Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

Einleitung

$M=M(\infty)$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ fast überall konvergiert. Es sei $1 \leqq p \leqq 2$ und für eine Folge $\{c_n\}_1^N$ wird

$$I_p(c_1, \ldots, c_N) = I_p(\infty; c_1, \ldots, c_N) = \sup \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| \Big)^p \, dx$$

gesetzt, wobei das Supremum über alle, im Intervall $[0, 1]$ orthonormierten Funktionensysteme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ gebildet wird.

In der vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [1]) haben wir u. a. die folgenden Behauptungen bewiesen.

$\{a_n\} \in M$ gilt dann und nur dann, wenn

$$\|\{a_n\}\|_p = \|\{a_n\}; \infty\|_p = \lim_{N \to \infty} I_p^{1/p}(a_1, \ldots, a_N) < \infty.$$

M ist mit der Norm $\|\{a_n\}\|_p$ ein Banachraum. Es gilt

$$\|\{a_n\}\|_p \leqq C_1 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2}$$

und im Falle $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ besteht

$$\|\{a_n\}\|_p \geqq C_2 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2},$$

wobei C_1 und C_2 positive, absolute Konstanten bedeuten.

In dieser Mitteilung werden wir die Konvergenz der Reihe (1) mit gewissen Nebenbedingungen über das System $\{\varphi_n(x)\}$ behandeln. Wir werden nämlich die

Analoga der obigen Behauptungen beweisen, wenn das System $\{\varphi_n(x)\}$ beschränkt ist, bzw. wenn die Lebesgueschen Funktionen des Systems $\{\varphi_n(x)\}$ eine gewisse natürliche Beschränktheitsbedingung befriedigen.

§ 1. Konvergenz mit beschränkten orthonormierten Systemen

Es sei $K \geqq 1$. $M(K)$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe (1) für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ mit

$$(2) \qquad |\varphi_n(x)| \leqq K \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, 2, \ldots)$$

in $[0, 1]$ fast überall konvergiert. Offensichtlich ist $M(K)$ mit den gewöhnlichen vektoriellen Operationen ein linearer Raum und es gilt $M(\infty) \subseteqq M(K') \subseteqq M(K)$ $(K \leqq K')$.

Es sei $1 \leqq p \leqq 2$. Für eine Folge $\{c_n\}_1^N$ setzen wir

$$I_p(K; c_1, \ldots, c_N) = \sup \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\varphi_i(x) + \ldots + c_j\varphi_j(x)|)^p \, dx,$$

wobei das Supremum für alle in $[0, 1]$ orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) gebildet ist. Offensichtlich gilt

$$(3) \qquad I_p(K; c_1, \ldots, c_N) \leqq I_p(K'; c_1, \ldots, c_N) \leqq I_p(\infty; c_1, \ldots, c_N) \qquad (K \leqq K').$$

Mit in der vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [1]) angewandten Methoden können

$$(4) \qquad \left(\sum_{n=1}^N c_n^2\right)^{1/2} \leqq I_2^{1/2}(K; c_1, \ldots, c_N) \leqq \sum_{n=1}^N |c_n|$$

und

$$(5) \qquad I_p^{1/p}(K; c_1 + d_1, \ldots, c_N + d_N) \leqq I_p^{1/p}(K; c_1, \ldots, c_N) + I_p^{1/p}(K; d_1, \ldots, d_N)$$

leicht bewiesen werden. Aus (4) und (5) folgt, daß $I_2(K; c_1, \ldots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \ldots, c_N$ stetig ist.

Im folgenden benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Ist* $1 < K \leqq K'$, *dann gilt*

$$I_2(K'; c_1, \ldots, c_N) \leqq \frac{(K')^2}{K(K-1)} I_2(K; c_1, \ldots, c_N).$$

BEWEIS. Es sei $\varepsilon (>) 0$ beliebig angegeben. Nach der Definition von I_2 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\bar\varphi_n(x)\}_1^N$ mit $|\bar\varphi_n(x)| \leqq K'$ $(0 \leqq x \leqq 1; n = 1, \ldots, N)$ und

$$(6) \qquad \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\bar\varphi_i(x) + \ldots + c_j\bar\varphi_j(x)|)^2 \, dx \geqq I_2(K'; c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon.$$

Es sei

$$a = K^{-1}(K-1). \tag{7}$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{K}{K'}\bar{\varphi}_n(a^{-1}x) & (0 \leqq x \leqq a), \\ \varrho_n r_n\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right) & (a < x \leqq 1) \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, N)$, wobei $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x$ die n-te Rademachersche Funktion bezeichnet und die Zahlen ϱ_n derart gewählt sind, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ normiert ausfallen. Offensichtlich bilden die Funktionen $\varphi_n(x)$ ein orthogonales System in $[0, 1]$ und es gilt (2) auf Grund von (7). Weiterhin besteht

$$I_2(K; c_1, \ldots, c_N) \geqq \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|)^2 \, dx \geqq$$

$$\geqq \int_0^a (\max_{0 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|)^2 \, dx =$$

$$= \left(\frac{K}{K'}\right)^2 a \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \ldots + c_j \bar{\varphi}_j(x)|)^2 \, dx \geqq \left(\frac{K}{K'}\right)^2 a\big(I_2(K'; c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon\big)$$

nach (6). Da $\varepsilon (> 0)$ beliebig ist, ergibt sich daraus die Behauptung.

Hilfssatz II. *Es sei* $K > 1$. *Es gilt*

$$I_2(K; c_1, \ldots, c_N) \leqq 2\frac{K}{K-1} I_2(K; d_1, \ldots, d_N) \qquad (|c_n| \leqq |d_n|;\ n = 1, \ldots, N).$$

Beweis. Da I_2 offensichtlich nur von den von 0 verschiedenen Koeffizienten abhängt, kann $d_n \neq 0$ $(n = 1, \ldots, N)$ vorausgesetzt werden. Es sei $\varepsilon (> 0)$ beliebig angegeben. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) und

$$\int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|)^2 \, dx \geqq I_2(K; c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon. \tag{8}$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, c_n d_n^{-1} \varphi_n(2x) & (0 \leqq x \leqq 1/2), \\ \sqrt{2}(1 - c_n^2 d_n^{-2})^{1/2} \varphi_n(2x-1) & (1/2 < x \leqq 1) \end{cases}$$

$(n = 1, \ldots, N)$. Offensichtlich bilden diese Funktionen ein orthonormiertes System in $[0, 1]$ und es gilt $|\varphi_n(x)| \leqq \sqrt{2}K$ $(0 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, \ldots, N)$. Durch eine einfache

Rechnung erhalten wir aus (8)

$$I_2(\sqrt{2}K; d_1, \ldots, d_N) \geqq \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |d_i\bar{\varphi}_i(x) + \ldots + d_j\bar{\varphi}_j(x)|)^2\,dx \geqq$$

$$\geqq 2\int_0^{1/2} (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\varphi_i(2x) + \ldots + c_j\varphi_j(2x)|)^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\varphi_i(x) + \ldots + c_j\varphi_j(x)|)^2\,dx \geqq I_2(K; c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich $I_2(\sqrt{2}K; d_1, \ldots, d_N) \geqq I_2(K; c_1, \ldots, c_N)$. Mit Anwendung des Hilfssatzes I folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz III. *Es sei $K>1$. Ist $I_2(K; c_1, \ldots, c_N) \geqq 3$, dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) derart, daß*

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\varphi_i(x) + \ldots + c_j\varphi_j(x)| \geqq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteq [0, 1])$ mit $\operatorname{mes}(E) \geqq \varrho(K)$ erfüllt ist, wobei $\varrho(K)$ eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $I_2(K; c_1, \ldots, c_N) = 3$ vorausgesetzt werden. Es sei a nach (7) gewählt. Auf Grund der Definition von I_2 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$ mit $|\psi_n(x)| \leqq K$ $(0 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, \ldots, N)$ und

$$(9)\qquad 3 \geqq \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\psi_i(x) + \ldots + c_j\psi_j(x)|)^2\,dx \geqq 2{,}5.$$

Für $\eta > 0$ wählen wir Treppenfunktionen $\{\chi_n(x)\}_1^N$ mit

$$(10)\qquad |\chi_n(x)| \leqq K \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, \ldots, N)$$

und

$$\int_0^1 (\psi_n(x) - \chi_n(x))^2\,dx \leqq \eta \qquad (n = 1, \ldots, N).$$

Es sei

$$\alpha_{i,j} = \int_0^1 \chi_i(x)\chi_j(x)\,dx \qquad (i, j = 1, \ldots, N).$$

Ist η genügend klein, dann gelten

$$(11)\qquad 4 \geqq \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\chi_i(x) + \ldots + c_j\chi_j(x)|)^2\,dx \geqq 2,$$

$$(12)\qquad 6^{-1} a\alpha_{i,i} + \sum_{1 \leqq j \leqq N;\ j \neq i} |\alpha_{i,j}| \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

und

(13) $$(3a^{-1}N(N-1)|\alpha_{i,j}|)^{1/2} \leqq K \qquad (i,j=1,\dots,N;\ i\neq j)$$

auf Grund der Orthonormalität des Systems $\{\psi_n(x)\}_1^N$ und auf Grund von (9).

Wir definieren die Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall $(5.\,6^{-1}\,a, a]$ in $N(N-1)$ gleiche Teilintervalle $I_{i,j}$ $(i,j=1,\dots,N;\ i\neq j)$ ein. Es sei

$$\bar{\varphi}_i(x)=\begin{cases}\chi_i(6a^{-1}x) & (x\in[0,\ 6^{-1}a]),\\ (3a^{-1}N(N-1)|\alpha_{i,j}|)^{1/2} & (x\in I_{i,j};\ j=1,\dots,N;\ i\neq j),\\ -(3a^{-1}N(N-1)|\alpha_{i,j}|)^{1/2}\operatorname{sign}\alpha_{i,j} & (x\in I_{j,i};\ j=1,\dots,N;\ i\neq j),\\ \varrho_i r_i((1-a)^{-1}(x-a)) & (x\in(a,1]),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(i=1,\dots,N)$, wobei die Zahlen ϱ_n derart bestimmt sind, daß die Funktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ normiert ausfallen. (Auf Grund von (12) können die ϱ_n auf diese Weise gewählt werden.) Nach (7) und (13) ist $|\bar{\varphi}_n(x)|\leqq K$ $(0\leqq x\leqq 1;\ n=1,\dots,N)$ und offensichtlich bilden diese Funktionen ein orthogonales System in $[0,1]$.

