Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus I. Die lokalen Lösungen

Von S. GOŁAB (Kraków) und L. LOSONCZI (Debrecen)

Einleitung

Die bekannte Funktionalgleichung der Funktion $\operatorname{Arc}\cos x$ ([1], S. 74)

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right] \tag{1}$$

wurde Gegenstand der Forschung seitens verschiedener Verfasser, u. a. auch seitens M. GHERMANESCU ([2]). Die bisher angegebenen Ergebnisse sind aber — jedenfalls wenn wir keine mehrdeutigen Funktionen in Betracht ziehen — nicht exakt, teilweise wegen der Nichtbeachtung des Zeichens in der Formel $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, teilweise wegen der Nichtbeachtung der fundamentalen Tatsache, daß man über eine Lösung der Funktionalgleichung nur dann sprechen kann, wenn der *Definitionsbereich der Gleichung* erklärt ist ([3]).

Die Bemerkung, daß die Funktionalgleichung (1) nur die triviale Lösung $\varphi(x)\equiv 0$ zuläßt, falls sie im ganzen Quadrat

$$Q:\begin{cases}-1\leqq x\leqq +1\\ -1\leqq y\leqq +1\end{cases} \tag{2}$$

erfüllt sein soll, hat den ersten Verfasser zu einer genaueren Untersuchung veranlaßt. Die entsprechenden Resultate, die auf der Hilfsidentität

$$\arcsin x+\arcsin y=\operatorname{sgn}(x+y)\arcsin\left[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]+\Omega \tag{3}$$

mit

$$\Omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{für}\quad x+y\geqq 0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & \text{für}\quad x+y<0\end{cases}$$

basierten, wurden auf der zweiten Konferenz über Funktionalgleichungen in Sárospatak (Mai 1963) vorgetragen. Der zweite Verfasser bemerkte danach, daß sich das ganze Verfahren wesentlich vereinfachen läßt, indem man eine Transformation der Variabeln ausführt, und so erscheinen diese Ergebnisse in einfacherer Form als eine gemeinsame Arbeit. Die Zurückführung des Problems auf die Gleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi(ax+by+c) \tag{4}$$

hat es gleichzeitig ermöglicht die ursprüngliche Regularitätsvoraussetzung (stückweise Differenzierbarkeit der Lösung) wesentlich abzuschwächen.

Die Gleichung (4) gehört zu dem bekannten Typus

$$A\varphi(x)+B\varphi(y)+C = \varphi(ax+by+c) \tag{5}$$

(siehe die Monographie von J. ACZÉL [1], Seiten 68 und folgende). Sie wurde aber bisher unter der (stillschweigenden) Annahme gelöst, daß sie auf der ganzen Ebene (x, y) erfüllt sein soll. Bei uns ist dies nun nicht der Fall und folglich spielt der folgende Hilfssatz bei unserer Methode eine grundlegende Rolle.

§ 1.

Hilfssatz. *Es sei die Funktionalgleichung*

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi(ax+by+c) \tag{4}$$

gegeben, wo $a\neq 0$, $b\neq 0$, c drei gegebene reelle Zahlen sind, während φ die gesuchte Funktion einer Veränderlichen ist. Es sei D ein offener, zusammenhängender Bereich der (x, y)-Ebene. Es bezeichne ferner D_x und D_y entsprechend die orthogonale Projektion des Bereiches D auf die x-Achse bzw. y-Achse und es sei D_z der Wertbereich der Funktion

$$z = ax+by+c$$

wenn (x, y) in D variiert.

Alle stetigen[1]) *Lösungen $\varphi(u)$ der Gleichung* (4), *die sie in D erfüllen*[2]), *haben die Form*

$$\varphi(u) = \begin{cases} A_1 u + B_1 & \text{für} \quad u \in D_x \\ \dfrac{b}{a} A_1 u + B_2 & \text{für} \quad u \in D_y \\ \dfrac{1}{a} A_1 u + B_1 + B_2 - \dfrac{1}{a} A_1 c & \text{für} \quad u \in D_z \end{cases} \tag{6}$$

wo A_1, B_1, B_2 beliebige Konstanten sind, falls die Mengen D_x, D_y, D_z keine gemeinsamen Punkte haben. In anderen Fällen bestehen zwischen diesen Konstanten gewisse Relationen und zwar

---

[1]) Man könnte etwas weniger voraussetzen, aber ohne irgendwelche Regularitätsannahmen über φ kann man nicht auskommen.

