nach 2* gilt

$$H_\alpha(\mathfrak{A}) \leqq H_1(\mathfrak{A})$$

für beliebige $\mathfrak{A}\in Z$, und daraus folgt (15).

Aus diesem Satz folgt ein für die Anwendungen wichtiges

Korollar. *Es sei $T\in\Gamma$, und T soll die folgenden Eigenschaften haben:*

(i) *Es existiert die Shannonsche Entropie* $h_1(T)$, *für welche*

$$0 < h_1(T) < \infty$$

gilt;

(ii) *es existiert eine Zerlegung* $\mathfrak{A} \in Z$, *für die*

$$h_\alpha(\mathfrak{A}, T) > 0,$$

wo $\alpha > 1$ *ist.*

Dann gilt

$$0 < h_\alpha(T) \leqq h_1(T) < \infty.$$

7. Die Zerlegungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nennt man unabhängig, wenn die Gleichung $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ $(A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B})$ erfüllt ist. Die grundlegende Eigenschaft der Shannonschen Entropie $H_1(\mathfrak{A})$ ist die der sogenannten Additivität, d. h. für beliebige unabhängige Zerlegungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt

$$H_1(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = H_1(\mathfrak{A}) + H_1(\mathfrak{B}).$$

(S. [9], [10], [1], [2].) Man kann leicht zeigen, daß die Entropie $H_{p,q}$ für beliebige p und q auch additiv ist. (S. [2], [4].) Wir betrachten jetzt nur die Rényische Entropie $H_\alpha(\mathfrak{A})$, wo $\alpha > 0$, für die also

$$H_\alpha(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = H_\alpha(\mathfrak{A}) + H_\alpha(\mathfrak{B}) \tag{16}$$

gilt, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unabhängig sind.

Nun wollen wir ein Beispiel behandeln.

Es sei Y eine aus endlich vielen Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_k$ bestehende Menge mit der Grundverteilung $\mu(y_i) = p_i > 0$ $\left(i = 1, 2, \ldots, k; \sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$. Es sei

$$X = \prod_{\alpha=-\infty}^{\infty} Y_\alpha \qquad Y_\alpha = Y \ (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

das kartesische Produkt von unendlich vielen Exemplaren von Y. Die Elemente von X sind also die Folgen $\{x_n\} = \{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ mit $x_i \in Y$. Wir definieren jetzt die Bernoullische Abbildung T von X folgendermaßen:

$$T\{x_n\} = \{x_n^*\}, \quad \text{wo} \quad x_n^* = x_{n+1}.$$

Kolmogoroff ([7], [8] vgl. [12], [11], [5], [3]) hat bewiesen, daß die Shannonsche Entropie von T von der Gestalt

$$h_1(T) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i$$

ist, d. h. $h_1(T)$ endlich und positiv ist. Aus diesem Satz folgt, daß die Rényische Entropie $h_\alpha(T)$ für $\alpha > 1$ eine endliche Größe ist. Nun wollen wir zeigen, daß $h_\alpha(T)$ für $\alpha > 1$ positiv ist. Auf Grund des Korollars genügt es zu zeigen, daß es eine Zerlegung $\mathfrak{A}$ gibt, für die

$$h_\alpha(\mathfrak{A}, T) > 0$$

ist. Nun betrachten wir die Menge

$$A_i = \{\{x_n\} | x_0 = y_i\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{17}$$

Offenbar ist $\mathfrak{A}=\{A_i|i=1, 2, \ldots, k\}$ eine Zerlegung von X. Aus der Definition des Produktmaßes kann man sehen, daß bei der Bernoullischen Abbildung T die Zerlegungen $\mathfrak{A}, T\mathfrak{A}, \ldots, T^n\mathfrak{A}, \ldots$ unabhängig sind, d. h. wegen (16) gilt

$$H_\alpha\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\mathfrak{A}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} H_\alpha(T^i\mathfrak{A}) = nH_\alpha(\mathfrak{A}), \tag{18}$$

wo

$$H_\alpha(\mathfrak{A}) = \frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{i=1}^{k} p_i^\alpha > 0$$

ist. Aus (18) bekommen wir:

$$h_\alpha(\mathfrak{A}, T) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n} H_\alpha\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\mathfrak{A}\right) = H_\alpha(\mathfrak{A}) = \frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{i=1}^{k} p_i^\alpha. \tag{19}$$