Es sei

$$F(x)=\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N}|c_i\bar{\varphi}_i(x)+\dots+c_j\bar{\varphi}_j(x)|.$$

Aus (11) folgt wegen

$$\int_0^{a/6}\big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N}|c_i\bar{\varphi}_i(x)+\dots+c_j\bar{\varphi}_j(x)|\big)^2\,dx=$$

$$=\frac{a}{6}\int_0^1\big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N}|c_i\chi_i(x)+\dots+c_j\chi_j(x)|\big)^2\,dx$$

die Beziehung

(14) $$\frac{a}{3}\leqq\int_0^{a/6}F^2(x)\,dx\leqq\frac{2}{3}a.$$

Da die $\bar{\varphi}_n(x)$ Treppenfunktionen sind, gibt es eine Zerlegung von $[0, 6^{-1}a]$ in Teilintervalle $I_r=(a_r, b_r)$ $(r=1,\dots,\varrho)$ derart, daß jede Funktion $\bar{\varphi}_n(x)$ in jedem I_r konstant ist. Die Werte von $F(x)$ in I_r bezeichnen wir mit w_r. Aus (14) folgt

(15) $$\frac{a}{3}\leqq\sum_{r=1}^{\varrho}w_r^2\operatorname{mes}(I_r)\leqq\frac{2}{3}a.$$

Es seien $1\leqq r_1<\dots<r_s\leqq\varrho$ die Indizes r, für die $w_r\geqq 1$ ist. Wegen (15) gilt

(16) $$\sum_{i=1}^{s}w_{r_i}^2\operatorname{mes}(I_{r_i})\geqq\frac{a}{6}.$$

Wir setzen $v_r = w_r$ für $r = r_i$ $(i = 1, \dots, s)$, $v_r = 1$ sonst, und

$$\alpha_l = \sum_{i=1}^{l} v_i^2 \operatorname{mes}(I_i) \qquad (l = 0, \dots, \varrho).$$

Nach (15) ist

$$\alpha_\varrho \leqq 5.\,6^{-1} a. \tag{17}$$

Es sei

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_n(x) & (x \in (5.6^{-1}a, 1]), \\ \dfrac{1}{v_r} \bar{\varphi}_n\left(\dfrac{x - \alpha_{r-1}}{v_r^2} + a_r\right) & (x \in (\alpha_{r-1}, \alpha_r);\ r = 1, \dots, \varrho), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n = 1, \dots, N)$. (Nach (17) ist diese Definition richtig.) Die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ bilden offensichtlich ein orthonormiertes System in $[0, 1]$. Nach der Definition von v_r gilt (2). Es sei

$$E = \bigcup_{i=1}^{s} (\alpha_{r_i - 1}, \alpha_{r_i}).$$

Auf Grund von (16) ist $\operatorname{mes}(E) \geqq 6^{-1} a$. Es sei $x \in E$. Dann gibt es ein i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq s)$ mit $x \in (\alpha_{r_{i_0} - 1}, \alpha_{r_{i_0}})$. Da $t = v_{r_{i_0}}^{-2}(x - \alpha_{r_{i_0} - 1}) + a_{r_{i_0}} \in I_{r_{i_0}}$ besteht, gilt

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)| =$$

$$= w_{r_{i_0}}^{-1} \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\varphi}_i(t) + \dots + c_j \bar{\varphi}_j(t)| = w_{r_{i_0}}^{-1} F(t) = 1.$$

Die Menge E und die Funktionen $\varphi_n(x)$ befriedigen also alle Bedingungen des Hilfssatzes III.

Hilfssatz IV. *Es sei $K > 1$. Ist für eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ $I_2(K; a_{n_k + 1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geqq 3$ $(k = 0, 1, \dots)$, dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ mit (2) derart, daß die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall divergiert.*

Die Behauptung ergibt sich auf Grund des Hilfssatzes III, durch Anwendung einer in einer vorherigen Mitteilung (K. Tandori [2]) verwendeten Methode.

Hilfssatz V. *Es sei $p (\geqq 2)$ eine natürliche Zahl und $1 \leqq c \leqq 4^{-1} p$. Dann existiert ein im Intervall $[-1, \beta]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $g_l(c, p; x)$ $(l = 1, \dots, p^2)$ mit $|g_l(c, p, x)| \leqq M$ $(-1 \leqq x \leqq \beta;\ l = 1, \dots, p^2)$ (wobei β und M positive, von c und p unabhängige Konstanten sind), für welches die folgende Bedingung erfüllt ist: für jeden Punkt $x \in [(2c)^{-1}, c^{-1}]$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p^2)$ derart, daß die Funktionswerte $g_l(c, p; x)$ $(l = 1, \dots, m(x))$ nichtnegativ sind und*

$$\sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c, p; x) \geqq C \sqrt{c}\, p \log p$$

mit einer positiven, von c, p und x unabhängigen Konstante C besteht.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. K. TANDORI [2].)

Hilfssatz VI. *Es sei $K>1$, $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl und $1\leqq c\leqq 4^{-1}p$. Dann gibt es ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $h_l(c, p; x)$ $(l=1,\dots,p^2)$ mit folgenden Eigenschaften: es gilt $|h_l(c,p;x)|\leqq K\,(0\leqq x\leqq 1;\, l=1,\dots,p^2)$; es gibt ein Intervall E mit* $\text{mes}\,(E)\geqq\omega c^{-1}$ *(wobei ω eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet) derart, daß für $x\in E$ ein Index $m(x)(<p^2)$ mit $h_l(c,p;x)\geqq 0$ $(l=1,\dots,m(x))$ und*

$$\sum_{l=1}^{m(x)} h_l(c, p; x) \geqq D\sqrt{c}\,p\log p$$

existiert, wo D eine positive, nur von K abhängige Konstante ist.

BEWEIS. Dieser Hilfssatz folgt leicht aus dem Hilfssatz V. Es sei a nach (7) gewählt. Wir setzen

$$h_l(c, p; x) = \begin{cases} \dfrac{K}{M+K} g_l\left(c, p; \dfrac{1+\beta}{a}x-1\right) & (0\leqq x\leqq a), \\ \varrho_l r_l\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right) & (a<x\leqq 1) \end{cases}$$

$(l=1,\dots,p^2)$, wobei die ϱ_l derart angewählt sind, daß die Funktionen $h_l(c,p;x)$ normiert ausfallen. Es sei E die Bildmenge des Intervalls $[(2c)^{-1}, c^{-1}]$ bei der Transformation $y=(1+\beta)^{-1}(x+1)$. Die Funktion $h\,(c,p;x)$ und die Menge E befriedigen alle Forderungen des Hilfssatzes VI.

Hilfssatz VII. *Es sei $K>1$. Ist $|a_n|\geqq|a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \dots)$* und

$$a_1^2+\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2\log^2 n=\infty,$$

dann gibt es ein in $[0, 1]$ *orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ mit* (2) *derart, daß die Reihe* (1) *in* $[0, 1]$ *fast überall divergiert.*

Die Behauptung folgt durch Anwendung des Hilfssatzes VI mit in einer vorherigen Mitteilung (K. TANDORI [3]) angewandten Methode.

Hilfssatz VIII. *Es sei $K>1$. $\{a_n\}\in M(K)$ gilt dann und nur dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}\big(\lim_{N\to\infty} I_2(K;\, a_{n+1},\dots,a_{n+N})\big)=0. \tag{18}$$

BEWEIS. Ist (18) erfüllt, dann gilt $\{a_n\}\in l^2$ wegen (4). Wir wählen eine Indexfolge $(0=)n_0<\dots<n_k<\dots$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2<\infty \tag{19}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(K;\, a_{n_k+1},\dots,a_{n_{k+1}})<\infty. \tag{20}$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System mit (2). Nach dem Satz von

Riesz—Fischer gibt es eine Funktion $f(x)\in L^2[0,1]$, nach der die Reihe (1) im quadratischen Mittel konvergiert. Bezeichnet $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihe (1), dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (f(x)-s_{n_k}(x))^2\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{\infty}a_n^2<\infty$$

wegen (19), woraus $\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x)=f(x)$ fast überall folgt. Nach (20) ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (\max_{n_k<i\leqq j<n_{k+1}}|a_i\varphi_i(x)+\dots+a_j\varphi_j(x)|)^2\,dx<\infty$$

und so besteht

$$\max_{n_k<i\leqq j<n_{k+1}}|a_i\varphi_i(x)+\dots+a_j\varphi_j(x)|\to 0 \qquad (k\to\infty)$$

fast überall, woraus $s_n(x)-s_{n_k}(x)\to 0$ $(n\to\infty;\ n_k<n<n_{k+1})$ sich fast überall ergibt. Damit haben wir $\{a_n\}\in M(K)$ bewiesen.

Ist (18) nicht erfüllt, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\big(\lim_{N\to\infty} I_2(K;\,a_{n+1},\dots,a_{n+N})\big)=\sigma>0 \tag{21}$$

auf Grund von $\lim_{N\to\infty} I_2(K;\,a_{n+1},\dots,a_N)\geqq\lim_{N\to\infty} I_2(K;\,a_{n+2},\dots,a_N)$ $(n=1,2,\dots)$. Nach (21) kann eine Indexfolge $(0=)\ n_0<\dots<n_k<\dots$ mit $I_2(K;\,a_{n_k+1},\dots,a_{n_{k+1}})\geqq\sigma/2$ $(k=0,1,\dots)$ gewählt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $I_2(K;\,a_{n_k+1},\dots,a_{n_{k+1}})\geqq 3$ $(k=0,1,\dots)$ annehmen. Durch Anwendung der Hilfssatzes IV ergibt sich $\{a_n\}\notin M(K)$.