[2]) Die Aussage, daß die Funktion φ in D die Funktionalgleichung (4) erfüllt, bedeutet, daß sie in der Menge $\Delta = D_x \cup D_y \cup D_z$ definiert ist und daß für jeden Punkt $(x, y) \in D$ die Gleichung (4) erfüllt ist (vergl. [3]).

1. *Ist der Durchschnitt von D_x und D_y nicht leer, so ist $B_2 = B_1$ und darüber hinaus $A_1 = 0$ falls $a \neq b$.*

2. *Ist der Durchschnitt von D_x und D_z nicht leer, so ist $B_2 = \frac{A_1}{a} c$ und darüber hinaus $A_1 = 0$ falls $a \neq 1$.*

3. *Ist der Durchschnitt von D_y und D_z nicht leer, so ist $B_1 = \frac{A_1}{a} c$ und darüber hinaus $A_1 = 0$ falls $b \neq 1$.*

Daraus folgt insbesondere, daß im Falle, wenn alle drei Mengen D_x, D_y, D_z gemeinsame Punkte haben, die Relationen $B_1 = B_2 = \frac{A_1}{a} c$, wobei A_1 beliebig ist, dann und nur dann bestehen, wenn $a = b = 1$ ist. Sonst muß A_1 gleich Null sein.

Beweis. Wir werden erstens zeigen, daß D_z ein offenes Intervall sein muß. D_z ist gewiß zusammenhängend, da D zusammenhängend ist und die Funktion $ax + by + c$ stetig ist. Nehmen wir an, daß $z_0 \in D_z$. Es sei $z_0 = ax_0 + by_0 + c$. Die Funktion $ax + by + c$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ nimmt in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) sowohl größere als auch kleinere Werte als z_0 an. Daraus folgt, daß eine ganze Umgebung des Punktes (x_0, y_0) zu D_z gehört, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nehmen wir ein solches Rechteck $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2$, das ganz in D liegt [3]) und integrieren wir die Gleichung (4) beiderseits bezüglich x über ein in (x_1, x_2) liegendes Intervall $[x_1', x_2']$. Wir erhalten dann

$$\int_{x_1'}^{x_2'} \varphi(x)\, dx + \int_{x_1'}^{x_2'} \varphi(y)\, dx = \int_{x_1'}^{x_2'} \varphi(ax + by + c)\, dx$$

oder, wenn wir mit Φ das unbestimmte Integral von φ

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\, dx$$

bezeichnen,

$$\Phi(x_2') - \Phi(x_1') + \varphi(y)(x_2' - x_1') = \frac{1}{a}[\Phi(ax_2' + by + c) - \Phi(ax_1' + by + c)].$$

Wir differenzieren diese Identität beiderseits in bezug auf y (was unter unseren Annahmen erlaubt ist) und erhalten auf diese Weise

$$\varphi'(y)(x_2' - x_1') = \frac{b}{a}[\varphi(ax_2' + by + c) - \varphi(ax_1' + by + c)].$$

Auf Grund der Funktionalgleichung (4) ist aber die rechte Seite gleich

$$\frac{b}{a}[\varphi(ax_2' + by + c) - \varphi(ax_1' + by + c)] = \frac{b}{a}[\varphi(x_2') - \varphi(x_1')].$$

---

[3]) Ein solches Rechteck existiert sicher, weil D offen ist.

Es gilt folglich

$$\varphi'(y) = \frac{b}{a}\,\frac{\varphi(x_2')-\varphi(x_1')}{x_2'-x_1'} \quad \text{für} \quad y_1<y<y_2.$$

Da die rechte Seite von y nicht abhängt, folgt, daß $\varphi(y)$ in (y_1, y_2) linear sein muß, d. h. $\varphi(t) = A_2t+B_2$ für $t\in(y_1, y_2)$.

Jetzt zeigen wir, daß φ auch in $D_y=(\alpha, \beta)$ linear ist. Es sei

$$\beta^* \overset{\text{def}}{=} \sup_{y\in(\alpha,\beta)} \{y\colon \varphi(t) = A_2t+B_2 \quad \forall\, t\in(y_1, y)\} \tag{7}$$