Es zeigt sich, daß $\mathfrak{A}$ eine derartige Zerlegung von X ist, für die $h_\alpha(\mathfrak{A}, T)>0$ gilt, also ist

$$0<\frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{i=1}^{k} p_i^\alpha \leqq h_\alpha(T) \leqq -\sum_{i=1}^{k} p_i\log p_i,$$

wenn $\alpha>1$.

Aus dem Satz 2 folgt, daß die Abbildungen T^k und T^j für $|k|\neq|j|>0$ nicht konjugiert sind. Aus (19) folgt die folgende Behauptung: Ist $0<\alpha<1$ und $p_i\neq 1/k$ für $i=1, 2, \ldots, k$, so gilt die Ungleichung

$$h_1(T) = -\sum_{i=1}^{k} p_i\log p_i < \frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{i=1}^{k} p_i^\alpha \leqq h_\alpha(T),$$

d. h. $h_\alpha(T)\neq h_1(T)$ für $\alpha\in(0, 1)$. Ist $\alpha>1$ und $p_i=1/k$ für $i=1, 2, \ldots, k$, so gilt $h_1(T)=h_\alpha(T)$.

8. Die Probleme, die in der Arbeit [11] von ROCHLIN für die Shannonsche Entropie $h_1(T)$ formuliert wurden, können auch im Falle $h_\alpha(T)$ (oder $h_G(T)$) auftreten. Es ist daher verständlich, daß wir hier nur wenige weitere offene Fragen formulieren wollen.

I. Es sei T die Bernoullische Abbildung mit der Grundverteilung $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Man bestimme die Funktion $h_\alpha(T)=\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

II. Es sei T eine maßtreue Abbildung, für welche $h_1(T)=\infty$. Existiert dann ein $\alpha>1$ derart, daß $0<h_\alpha(T)<\infty$ ist, oder nicht?

III. Es seien T und S zwei Abbildungen aus Γ mit $h_1(T)=h_1(S)$. Gilt dann $h_\alpha(T)=h_\alpha(S)$, oder nicht?

Literatur

[1] J. ACZÉL—Z. DARÓCZY, Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963), 95—121.

[2] J. ACZÉL—Z. DARÓCZY, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 167—186.

[3] T. A. BROWN, Entropy and conjugacy, *Ann. Math. Stat.* **34** (1963), 226—232.

[4] Z. Daróczy, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 102–112.
[5] P. R. Halmos, Entropy in ergodic theory, *Chicago*, 1959.
[6] E. Hille, Functional analysis and semi-groups, *New York*, 1948.
[7] A. N. Kolmogoroff, A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces, (Russisch) *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **119** (1958), 861–864.
[8] A. N. Kolmogoroff, Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms, (Russisch) *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **124** (1959), 754–755.
[9] A. Rényi, Einige Grundfragen der Informationstheorie, (Ungarisch) *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **10** (1960), 251–282.
[10] A. Rényi, On measures of entropy and information, *Proc. Fourth Berkeley Sympos. Statist. and Probability*, (1960), 457–561.
[11] V. A. Rochlin, New progress in the theory of transformations with invariant measure, (Russisch) *Uspehi Mat. Nauk* **15** (3) 1960, 1–22.
[12] Ja. G. Sinai, On the concept of entropy for a dynamic system, (Russisch) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **124** (1959), 768–771.

(Eingegangen am 2. Juli 1964.)