Für eine Folge $\{a_n\}_1^{\infty}$ setzen wir

$$\|\{a_n\};K\|_2=\inf\sum_{k=0}^{\infty}I_2^{1/2}(K;\,a_{n_k+1},\dots,a_{n_{k+1}}),$$

wobei das Infimum für alle unendlichen Indexfolgen $(0=)\ n_0<\dots<n_k<\dots$ gebildet wird. Auf Grund von (3), (4) und (5) können

$$\|\{a_n\};K\|_2\leqq\|\{a_n\};K'\|_2\leqq\|\{a_n\};\infty\|_2 \qquad (K\leqq K') \tag{22}$$

und

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right\}^{1/2}\leqq\|\{a_n\};K\|_2\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{23}$$

leicht bewiesen werden. Aus dem Hilfssatz I folgt

$$\|\{a_n\};K'\|_2\leqq\frac{K'}{\sqrt{K(K-1)}}\|\{a_n\};K\|_2 \qquad (1<K\leqq K'). \tag{24}$$

Satz I. *Es sei $K>1$. $\{a_n\}\in M(K)$ gilt dann und nur dann, wenn $\|\{a_n\};K\|_2<\infty$. $M(K)$ ist mit der Norm $\|\{a_n\};K\|_2$ ein Banachraum.*

Beweis. Ist $\|\{a_n\}; K\|_2 < \infty$, dann gilt (18), woraus $\{a_n\} \in M(K)$ sich auf Grund des Hilfssatzes VIII ergibt. Ist aber $\|\{a_n\}; K\|_2 = \infty$, so kann (18) nicht bestehen. Auf Grund des Hilfssatzes VIII ist also $\{a_n\} \notin M(K)$. Um zu zeigen, daß $\|\{a_n\}; K\|_2$ in $M(K)$ eine Norm ist, soll nur die Dreiecksungleichung bewiesen werden.

Wir zeigen zuerst die folgende Behauptung: es gilt

$$\|\{a_n\}; K\|_2 = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(K; a_1, \ldots, a_N) \qquad (\{a_n\} \in M(K)), \tag{25}$$

woraus die Dreiecksungleichung auf Grund von (5) folgt. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben. Ist $\{a_n\} \in M(K)$, dann gibt es eine Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ mit

$$\|\{a_n\}; K\|_2 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \leqq \|\{a_n\}; K\|_2 + \varepsilon. \tag{26}$$

Es sei k_0 so groß, daß

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) < \varepsilon.$$

Aus (26) ergibt sich auf Grund von (5)

$$\|\{a_n\}; K\|_2 \leqq I_2^{1/2}(K; a_1, \ldots, a_{n_{k_0+1}}) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_2^{1/2}(K; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \leqq$$
$$\leqq \|\{a_n\}; K\|_2 + \varepsilon,$$

woraus

$$\|\{a_n\}; K\|_2 - \varepsilon \leqq I_2^{1/2}(K; a_1, \ldots, a_{n_{k_0+1}}) \leqq \|\{a_n\}; K\|_2 + \varepsilon$$

folgt. Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, erhalten wir (25) für $k_0 \to \infty$.

Die Vollständigkeit von $M(K)$ ergibt sich aus (4) und daraus, daß $I_2(K; c_1, \ldots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \ldots, c_N$ stetig ist. Damit haben wir Satz I bewiesen.

Aus (23) folgt $M(K) \subseteq l^2$ $(K \geqq 1)$.

Auf Grund des Hilfssatzes II ergibt sich: *Ist* $|a_n| \leqq |b_n|$ $(n=1, 2, \ldots)$, *dann gilt* $\|\{a_n\}; K\|_2 \leqq (2K(K-1)^{-1})^{\frac{1}{2}} \|\{b_n\}; K\|_2$ $(K>1)$.

Durch Anwendung des Hilfssatzes II kann man leicht beweisen: *Ist* $\{a_n(1)\}_1^\infty \in M(K)$ *und gilt* $a_n(m) \searrow 0$ $(m\to\infty; n=1, 2, \ldots)$, *dann ist* $\|\{a_n(m)\}; K\|_2 \to 0$ $(m\to\infty)$ $(K>1)$.

Aus dieser Behauptung folgt leicht, daß $M(K)$ $(K>1)$ *separabel ist;* die endlichen rationalen Folgen liegen nämlich in $M(K)$ überall dicht.

Aus Satz I folgt, daß *im Falle* $\{a_n\} \in M(K)$ $(K>1)$ *eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge* $\{\lambda_n\}$ *mit* $\{\lambda_n a_n\} \in M(K)$ *existiert.*

Aus dem Beweis des Hilfssatzes VIII ergibt sich, daß *im Falle* $\{a_n\} \notin M(K)$ $(K>1)$ *ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *mit* (2) *existiert derart, daß die Reihe* (1) *in* $[0, 1]$ *fast überall divergiert.*

Es sei $1 \leqq p < 2$ und $K>1$. Man kann die folgende Ungleichung leicht beweisen: Es gilt

$$\alpha I_2^{1/2}(K; c_1, \ldots, c_N) \leqq I_p^{1/p}(K; c_1, \ldots, c_N) \leqq I_2^{1/2}(K; c_1, \ldots, c_N)$$

mit einer positiven, nur von K abhängigen Konstante α.

Die zweite Ungleichung folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Zum Beweis der ersten Ungleichung kann $I_2(K; c_1, \ldots, c_N) = 3$ angenommen werden. Nach dem Hilfssatz III gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) derart, daß

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| \geqq 1$$

in einer meßbaren Menge $E(\subseteqq [0, 1])$ mit $\operatorname{mes}(E) \geqq \varrho$ gilt, wobei $\varrho(\leqq 1)$ eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet. Dann gilt

$$I_p^{1/p}(K; c_1, \ldots, c_N) \geqq (\operatorname{mes}(E))^{1/p} \geqq \varrho^{1/p} 3^{-1/2} I_2^{1/2}(K; c_1, \ldots, c_N),$$

woraus sich die erste Ungleichung ergibt.

Aus diesen Ungleichungen erhalten wir, daß die entsprechenden Behauptungen anstatt $p = 2$ auch für $1 \leqq p < 2$ gelten.

Satz II. *Es gilt*

$$\|\{a_n\}; K\|_2 \leqq C \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2} \qquad (K \geqq 1) \tag{27}$$

mit einer positiven, absoluten Konstante C. Ist $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *dann gilt*

$$\|\{a_n\}; K\|_2 \geqq D \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2} \qquad (K > 1), \tag{28}$$

wobei D eine positive, nur von K abhängige Konstante bedeutet.

Beweis. (27) folgt aus (22) und aus der entsprechenden Ungleichung für $\|\{a_n\}; \infty\|_2$.

Ist $\|\{a_n\}; K\|_2 < \infty$, dann ist $\{a_n\} \in M(K)$. Nach dem Hilfssatz VII folgt

$$a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty.$$

Für jede Folge $\{a_n\}$ gibt es also eine positive Konstante D derart, daß (28) besteht. Wir zeigen, daß D in (28) von der Folge $\{a_n\}$ unabhängig bestimmt werden kann. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich Folgen $\{a_n(m)\}_1^{\infty}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ mit $|a_n(m)| \geqq |a_{n+1}(m)|$ $(n = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots)$ und

$$\|\{a_n(m)\}; K\|_2 \leqq \frac{1}{m^4} \left(a_1^2(m) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2(m) \log^2 n \right)^{1/2} \tag{29}$$

angeben. $\|\{a_n(m)\}; K\|_2 = 1/m^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$ kann vorausgesetzt werden. Dann folgt aus (29)

$$\left(a_1^2(m) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2(m) \log^2 n \right)^{1/2} \to \infty \qquad (m \to \infty). \tag{30}$$

Auf Grund von (30) und von $|a_n(m)| \leqq \|\{a_n(m)\}; K\|_2 \to 0$ $(m \to \infty; n = 1, 2, \ldots)$ ergeben sich durch vollständige Induktion zwei Folgen ganzer Zahlen $(1 \leqq) \nu_1 < \ldots$

$\ldots < \nu_k < \ldots$ $(\nu_0 = -1)$ und $(1 \leqq) m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ mit

$$a_1^2(m_1) + \sum_{n=2}^{2^{\nu_1}} a_n^2(m_1) \log^2 n \geqq 1, \qquad \sum_{n=2^{\nu_{k-1}}+1}^{2^{\nu_k}} a_n^2(m_k) \log^2 n \geqq 1 \qquad (k=2, 3, \ldots)$$

und

$$|a_{2^{\nu_k}}(m_k)| \geqq |a_{2^{\nu_k}+1}(m_{k+1})| \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Es sei $a_n = a_n(m_k)$ $(2^{\nu_{k-1}} < n \leqq 2^{\nu_k};\ k=1, 2, \ldots)$. Dann ist $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ und

$$a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty.$$

Auf Grund des Hilfssatzes VII folgt also $\{a_n\} \notin M(K)$, was der Ungleichung

$$\|\{a_n\}; K\|_2 \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \|\{a_n(m)\}; K\|_2 = \sum_{m=1}^{m} \frac{1}{m^2} < \infty$$

widerspricht. Damit haben wir Satz II bewiesen.

Wir werden noch einige Probleme erwähnen. Wie kann $M(1)$ charakterisiert werden? Gilt $\|\{a_n\}; \infty\|_2 \leqq C\|\{a_n\}; K\|_2$ mit einer nur von K abhängigen positiven Konstante C? Gibt es im Falle $\{a_n\} \notin M(K)$ $(K > 1)$ eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\mu_n\}$ mit $\{a_n \mu_n\} \notin M(K)$? Gilt (25) für jede Folge $\{a_n\}$?

§ 2. Konvergenz mit Beschränktheitsbedingung für die Lebesgueschen Funktionen

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit $\lambda_1 \geqq 1$. $M(\{\lambda_n\})$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe (1) für jedes in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ mit

$$\sup \int_0^1 \frac{dx}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\nu(x)} \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \leqq 1 \tag{31}$$

in $[0, 1]$ fast überall konvergiert, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist. Ist für ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$

$$L_\nu(\{\varphi_n\}; x) = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\nu} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \leqq \lambda_\nu \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ \nu = 1, 2, \ldots), \tag{32}$$

dann gilt (31). $M(\{\lambda_n\})$ ist mit den gewöhnlichen vektoriellen Operationen ein linearer Raum und es gilt $M(\{\lambda_n\}) \supseteq M(\{\mu_n\}) \supseteq M(\infty)$ $(\lambda_n \leqq \mu_n;\ n = 1, 2, \ldots)$.