(β^* ist also der größte y-Wert derart, daß $\varphi(t) = A_2t+B_2$ im ganzen Intervall (y_1, y) gilt). Wenn $\beta^*\in(y_1, \beta)$ wäre, dann gäbe es zwei Zahlen x^*, $\varepsilon\ (>0)$ so, daß $(x^*, \beta^*)\in D$ und sogar $U(x^*, \beta^*)\overset{\text{def}}{=}\{(x, y)\colon |x-x^*|<\varepsilon,\ |y-\beta^*|<\varepsilon\}$ in D enthalten sein würde. Auf Grund dessen was oben gezeigt wurde, würde $\varphi(t) = A_2't+B_2'$ für $t\in(\beta^*-\varepsilon, \beta^*+\varepsilon)$ mit $A_2 = A_2'$, $B_2 = B_2'$ wegen der Relation $(\beta^*-\varepsilon, \beta^*+\varepsilon)\cap\cap(y_1, \beta^*) = (\max\{\beta^*-\varepsilon, y_1\}, \beta^*)$ gelten. Dies würde bedeuten, daß

$$\varphi(t) = A_2t+B_2 \quad \text{für} \quad t\in(y_1, \beta^*+\varepsilon),$$

was wegen (7) unmöglich ist. Es gilt also $\beta^*=\beta$. Ebenso kann man beweisen, daß $\alpha^*\overset{\text{def}}{=}\inf\{y\colon\varphi(t) = A_2t+B_2\ \forall\ t\in(y, \beta)\}$ gleich α ist. Daraus folgt $\varphi(t) = A_2t+B_2$ für $t\in D_y$. Die Richtigkeit der Formel $\varphi(t) = A_1t+B_1$ für $t\in D_x$ kann ähnlich bewiesen werden.

Nach der Funktionalgleichung (4) ergibt sich

$$\varphi(ax+by+c) = A_1x+B_1+A_2y+B_2$$

für $x\in D_x$, $y\in D_y$, oder mit $z = ax+by+c\in D_z$ $\left(\text{bzw. } x = \frac{z-by-c}{a} \text{ bzw. } y = \frac{z-ax-c}{b}\right)$

$$\varphi(z) = \frac{A_1}{a}z+\left(A_2-A_1\frac{b}{a}\right)y+B_1+B_2-A_1\frac{c}{a}, \tag{8}$$

bzw.

$$\varphi(z) = \frac{A_2}{b}z+\left(A_1-A_2\frac{a}{b}\right)x+B_1+B_2-A_2\frac{c}{b}. \tag{9}$$

Da die linken Seiten nur von z abhängen, müssen die Relationen $A_2-A_1\dfrac{b}{a} = A_1-A_2\dfrac{a}{b} = 0$ bestehen, was zu $A_2 = A_1\dfrac{b}{a}$ führt und folglich gilt

$$\varphi(z) = \frac{A_1}{a}z+B_1+B_2-\frac{A_1}{a}c \quad \text{für} \quad z\in D_z.$$

So haben wir die Richtigkeit der Formel (6) bewiesen.

Die Formeln für die Spezialfälle 1., 2., 3. ergeben sich sofort durch Vergleichung der entsprechenden Formeln. Damit sind wir mit dem Beweis des Hilfssatzes fertig.

§ 2.

Wir gehen zu der Funktionalgleichung (1) über, und vollziehen dort die Transformation der Veränderlichen mit Hilfe der Relationen

$$\begin{cases} x = \cos u & 0 \leqq u \leqq \pi \\ y = \cos v & 0 \leqq v \leqq \pi. \end{cases} \tag{10}$$

Dadurch geht die Gleichung (1) in

$$\varphi(\cos u) + \varphi(\cos v) = \varphi\left(\cos u \cos v - \sqrt{1-\cos^2 u}\sqrt{1-\cos^2 v}\right) \tag{11}$$

über. Für den (u, v)-Bereich erhalten wir das Quadrat

$$Q^*: \begin{cases} 0 \leqq u \leqq \pi \\ 0 \leqq v \leqq \pi \end{cases} \tag{12}$$

und da dort

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = \sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u$$

$$\sqrt{1-\cos^2 v} = \sqrt{\sin^2 v} = |\sin v| = \sin v$$

ist, so erhalten wir

$$\varphi(\cos u) + \varphi(\cos v) = \varphi[\cos(u+v)]$$

oder — wenn kurz

$$\psi(u) \overset{\text{def}}{=} \varphi(\cos u) \quad \text{für} \quad u \in [0, \pi]$$

gesetzt wird —

$$\psi(u) + \psi(v) = \psi(u+v).$$

Die Schwierigkeit aber liegt darin, daß $u+v$ aus dem Intervall $[0, \pi]$ austreten kann, falls (u, v) das Quadrat Q^* durchläuft, so daß wir zwei Fälle unterscheiden müssen.