Es sei $1 \leqq p \leqq 2$. Für eine Folge $\{c_n\}_1^N$ wird

$$I_p(\{\lambda_n\}; c_1, \ldots, c_N) = \sup \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| \Big)^p \, dx$$

gesetzt, wobei das Supremum für alle in [0, 1] orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (31) gebildet wird. Offensichtlich ist

(33) $I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \leqq I_1(\{\mu_n\}; c_1, \dots, c_N) \leqq I_1(\infty; c_1, \dots, c_N)$ $(\lambda_n \leqq \mu_n;\ n=1, 2, \dots)$,

$$I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \leqq \sum_{n=1}^{N} |c_n| \tag{34}$$

und

$$I_1(\{\lambda_n\}; c_1+d_1, \dots, c_N+d_N) \leqq I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) + I_1(\{\lambda_n\}; d_1, \dots, d_N). \tag{35}$$

Daraus und aus (34) folgt, daß $I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \dots, c_N$ stetig ist.

Die Abschätzung

$$|c_n| \leqq C I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \qquad (1 \leqq n \leqq N) \tag{36}$$

mit einer positiven absoluten Konstante C kann man ebenfalls leicht beweisen. Es sei nämlich $I_n = [0, \frac{1}{2}]$ und die I_k $(k=1, \dots, N;\ k \neq n)$ sollen der Reihe nach die Intervalle $(\frac{1}{2}+(j-1)/2(N-1),\ \frac{1}{2}+j/2(N-1)]$ $(j=1, \dots, N-1)$ bezeichnen. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes}(I_n)} & (x \in I_n), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \dots, N)$. $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ ist ein orthonormiertes Sytsem in [0, 1], es besteht $L_\nu(\{\varphi_n\}; x) = 1$ $(0 \leqq x \leqq 1;\ \nu=1, 2, \dots)$ und es gilt

$$|c_n|/\sqrt{2} \leqq \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\varphi_i(x) + \dots + c_j\varphi_j(x)|\big)\, dx,$$

woraus (36) folgt.

Wir benötigen einige Hilfssätze.

Hilfssatz IX. *Es gilt*

$$I_1(\{a\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \leqq 2\sqrt{a}\, I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \qquad (a > 1).$$

Beweis. Auf Grund der Definition von I_1 gibt es ein in [0, 1] orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$ mit

$$\int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\psi_i(x) + \dots + c_j\psi_j(x)|\big)\, dx \geqq \frac{1}{2} I_1(\{a\lambda_n\}; c_1, \dots, c_N) \tag{37}$$

und

$$\sup \int_0^1 \frac{dx}{a\lambda_{\mu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \psi_n(x)\psi_n(t) \right| dt \leqq 1, \tag{38}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\mu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{a}\,\psi_n(ax) & (0 \leqq x \leqq 1/a), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, N)$. Das System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ ist in $[0, 1]$ orthonormiert. Ist $x \in [0, 1/a]$, dann gilt

$$L_\nu(\{\varphi_n\}; x) = a \int_0^{1/a} \left| \sum_{n=1}^{\nu} \psi_n(ax)\psi_n(at) \right| dt = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\nu} \psi_n(ax)\psi_n(t) \right| dt;$$

im Falle $x \in (1/a, 1]$ ist aber $L_\nu(\{\varphi_n\}; x) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Es sei $\nu(x)$ eine beliebige meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Auf Grund von (38) erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{\nu(x)}} dx = \int_0^{1/a} \frac{dx}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\nu(x)} \psi_n(ax)\psi_n(t) \right| dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{a\lambda_{\nu(x/a)}} L_{\nu(x/a)}(\{\psi_n\}; x)\, dx \leqq 1.$$

Da $\nu(x)$ eine beliebige, meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten bedeutet, ist (31) erfüllt. Weiterhin gilt

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\varphi_i(x) + \ldots + c_j\varphi_j(x)| \Big)\, dx =$$

$$= \sqrt{a} \int_0^{1/a} \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} c_i\psi_i(ax) + \ldots + c_j\psi_j(ax)| \Big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\psi_i(x) + \ldots + c_j\psi_j(x)| \Big)\, dx,$$

woraus die Behauptung auf Grund von (37) folgt.

Hilfssatz X. *Es sei* $I_1(\{\lambda_n\}; c_1, \ldots, c_N) \geqq 16\sqrt{2}$. *Dann gibt es ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\psi_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N)$ *derart, daß*

$$\sup \int_0^1 \frac{2L_{\nu(x)}(\{\psi_n\}; x)}{\lambda_{\nu(x)}} dx \leqq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ *mit ganzzahligen Werten gebildet ist, und*

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\psi_i(x) + \ldots + c_j\psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteqq [0, 1])$ *mit* $\operatorname{mes}(E) \geqq 1/4$ *besteht.*

Beweis. Auf Grund des Hilfssatzes IX ist $I_1(\{\lambda_n/4\}; c_1, \ldots, c_N) \geqq 4\sqrt{2}$. Nach der Definition von I_1 gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\chi_n(x)\}_1^N$ mit

$$\int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \chi_i(x) + \ldots + c_j \chi_j(x)|\big)\, dx > 2\sqrt{2} \tag{39}$$

und

$$\sup \int_0^1 \frac{4L_{\nu(x)}(\{\chi_n\}; x)}{\lambda_{\nu(x)}}\, dx \leqq 1, \tag{40}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist.

Für $\eta > 0$ wählen wir die Treppenfunktionen $\{\bar{\chi}_n(x)\}_1^N$ mit

$$\int_0^1 (\chi_n(x) - \bar{\chi}_n(x))^2\, dx < \eta \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

und

$$|\bar{\chi}_n(x)| \leqq |\chi_n(x)| \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, \ldots, N). \tag{41}$$

Wir setzen

$$\alpha_{i,j} = \int_0^1 \bar{\chi}_i(x) \bar{\chi}_j(x)\, dx \qquad (i, j = 1, \ldots, N).$$

Es sei $\varepsilon (> 0)$ beliebig angegeben. Ist η genügend klein, dann folgt aus (39), (40), (41) und aus der Orthonormalität der Funktionen $\chi_n(x)$

$$\int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\chi}_i(x) + \ldots + c_j \bar{\chi}_j(x)|\big)\, dx > 2\sqrt{2}, \tag{42}$$

$$\sup \int_0^1 \frac{4L_{\nu(x)}(\{\bar{\chi}_n\}; x)}{(1+\varepsilon)\lambda_{\nu(x)}}\, dx \leqq 1 \tag{43}$$

(wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist) und

$$|\alpha_{i,j}| \leqq \varepsilon/N \quad (i, j = 1, \ldots, N;\ i \neq j), \qquad 1 - \varepsilon \leqq \alpha_{i,i} \leqq 1 + \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{44}$$

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ definieren wir folgenderweise. Wir teilen das Intervall $(1, 2]$ in $N(N-1)$ gleiche Teilintervalle $I_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, N;\ i \neq j)$ ein. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \bar{\chi}_n(x) & (x \in [0,1]), \\ \sqrt{2^{-1} N(N-1) |\alpha_{n,i}|} & (x \in I_{n,i};\ i = 1, \ldots, N;\ i \neq n), \\ -\sqrt{2^{-1} N(N-1) |\alpha_{n,i}|}\ \operatorname{sign} \alpha_{n,i} & (x \in I_{i,n};\ i = 1, \ldots, N;\ i \neq n), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, N)$. Diese Treppenfunktionen bilden in $[0, 2]$ ein orthogonales System und nach (44) gilt

$$1-\varepsilon \leqq \alpha_{n,n}+\sum_{\substack{1\leqq j\leqq N\\ j\neq n}}|\alpha_{n,j}| = \int_0^2 \varphi_n^2(x)\,dx \leqq 1+2\varepsilon \qquad (n=1, \ldots, N). \tag{45}$$

Es sei $\mu(x)$ eine in $[0, 2]$ meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Nach (41) und (43) ist

$$\int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\mu(x)}}\left(\int_0^2 \left|\sum_{n=1}^{\mu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt\right) dx = \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\mu(x)}}\left(\int_0^1 + \int_1^2\right) dx \leqq \tag{46}$$

$$\leqq \frac{1+\varepsilon}{2} + \sqrt{2N(N-1)} \max_{1\leqq i,j\leqq N;\ i\neq j} \sqrt{|\alpha_{i,j}|} \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 |\chi_n(x)|\,dx < 1,$$

wenn ε genügend klein ist. Weiterhin gilt auf Grund von (44)

$$\int_1^2 \frac{2dx}{\lambda_{\mu(x)}} \int_0^2 \left|\sum_{n=1}^{\mu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt \leqq \tag{47}$$

$$\leqq \sum_{1\leqq i,j\leqq N;\ i\neq j} \int_{I_{i,j}} \frac{2dx}{\lambda_{\mu(x)}} \int_0^2 \left(|\varphi_i(x)\varphi_i(t)| + |\varphi_j(x)\varphi_j(t)|\right) dt \leqq$$

$$\leqq \sqrt{2} \sum_{1\leqq i,j\leqq N;\ i\neq j} \left(\int_0^2 |\varphi_i(t)|\,dt + \int_0^2 |\varphi_j(t)|\,dt\right) \sqrt{|\alpha_{i,j}|} < 1,$$

wenn ε genügend klein ist. Aus (46) und (47) ergibt sich

$$\sup \int_0^2 \frac{2}{\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^2 \left|\sum_{n=1}^{\mu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt\right) dx < 2, \tag{48}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\mu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet wird.

Wir setzen

$$\bar{\varphi}_n(x) = \sqrt{2}\,\varphi_n(2x)\left(\int_0^2 \varphi_n^2(x)\,dx\right)^{-1/2} \qquad (n=1, \ldots, N).$$

Ist $\varepsilon(>0)$ genügend klein, so erhalten wir aus (42), (45) und (48)

$$\int_0^1 \left(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |c_i\bar{\varphi}_i(x) + \ldots + c_j\bar{\varphi}_j(x)|\right) dx \geqq 2,$$

und

$$\sup \int_0^1 \frac{2L_{\nu(x)}(\{\bar{\varphi}_n\};\, x)}{\lambda_{\nu(x)}}\, dx \leqq 1, \tag{49}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten gebildet ist. Die Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann

$$\int_0^1 \bigl(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \ldots + c_j \bar{\varphi}_j(x)| \bigr)\, dx = 2 \tag{50}$$

vorausgesetzt werden.

Es sei $I_r = (a_r, b_r)$ $(r = 1, \ldots, \varrho)$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\bar{\varphi}_n(x)$ in jedem I_r konstant ist. Es sei

$$F(x) = \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\varphi}_i(x) + \ldots + c_j \bar{\varphi}_j(x)|;$$

die Werte von $F(x)$ in den Intervallen I_r bezeichnen wir der Reihe nach mit w_r. Nach (50) ist

$$\sum_{r=1}^{\varrho} w_r \operatorname{mes}(I_r) = 2. \tag{51}$$

Es seien $1 \leqq r_1 < \ldots < r_s \leqq \varrho$ diejenigen Indizes r, für die $w_r \geqq 1$ ist. Nach (51) gilt

$$(2 \geqq) \sum_{i=1}^{s} w_{r_i} \operatorname{mes}(I_{r_i}) \geqq 1. \tag{52}$$

Es seien $J_r = (\alpha_r, \beta_r)$ $(r = 1, \ldots, \varrho)$ nacheinander folgende Intervalle in $[0, 3]$ mit $\operatorname{mes}(J_r) = \operatorname{mes}(I_r)$ $(r \neq r_i;\ i = 1, \ldots, s)$, bzw. mit $\operatorname{mes}(J_{r_i}) = w_{r_i} \operatorname{mes}(I_{r_i})$ $(i = 1, \ldots, s)$, und $\bar{J}_{r_i} = (\bar{\alpha}_{r_i}, \bar{\beta}_{r_i})$ $(i = 1, \ldots, s)$ nacheinander folgende Intervalle in $(3, 4]$ mit $\operatorname{mes}(\bar{J}_{r_i}) = \operatorname{mes}(I_{r_i})$ $(i = 1, \ldots, s)$. Wir setzen

$$\bar{\psi}_n(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_n(x - \alpha_r + a_r) & (x \in J_r;\ r \neq r_i;\ i = 1, \ldots, s), \\ \dfrac{1}{w_{r_i}} \bar{\varphi}_n\left(\dfrac{x - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i}\right) & (x \in J_{r_i};\ i = 1, \ldots, s), \\ \left(1 - \dfrac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \bar{\varphi}_n(x - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) & (x \in \bar{J}_{r_i};\ i = 1, \ldots, s), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n = 1, \ldots, N)$. Auf Grund von (52) ist diese Definition richtig.

Die Treppenfunktionen $\bar{\psi}_n(x)$ bilden in $[0, 4]$ ein orthonormiertes System. Es sei

$$\bar{E} = \bigcup_{\sigma=1}^{s} J_{r_\sigma}.$$

$\bar{E}$ ist einfach und es gilt

$$\text{(53)} \qquad \operatorname{mes}(\bar{E}) \geqq 1$$

nach (52). Ist $x \in E$, dann gilt offensichtlich

$$\text{(54)} \qquad \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\psi}_i(x) + \ldots + c_j \bar{\psi}_j(x)| = 1.$$

Es sei $\mu(x)$ eine beliebige in $[0, 4]$ meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Ist $x \in J_{r_0}$ $(r_0 \neq r_i;\ i = 1, \ldots, s)$, dann gilt

$$\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\ldots,s)}}^{\varrho} \int_{J_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \alpha_r + a_r) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_{r_i}} \int_{J_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n\left(\frac{t - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i} \right) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{\bar{J}_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) \right| dt =$$

$$= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\ldots,s)}}^{\varrho} \int_{I_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt \leqq 2 L_m(\{\bar{\varphi}_n\};\ x - \alpha_{r_0} + a_{r_0})$$

für $m = 1, \ldots, N$, woraus sich

$$\text{(55)} \qquad \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\ldots,s)}}^{\varrho} \int_{J_r} \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt \right) dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\ldots,s)}}^{\varrho} \int_{I_r} \frac{L_{\mu(x - a_r + \alpha_r)}(\{\bar{\varphi}_n\};\ x)}{\lambda_{\mu(x - a_r + \alpha_r)}}\, dx$$

ergibt. Ist $x \in J_{r_{i_0}}$ $(1 \leqq i_0 \leqq s)$, dann gilt

$$\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\dots,s)}}^{\varrho} \int_{J_r} \left| \sum_{n=1}^m \psi_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \alpha_r + a_r) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_{r_i}} \int_{J_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n \left(\frac{t - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i} \right) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{\bar{J}_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) \right| dt =$$

$$= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\dots,s)}}^{\varrho} \int_{I_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt \leqq \frac{2}{w_{r_{i_0}}} L_m \left(\{\bar{\varphi}_n\};\ \frac{x - \alpha_{r_{i_0}}}{w_{r_{i_0}}} + a_{r_{i_0}} \right)$$

für $m = 1, \dots, N$, woraus wir

$$\sum_{i=1}^s \int_{J_{r_i}} \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt \right) dx \leqq \tag{56}$$

$$\leqq \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \frac{L_{\mu(w_{r_i}(x - a_{r_i}) + \alpha_{r_i})}(\{\bar{\varphi}_n\};\ x)}{\lambda_{\mu(w_{r_i}(x - a_{r_i}) + \alpha_{r_i})}} dx$$

erhalten. Ist aber $x \in \bar{J}_{r_{i_0}}$ $(1 \leqq i_0 \leqq s)$, dann gilt

$$\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\psi}_n(t) \right| dt = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\dots,s)}}^{\varrho} \int_{J_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \alpha_r + a_r) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_{r_i}} \int_{J_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n \left(\frac{t - \alpha_{r_i}}{w_{r_i}} + a_{r_i} \right) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{\bar{J}_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i}) \right| dt =$$

$$= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_i\ (i=1,\dots,s)}}^{\varrho} \int_{I_r} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt + \sum_{i=1}^s \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{w_{r_i}}\right)^{1/2} \int_{I_{r_i}} \left| \sum_{n=1}^m \bar{\psi}_n(x) \bar{\varphi}_n(t) \right| dt \leqq 2 L_m(\{\bar{\varphi}_n\};\ x - \bar{\alpha}_{r_i} + a_{r_i})$$

für $m=1, \ldots, N$, woraus

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{\bar{I}_{r_i}} \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x)\bar{\psi}_n(t) \right| dt \leqq \sum_{i=1}^{s} \int_{I_{r_i}} \frac{L_{\mu(x-a_{r_i}+\bar{\alpha}_{r_i})}(\{\bar{\varphi}_n\};\ x)}{\lambda_{\mu(x-a_{r_i}+\bar{\alpha}_{r_i})}} dx \tag{57}$$

folgt. Aus (55), (56) und (57) erhalten wir auf Grund von (49), daß

$$\int_0^4 \frac{1}{2\lambda_{\mu(x)}} \left(\int_0^4 \left| \sum_{n=1}^{\mu(x)} \bar{\psi}_n(x)\bar{\psi}_n(t) \right| dt \right) dx \leqq 1 \tag{58}$$

für jede in $[0, 4]$ meßbare Funktion $\mu(x)$ mit ganzzahligen Werten besteht.
Wir setzen endlich

$$\psi_n(x) = 2\bar{\psi}_n(4x) \qquad (n=1, \ldots, N).$$

Weiterhin bezeichnet E die Bildmenge von $\bar{E}$ bei der Transformation $y=x/4$. Auf Grund von (53), (54) und (58) ist es offensichtlich, daß die Funktionen $\psi_n(x)$ und die Menge E alle Forderungen des Hilfssatzes X befriedigen.

Hilfssatz XI. *Es sei* $\lambda_n \nearrow \infty$. *Ist für eine Indexfolge* $(0=)\, n_0 < \ldots < n_k < \ldots$

$$I_1(\{\lambda_n\};\ a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) = I_1(\{\lambda_n\};\underbrace{0, \ldots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \geqq 16\sqrt{2} \quad (k=0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein in $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *mit* (31) *derart, daß die Reihe* (1) *in* $[0, 1]$ *fast überall divergiert.*

Beweis. Durch vollständige Induktion definieren wir eine Indexfolge $(0=)$ $k(0) < \ldots < k(i) < \ldots$, ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, und eine Folge von einfachen Mengen $F_i (\subseteqq [0, 1])$ $(i=1, 2, \ldots)$ mit folgenden Eigenschaften:
Für jedes i gilt

$$\lambda^{-1}_{n_{k(i)}+1} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} (M(j)+1)\right) \leqq 1/8, \tag{59}$$

wobei

$$M(j) = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j)+1}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt$$

ist.
Die Mengen F_i sind stochastisch unabhängig und für jedes i gilt

$$\operatorname{mes}(F_i) \geqq 1/4. \tag{60}$$

Es besteht

$$L_{n_{k(1)}}(\{\varphi_n\};x) \leqq 1, \quad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\};\ x)\, dx \leqq 1/8, \tag{61}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten $1 \leqq \nu(x) \leqq n_{k(1)}$ gebildet ist.

Für jedes i gelten

$$(62) \qquad \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)+1}+1}^{n_{k(i+1)}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

und

$$(63) \qquad \sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leqq 3/4,$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten $n_{k(i)} < \nu(x) \leqq n_{k(i+1)}$ gebildet wird.

Für jedes i gilt

$$(64) \qquad \max_{n_{k(i)} < p \leqq q \leqq n_{k(i+1)}} |a_p \varphi_p(x) + \ldots + a_q \varphi_q(x)| \geqq 1 \qquad (x \in F_i).$$

Es sei $k(1)$ die kleinste positive ganze Zahl mit $\lambda_{n_{k(1)}+1}^{-1} \leqq 1/8$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{8}\,\chi_n(8x) & (0 \leqq x \leqq 1/8), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, n_{k(1)})$, wobei $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann gilt (61). (Siehe z. B. G. Alexits [1], S. 46—50.) Es sei $i_0 (\geqq 0)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die Indizes $k(i)$ $(i=1, \ldots, i_0+1)$, die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k(i_0+1)})$ und die einfachen Mengen F_i $(i=1, \ldots, i_0)$ schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, (61), weiterhin (59) für $i=1, \ldots, i_0+1$, (60), (62), (63) und (64) für $i=1, \ldots, i_0$ erfüllt sind.

Dann können wir eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle I_s $(s=1, \ldots, \sigma)$ angeben derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k(i_0+1)})$ in jedem I_s konstant ist und jede Menge F_i $(i=1, \ldots, i_0)$ die Vereinigung gewisser I_s ist. Die zwei Hälften von I_s bezeichnen wir mit I_s' bzw. I_s''. Wir wenden den Hilfssatz X mit der Folge $\lambda_{n_{k(i_0+1)}+1}, \ldots, \lambda_{n_{k(i_0+1)+1}}$ und mit den Koeffizienten $a_{n_{k(i_0+1)}+1}, \ldots$ $\ldots, a_{n_{k(i_0+1)+1}}$ an. Die entsprechenden Funktionen bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\psi_n(x)$ $(n=n_{k(i_0+1)}+1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1})$ bzw. mit E. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)}+l}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I_s';\, x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I_s'';\, x)$$

$$(l=1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1} - n_{k(i_0+1)})$$

und

$$F_{i_0+1} = \Big(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I_s')\Big) \cup \Big(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I_s'')\Big),$$

wobei im allgemeinen für ein endliches Intervall $I=[a, b]$

$$f(I;x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a<x<b),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

ist und für eine Menge $H\,(\subseteq[0,1])$ $H(I)$ die Bildmenge von H bei der Transformation $y=(b-a)x+a$ bedeutet.

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=n_{k(i_0+1)}+1,\dots,n_{k(i_0+1)+1})$ sind auch Treppenfunktionen und die Menge F_{i_0+1} ist einfach. Die Mengen F_i $(i=1,\dots,i_0+1)$ sind offensichtlich stochastisch unabhängig, weiterhin ist (60) auch für $i=i_0+1$ erfüllt. Durch einfache Rechnung folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}}\left(\int_0^1\left|\sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{\nu(x)}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|dt\right)dx\leqq 1/2 \tag{65}$$

für jede meßbare Funktion $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten $n_{k(i_0+1)}<\nu(x)\leqq n_{k(i_0+1)+1}$. Es sei $n_{k(i_0+2)}$ die kleinste von n_k mit $n_{k(i_0+2)}>n_{k(i_0+1)}$, für die (59) im Falle $i=i_0+2$ besteht. Es sei $J_1,\dots,J_\varrho$ eine Zerlegung von $[0,1]$ in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq n_{k(i_0+1)+1})$ in jedem J_r konstant ist. Die zwei Hälften von J_r bezeichnen wir mit J_r' bzw. mit J_r''. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)+1}+l}(x)=\sum_{r=1}^{\varrho}\chi_l(J_r';x)-\sum_{r=1}^{\varrho}\chi_l(J_r'';x)\qquad (l=1,\dots,n_{k(i_0+2)}-n_{k(i_0+1)+1}),$$

wobei $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann ist

$$\int_0^1\left|\sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}+1}^{m}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|dt=1\quad (0\leqq x\leqq 1;\ n_{k(i_0+1)+1}<n\leqq n_{k(i_0+2)}). \tag{66}$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq n_{k(i_0+2)})$ ein in $[0,1]$ orthonormiertes System, (64) ist auch für $i=i_0+1$ erfüllt, weiterhin folgt aus (65) und (66), daß (62) und (63) für $i=i_0+1$ bestehen. Die Folge $\{k(i)\}$, das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ und die Mengenfolge $\{F_i\}_1^\infty$ mit den erwähnten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Ist $x\in\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} F_i$, dann ist die Reihe (1) wegen (64) divergent. Da die Mengen F_i stochastisch unabhängig sind und (60) für jedes i besteht, ergibt sich durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\operatorname{mes}(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} F_i)=1$ ist. Die Reihe (1) divergiert also in $[0,1]$ fast überall.

Es sei $\nu(x)$ eine meßbare Funktion mit ganzzahligen Werten. Ist $n_{k(i)} < \nu(x) \leqq \leqq n_{k(i+1)}$ $(i = 1, 2, \dots)$, dann gilt, auf Grund von (59), (62) und (63),

$$\frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x) \leqq \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}+1}} \Bigg(L_{n_{k(1)}}(\{\varphi_n\}; x) + \tag{67}$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j)+1}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)+1}+1}^{n_{k(j+1)}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \right\} \Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}+1}} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} (M(j)+1) \right) + \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{8} + \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt.$$

E bezeichnet die Untermenge von $[0, 1]$, in der $\nu(x) \leqq n_{k(1)}$ ist und es sei $CE = = [0, 1] \setminus E$. Dann ist, auf Grund von (61), (62) und (67),

$$\int_0^1 \frac{L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{\nu(x)}} dx \leqq \int_E \frac{L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{\nu(x)}} dx + \frac{1}{8} \int_{CE} dx +$$

$$+ \int_{CE} \frac{dx}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq 1.$$

Also ist (31) erfüllt.

Hilfssatz XII. *Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gilt dann und nur dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{N\to\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n+1}, \dots, a_{n+N}) \right) = 0. \tag{68}$$

Beweis. Ist (68) erfüllt, dann gibt es eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \infty. \tag{69}$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System mit (31). Aus (69) folgt

$$\sum_{k=}^{\infty} \int_0^1 \left(\max_{n_k < i \leqq j \leqq n_{k+1}} |a_i\varphi_i(x) + \dots + a_j\varphi_j(x)| \right) dx < \infty. \tag{70}$$

Bezeichnet $s_n(x)$ die n-te Partialsumme von (1), dann ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x)|\, dx < \infty$$

nach (70), woraus wir erhalten, daß $\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x)$ fast überall existiert. Es sei $n_k < n < n_{k+1}$. Aus (70) folgt weiterhin

$$|s_n(x) - s_{n_k}(x)| \leqq \max_{n_k < i \leqq j \leqq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

fast überall, womit $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ bewiesen ist.

Ist aber (68) nicht erfüllt, dann gibt es eine Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ mit $I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \geqq \sigma > 0$ $(k=0, 1, \ldots)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \geqq 16\sqrt{2}$ $(k=0, 1, \ldots)$ angenommen werden. Durch Anwendung des Hilfssatzes XI erhalten wir $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$.

Bemerkung. *Aus* (68) *folgt* $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ *ohne der Bedingung* $\lambda_n \nearrow \infty$.

Für eine Folge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \inf \sum_{k=0}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}),$$

wobei das Infimum für alle unendlichen Indexfolgen $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ gebildet wird. Auf Grund von (34) und (36) folgt

$$\frac{1}{C}|a_{n_0}| \leqq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (n_0 = 1, 2, \ldots), \tag{71}$$

wobei C eine positive, absolute Konstante bedeutet. Auf Grund von (33) kann $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \|\{a_n\}; \infty\|_1$ leicht eingesehen werden. Aus (33) folgt $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \leqq \|\{a_n\}; \{\mu_n\}\|_1$ $(\lambda_n \leqq \mu_n;\ n = 1, 2, \ldots)$.

Satz III. *Es sei* $\lambda_n \nearrow \infty$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ *gilt dann und nur dann, wenn* $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 < \infty$. $M(\{\lambda_n\})$ *ist mit der Norm* $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ *ein Banachraum.*

Beweis. Ist $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 < \infty$, dann gilt (68), woraus sich auf Grund des Hilfssatzes XII $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ ergibt. Ist aber $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \infty$, dann kann (68) nicht bestehen und aus dem Hilfssatz XII folgt $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$. $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ ist eine Norm in $M(\{\lambda_n\})$. Dazu sollen wir nun die Dreiecksungleichung beweisen.

Wir werden zeigen, daß im Falle $\lambda_n \nearrow \infty$

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \lim_{N\to\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_1, \ldots, a_N) \qquad (\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})) \tag{72}$$

besteht, woraus sich die Dreiecksungleichung ergibt. Im Falle $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gibt es nach der Definition von $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1$ eine Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ mit

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\}; a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \leqq \|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon, \tag{73}$$

wobei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben ist. Es sei k_0 so groß, daß

$$(74) \qquad \sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\};\, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) < \varepsilon.$$

Wegen (35) folgt aus (73)

$$\|\{a_n\};\, \{\lambda_n\}\|_1 \leqq I_1(\{\lambda_n\};\, a_1, \ldots, a_{n_{k_0+1}}) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_1(\{\lambda_n\};\, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \leqq$$

$$\leqq \|\{a_n\};\, \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon.$$

Daraus und aus (74) ergibt sich

$$\|\{a_n\};\{\lambda_n\}\|_1 - \varepsilon \leqq I_1(\{\lambda_n\};\, a_1, \ldots, a_{n_{k_0+1}}) \leqq \|\{a_n\};\{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon.$$

Da $I_1(\{\lambda_n\};\, a_1, \ldots, a_N) \leqq I_1(\{\lambda_n\};\, a_1, \ldots, a_{N+1})$ $(N=1, 2, \ldots)$ ist, erhalten wir daraus

$$\|\{a_n\};\, \{\lambda_n\}\|_1 - \varepsilon \leqq \lim_{N\to\infty} I_1(\{\lambda_n\};\, a_1, \ldots, a_N) \leqq \|\{a_n\};\, \{\lambda_n\}\|_1 + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, folgt (72).

Die Vollständigkeit von $M(\{\lambda_n\})$ ergibt sich leicht auf Grund von (71), daraus, daß $I_1(\{\lambda_n\};\, c_1, \ldots, c_N)$ in den Variablen $c_1, \ldots, c_N$ stetig ist. Damit haben wir Satz III bewiesen.

Aus den Beweisen der Hilfssätze XI und XII erhalten wir: *Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. Ist $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$, dann gibt es ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ mit* (31) *derart, daß die Reihe* (1) *in* $[0, 1]$ *fast überall divergiert.*

Aus dem Satz III folgt: *Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$. Ist $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$, dann gibt es eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\mu_n\}$ mit $\{a_n\mu_n\} \in M(\{\lambda_n\})$.*

Aus dem Hilfssatz XII und (72) ergibt sich: *$M(\{\lambda_n\})$ $(\lambda_n \nearrow \infty)$ ist separabel.* (Die endlichen rationalen Folgen liegen in $M(\{\lambda_n\})$ überall dicht.)

Wir erwähnen einige Probleme. Wie kann $M(\{\lambda_n\})$ mit $\lambda_n = O(1)$ charakterisiert werden? Gelten die entsprechenden Behauptungen anstatt $p=1$ für $1<p\leqq 2$? Ist $\|\{a_n\};\{\lambda_n\}\|_1 \leqq \|\{b_n\};\{\lambda_n\}\|_1$ $(|a_n| \leqq |b_n|;\, n=1, 2, \ldots)$ richtig? Gibt es im Falle $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$ eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\mu_n\}$ mit $\{\mu_n a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$? Gilt (72) für jede Folge $\{a_n\}$?

Um noch einen weiteren Satz zu beweisen, werden wir einige Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz XIII. *Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es ein in* $[0, 5]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $f_l(p;\, x)$ $(l=1, \ldots, 2p)$ mit folgenden Eigenschaften: Es gilt*

$$\int_0^5 \left| \sum_{k=1}^{n} f_l(p;\, x) f_l(p;\, t) \right| dt \leqq A \log^2 p \qquad (0 \leqq x \leqq 5;\, n=1, \ldots, 2p)$$

und für jedes $x \in [2, 3]$ *existiert ein Index* $m(x)$ $(<2p)$ *derart, daß die Funktionswerte* $f_l(p; x)$ $(l=1, \ldots, m(x))$ *positiv sind und*

$$\sum_{l=1}^{m(x)} f_l(p; x) \geqq B\sqrt{p}\log p$$

besteht, wobei A und B positive, absolute Konstanten bedeuten.

Hilfssatz XIII ist bekannt. (Siehe K. TANDORI [4].)

Hilfssatz XIV. *Es seien* $p(\geqq 2)$, q *natürliche Zahlen und* $c \geqq 1$. *Dann gibt es ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $g_l(c, p; q; x)$ $(l=1, \ldots, 2pq)$ *mit folgenden Eigenschaften. Es gilt*

$$\int_0^1 \left| \sum_{l=1}^{n} g_l(c, p, q; x) g_l(c, p, q; t) \right| dt \leqq A \log^2 p \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n=1, \ldots, 2pq),$$

es gibt eine einfache Menge $E\,(\subseteqq [0, 1])$ *mit* $\operatorname{mes}(E) = 1/5c$ *derart, daß für jedes* $x \in E$ *ein Index* $m(x)$ $(<2pq)$ *mit* $g_l(c, p, q; x) \geqq 0$ $(l=1, \ldots, m(x))$ *und*

$$\sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c, p, q; x) \geqq \sqrt{5}\, B\sqrt{cpq}\, \log p$$

existiert, wobei A und B positive, absolute Konstanten sind.

BEWEIS. Wir wenden den Hilfssatz XIII im Falle p an. Wir setzen

$$g_{2kp+l}(c, p, q; x) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{5qc}\, f_l(p, 5qc(x - k/qc)) & (k/qc \leqq x < (k+1)/qc;\ k=0, \ldots, q-1), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l=1, \ldots, 2p)$. Es sei

$$E = \bigcup_{k=0}^{q-1} \left[\frac{k}{qc} + \frac{2}{5qc}, \frac{k}{qc} + \frac{3}{5qc}\right].$$

Diese Funktionen und diese Menge befriedigen alle Forderungen des Hilfssatzes XIV.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende, von unten konkave Folge mit $\lambda_1 \geqq 1$ und $\lambda_n \leqq (\log n)^2$ $(n \geqq 2)$. (Im folgenden verwenden wir Logarithmus mit der Basis 2.) Die Indexfolge $\{m_k\}$ definieren wir folgenderweise. Es sei $m_1 = 1$ und m_{k+1} sei die natürliche Zahl mit $\lambda_{m_{k+1}} > 2\lambda_{m_k+1}$ und $\lambda_{m_{k+1}-1} \leqq 2\lambda_{m_k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Wegen der Konkavität gilt

$$\frac{\lambda_{2m_k} - \lambda_{m_k+1}}{m_k - 1} \leqq \frac{\lambda_{m_k+1} - \lambda_{m_1}}{m_k - m_1 + 1},$$

woraus

$$\lambda_{2m_k} - \lambda_{m_k+1} \leqq \frac{m_k - m_1}{m_k} \lambda_{m_k+1} - \frac{m_k - m_1}{m_k} \lambda_{m_1} \leqq \lambda_{m_k+1}$$

folgt. Nach der Definition von m_{k+1} gilt also $m_{k+1} > 2m_k$ $(k \geqq 2)$. Daraus erhalten wir

$$\log^2 (m_{k+1} - m_k) > \log^2 m_k \geqq \lambda_{m_k} \qquad (k = 2, 3, \dots).$$

Ist k genügend groß, dann gibt es eine natürliche Zahl $\bar{q}_k$ mit

$$\frac{\lambda_{m_k}}{4} \leqq A \log^2 \left[\frac{m_{k+1} - m_k}{2\bar{q}_k}\right] \leqq \frac{\lambda_{m_k}}{3}, \tag{75}$$

wobei A die im Hilfssatz XIV erwähnte Konstante ist und $[\alpha]$ den ganzen Teil von α bezeichnet. Ist k genügend groß, dann besteht

$$\lambda_{m_k}/4 \geqq 1. \tag{76}$$

Nach der Definition von m_k gilt $\lambda_{m_k} > 2^{k-1} \lambda_{m_1+1}$ $(k = 2, 3, \dots)$. Ist k genügend groß, dann erhalten wir durch einfache Rechnung

$$\frac{1}{3} (\lambda_{m_1} + \dots + \lambda_{m_k}) + (k+2) \leqq \frac{1}{2} \lambda_{m_{k+1}} \qquad (k = 0, 1, \dots). \tag{77}$$

Wir bezeichnen der Reihe nach mit $n_1, n_2, \dots$ diejenigen Indizes m_k, für die (75), (76) und (77) bestehen; mit $q_1, q_2, \dots$ bezeichnen wir der Reihe nach die entsprechenden $\bar{q}_k$ $(n_0 = 1)$. Dann gelten

$$\lambda_{n_k}/4 \geqq 1 \qquad (k = 1, 2, \dots), \tag{78}$$

$$\frac{\lambda_{n_k}}{4} \leqq A \log^2 \left[\frac{n_{k+1} - n_k}{2q_k}\right] \leqq \frac{\lambda_{n_k}}{3} \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{79}$$

und

$$\frac{1}{3} (\lambda_{n_1} + \dots + \lambda_{n_k}) + (k+2) \leqq \frac{1}{2} \lambda_{n_{k+1}} \qquad (k = 0, 1, \dots). \tag{80}$$

Hilfssatz XV. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende, von unten konkave Folge mit $\lambda_1 \geqq 1$ und $\lambda_n = O(\log^2 n)$. Befriedigt die positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{a_n\}$ die Bedingung*

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n^2 \leqq C a_{n_{k+1}-1}^2 (n_{k+1} - n_k) \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

mit einer positiven Konstante C und gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n = \infty,$$

dann gibt es ein in $[0, 1]$ *orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *mit* (32) *derart, daß die Reihe* (1) *in* $[0, 1]$ *fast überall divergiert.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda_n \leqq \log^2 n$ $(n \geqq 2)$ vorausgesetzt werden. Es sei

$$p_k = \left[\frac{n_{k+1} - n_k}{2q_k}\right] \quad \text{und} \quad c_k = \left(\min \left(1, \lambda_{n_k} (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}-1}^2\right)\right)^{-1} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Aus unseren Annehmen folgt

(81) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} = \infty.$$

Durch vollständige Induktion werden wir ein in [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ und eine Folge der einfachen Mengen $E_i(\subseteqq [0, 1])$ $(i=1, 2, \ldots)$ definieren mit folgenden Eigenschaften:

Die Mengen E_i sind stochastisch unabhängig und für $i=1, 2, \ldots$ gilt

(82) $$\operatorname{mes}(E_i) = 1/5c_i;$$

Es gilt

(83) $$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ 1 \leqq m < n_1)$$

und für jedes $i=1, 2, \ldots$ besteht

(84) $$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_i}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq \frac{\lambda_{n_i}}{3} + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1;\ n_i \leqq m < n_{i+1});$$

Für jedes $i=1, 2, \ldots$ gilt

(85) $$\max_{n_i \leqq p \leqq q < n_{i+1}} |a_p\varphi_p(x) + \ldots + a_q\varphi_q(x)| \geqq \sqrt{5}\,\frac{B}{4\sqrt{A}} \qquad (x \in E_i),$$

wobei A und B die im Hilfssatz XIV erwähnten Konstanten bedeuten.

Es sei $\varphi_n(x) = \chi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_1-1)$, wo $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann gilt (83). Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_{k_0}-1;\ k_0 \geqq 1)$ und die einfachen Mengen $E_i(\subseteqq [0, 1])$ $(i=1, \ldots, k_0-1)$ schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, und (83), weiterhin (82), (84) und (85) für $i=1, \ldots, k_0-1$ erfüllt sind.

Dann gibt es eine Zerlegung von [0, 1] in paarweise disjunkte Intervalle I_r $(r=1, \ldots, \varrho)$ derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_{k_0}-1)$ in jedem I_r konstant ist und jede Menge E_i $(i=1, \ldots, k_0-1)$ die Vereinigung gewisser I_r ist. Die zwei Hälften von I_r bezeichnen wir mit I_r' bzw. mit I_r''. Wir wenden den Hilfssatz XIV im Falle $q=q_{k_0}$, $p=p_{k_0}$, $c=c_{k_0}$ an. Die entsprechenden Funktionen bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\bar{\varphi}_n(x)$ $(n=1, \ldots, 2p_{k_0}q_{k_0})$ bzw. mit $\bar{E}$. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k_0}+n-1}(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\varphi}_n(I_r'; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\varphi}_n(I_r''; x) \qquad (n=1, \ldots, 2p_{k_0}q_{k_0})$$

und

$$E_{k_0} = \Big(\bigcup_{r=1}^{\varrho} \bar{E}(I_r')\Big) \cup \Big(\bigcup_{r=1}^{\varrho} \bar{E}(I_r'')\Big).$$

Die Menge E_{k_0} ist einfach und die Mengen E_i $(i=1, \ldots, k_0)$ sind offensichtlich stochastisch unabhängig. Auf Grund des Hilfssatzes XIV gilt (82) für $i=k_0$. Die

Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n_{k_0} \leqq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0})$ sind Treppenfunktionen. Auf Grund von (79) gilt

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k_0}}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq \frac{\lambda_{n_{k_0}}}{3} \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\; n_{k_0} \leqq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}). \tag{86}$$

Auf Grund der Positivität und der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ ergibt sich durch Anwendung des Hilfssatzes XIV, mit Rücksicht auf (78) und (79),

$$\max_{n_{k_0} \leqq p \leqq q < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0}} |a_p\varphi_p(x) + \ldots + a_q\varphi_q(x)| \geqq \sqrt{5}\,\frac{B}{4\sqrt{A}} \qquad (x \in E_{k_0}). \tag{87}$$

Nach der Definition von n_k gilt $n_k + 2p_{k_0}q_{k_0} < n_{k_0+1} - 1$. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0})$ Treppenfunktionen sind, können wir eine Zerlegung von $[0, 1]$ in paarweise disjunkte Intervalle J_s $(s = 1, \ldots, \sigma)$ angeben derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n < n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0})$ in jedem J_s konstant ist. Die zwei Hälften von J_s bezeichnen wir mit J_s' bzw. mit J_s''. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k_0}+2p_{k_0}q_{k_0}+n-1}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \chi_n(J_s'; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \chi_n(J_s''; x) \;\; (n = 1, \ldots, n_{k_0+1} - n_{k_0} - 2p_{k_0}q_{k_0}),$$

wobei $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet. Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k_0+1} - 1)$ ein orthonormiertes System in $[0, 1]$. Aus (87) folgt, daß (85) für $i = k_0$ besteht. Weiterhin gilt offensichtlich

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k_0}+2p_{k_0}q_{k_0}}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\; n_{k_0} + 2p_{k_0}q_{k_0} \leqq m < n_{k_0+1}).$$

Daraus und aus (86) folgt, daß (84) für $i = k_0$ besteht.

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ und die Mengen E_i mit den erwähnten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Gilt $x \in \overline{\lim_{i\to\infty}} E_i$, dann ist die Reihe (1) wegen (85) divergent. Da die Mengen E_i stochastisch unabhängig sind, ergibt sich aus (81) und (82), durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß mes $(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i) = 1$ ist. Also divergiert die Reihe (1) in $[0, 1]$ fast überall. Aus (80), (83) und (84) erhalten wir leicht, daß (32) für dieses System $\{\varphi_n(x)\}$ erfüllt wird.

Satz IV. *Es gilt*

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq A_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \right)^{1/2} \tag{88}$$

mit einer positiven, absoluten Konstante A_1. Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende, von unten konkave Folge mit $\lambda_n = O(\log^2 n)$. Befriedigt die positive, monoton *zu* 0 *strebende Folge* $\{a_n\}$ *die Bedingung*

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}{}' a_n^2 \leqq C a_{n_{k+1}-1}^2 (n_{k+1}-n_k) \qquad (k=0,1,\ldots)$$

mit einer positiven, absoluten Konstante C, *dann gilt*

$$\|\{a_n\};\{\lambda_n\}\|_1 \geqq A_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n\right)^{1/2}, \tag{89}$$

wo A_2 *eine von der Folge* $\{a_n\}$ *unabhängige Konstante ist.*

BEWEIS. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty$ und $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ bezeichne ein in [0, 1] orthonormiertes System mit (31). Die n-te Partialsumme der Reihe (1) bzw. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a_n \varphi_n(x)$ bezeichnen wir mit $s_n(x)$ bzw. mit $s_n^*(x)$. Durch Anwendung der Methode von S. KACZMARZ—A. N. KOLMOGOROFF—G. SELIVERSTOFF (siehe z. B. G. ALEXITS [1], S. 172—174) kann

$$|s_n^*(x)| \leqq \sqrt{\lambda_n}\, F_N(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n=N, N+1, \ldots) \tag{90}$$

mit

$$\int_0^1 F_N(x)\,dx \leqq M \left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \lambda_n\right)^{1/2} \tag{91}$$

bewiesen werden, wobei $M(\geqq 1)$ eine absolute Konstante ist. Für $n \geqq m \geqq N$ setzen wir

$$s_n(x)-s_{m-1}(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\lambda_k} a_k \varphi_k(x) =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1}{}' \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right) |s_k^*(x)-s_{m-1}^*(x)| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} |s_n^*(x)-s_{m-1}^*(x)|.$$

Daraus und aus (90) ergibt sich

$$|s_n(x)-s_{m-1}(x)| \leqq \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right) |s_k^*(x)-s_{N-1}^*(x)| +$$

$$+ |s_{m-1}^*(x)-s_{N-1}^*(x)| \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right) + 2F_N(x) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right) |s_k^*(x)-s_{N-1}^*(x)| + 4F_N(x).$$

Durch einfache Rechnung erhalten wir

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \right) |s_k^*(x) - s_{N-1}^*(x)| \right) dx \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k a_k^2}\,.$$

Nach (91) ist also

$$\int_0^1 \big(\sup_{N \leqq m \leqq n} |s_n(x) - s_{m-1}(x)| \big)\, dx \leqq \left(4M + \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right) \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k a_k^2}\,,$$

woraus

(92) $$\lim_{n\to\infty} \big(\lim_{N\to\infty} I_1(\{\lambda_n\};\, a_{n+1}, \ldots, a_N) \big) = 0$$

und

(93) $$\lim_{N\to\infty} I_1(\{\lambda_n\};\, a_1, \ldots, a_N) \leqq 5M \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \right)^{1/2}$$

sich ergeben. Aus (92) erhalten wir durch Anwendung der Bemerkung nach dem Hilfssatz XII $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$. Nach (72) und (93) ergibt sich (88).

Es sei $\|\{a_n\};\{\lambda_n\}\|_1 < \infty$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty$ auf Grund des Hilfssatzes XV. Also besteht (89) mit einer Konstante A_2. Wir werden zeigen, daß A_2 von der Folge $\{a_n\}$ unabhängig bestimmt werden kann. Im entgegengesetzten Falle gibt es Folgen $\{a_n(m)\}_1^{\infty}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, die die Forderungen des Satzes IV befriedigen, derart, daß

$$\|\{a_n(m)\};\{\lambda_n\}\|_1 \leqq \frac{1}{m^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(m) \lambda_n \right)^{1/2} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Man kann $\|\{a_n\};\{\lambda_n\}\|_1 = 1/m^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$ voraussetzen. Dann gilt

$$\sum_{k=N}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a^2_{n_{k+1}-1}(m) \lambda_{n_k} \to \infty \qquad (m \to \infty;\ N = 1, 2, \ldots).$$

Auf Grund dieser Relation und von (71) kann man durch Induktion zwei Indexfolgen $(0=)\,\nu_0 < \ldots < \nu_k < \ldots$ und $(1 \leqq)\, m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ mit

(94) $$\sum_{k=\nu_{l-1}}^{\nu_l - 1} (n_{k+1} - n_k) a^2_{n_{k+1}-1}(m_l) \lambda_{n_k} \geqq 1 \qquad (l = 1, 3, \ldots)$$

und

$$a_{n_{\nu_l}-1}(m_l) \geqq a_{n_{\nu_l}}(m_{l+1}) \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

angeben. Es sei $c_{n_{\nu_l}+n} = a_{n_{\nu_l}+n}(m_{l+1})$ $(n = 0, \ldots, n_{\nu_{l+1}} - n_{\nu_l} - 1;\ l = 1, 2, \ldots)$ und $c_n = a_n(m_1)$ $(1 \leqq n \leqq n_{\nu_1})$. Für die Folge $\{c_n\}$ sind die Bedingungen des Hilfssatzes

XV erfüllt und auf Grund von (94) ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\lambda_n=\infty$. Durch Anwendung des Hilfssatzes XV ergibt sich also $\{c_n\}\notin M(\{\lambda_n\})$.

Es seien

$$\{c_n(1)\}_1^\infty = \{a_1(m_1), \dots, a_{n_{\nu_1}-1}(m_1), 0, \dots\},$$

$$\{c_n(l+1)\}_1^\infty = \{\overbrace{0, \dots, 0}^{n_{\nu_l}-1}, a_{n_{\nu_l}}(m_{l+1}), \dots, a_{n_{\nu_{l+1}}-1}(m_{l+1}), 0, \dots\}$$

$(l=1, 2, \dots)$. Offensichtlich besteht

$$\{c_n\}_1^\infty = \sum_{l=1}^{\infty} \{c_n(l)\}_1^\infty$$

und

$$\|\{c_n(l)\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \|\{a_n(m_l)\}; \{\lambda_n\}\|_1 \qquad (l=1, 2, \dots).$$

Auf Grund dieser Relationen erhalten wir

$$\|\{c_n\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \|\{c_n(l)\}; \{\lambda_n\}\|_1 \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \|\{a_n(m_l)\}; \{\lambda_n\}\|_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l^2} < \infty,$$

woraus sich $\{c_n\}\in M(\{\lambda_n\})$ ergibt. Die Ungleichung (89) besteht also mit einer von der Folge $\{a_n\}$ unabhängigen, positiven Konstante A_2. Damit haben wir Satz IV bewiesen.

Literatur

G. Alexits, [1] Convergence problems of orthogonal series, *Budapest*, 1961.

K. Tandori, [1] Über die Konvergenz der Orthogonalreihen II, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 219–232.

[2] Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 139–151.

[3] Über die orthogonalen Funktionen, I., *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), 57–130.

[4] Über die orthogonalen Funktionen V (Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *Acta Sci. Math. Szeged*, **20** (1959), 1–13.

(Eingegangen am 13. Juli 1964.)