Für $u+v \in [0, \pi]$ haben wir

$$\psi(u) + \psi(v) = \psi(u+v), \tag{13}$$

für $u+v \in [\pi, 2\pi]$ dagegen

$$\psi(u) + \psi(v) = \psi\{\cos[2\pi - (u+v)]\} = \psi[2\pi - (u+v)]. \tag{14}$$

Auf diese Weise zerfällt das Quadrat Q^* in zwei Dreiecke D_1^*, D_2^* und in die Strecke D_{12}^*

$$D_1^*: \begin{cases} 0 \leqq u \leqq \pi, \\ 0 \leqq v \leqq \pi, \\ u+v < \pi, \end{cases} \tag{15}$$

$$D_2^*: \begin{cases} 0 \leqq u \leqq \pi, \\ 0 \leqq v \leqq \pi, \\ u+v > \pi, \end{cases} \tag{16}$$

$$D_{12}^*: \begin{cases} 0 \leqq u \leqq \pi, \\ 0 \leqq v \leqq \pi, \\ u+v = \pi, \end{cases} \tag{17}$$

und die gesuchte Funktion ψ erfüllt die Gleichung (13) in D_1^*, und die Gleichung (14) in D_2^*. Auf der Strecke D_{12}^* sind beide Gleichungen (13), (14) erfüllt, aber eben dort fallen die rechten Seiten von (13) und (14) zusammen. Statt dessen können wir sagen, daß ψ die einzige Funktionalgleichung

$$(18) \qquad \psi(u)+\psi(v) = \psi[\omega(u, v)]$$

erfüllt, wo die Funktion $\omega(u, v)$ folgenderweise definiert ist:

$$(19) \qquad \omega(u, v) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} u+v & \text{für} \quad 0 \leqq u+v \leqq \pi, \\ 2\pi-(u+v) & \text{für} \quad \pi \leqq u+v \leqq 2\pi. \end{cases}$$

ω kann auch einheitlich folgendermaßen definiert werden:

$$(20) \qquad \omega(u, v) = \pi-|u+v-\pi|.$$

Es sei weiter D ein offener zusammenhängender Unterbereich von Q (vgl. (2)) und φ erfülle die Gleichung (1) in D. Die Abbildung (10) bildet Q auf Q^*, D auf irgendeinen Bereich D^* eineindeutig ab. Man kann einsehen, daß D^* ein offener zusammenhängender Unterbereich von Q^* ist, und wie wir gesehen haben, erfüllt ψ die Gleichung (18) in D^*. Es bezeichne D_u^* bzw. D_v^* die Projektion von D^* auf die u-Achse bzw. die v-Achse. D_ω^* definieren wir als den Wertbereich der Funktion $\omega(u, v)$ im Bereiche D^*. Wir bemerken, daß D_ω^* ein Intervall ist und daß

$$D_\omega^* \subset (0, \pi]$$

gilt.

Setzen wir nun voraus, daß

$$(21) \qquad D^* \subset D_1^*$$

gilt. Da in diesem Fall

$$\omega = u+v$$

ist, so haben wir $a=b=1$, $c=0$, und D_ω^* ist ein offenes Intervall [4]). Die allgemeine stetige Lösung der Gleichung für ψ lautet nach (6)

$$(22) \qquad \varphi(t) = \begin{cases} A_1 t+B_1 & \text{für} \quad t \in D_u^*, \\ A_1 t+B_2 & \text{für} \quad t \in D_v^*, \\ A_1 t+B_1+B_2 & \text{für} \quad t \in D_\omega^*. \end{cases}$$

A_1, B_1, B_2 sind beliebig wählbar, falls D_u^*, D_v^*, D_ω^* keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Ist $D_u^* \cap D_v^* = 0$ aber $D_u^* \cap D_\omega^* \neq 0$, so ist

$$\psi(t) = \begin{cases} A_1 t+B_1 & \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_\omega^*) \\ A_1 t & \text{für} \quad t \in D_v^*. \end{cases}$$

[4]) Dies läßt sich genau so beweisen, wie für D_z am Anfang des Beweises des Hilfssatzes.

Im symmetrischen Fall $D_u^* \cap D_v^* = 0$, $D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ bestehen die Formeln

$$\psi(t) = \begin{cases} A_1 t & \text{für} \quad t \in D_u^*, \\ A_1 t + B_2 & \text{für} \quad t \in (D_v^* \cup D_\omega^*). \end{cases}$$

Ist $D_u^* \cap D_v^* \neq 0$ und $D_u^* \cap D_\omega^* = 0$, $D_v^* \cap D_\omega^* = 0$, so haben wir $B_2 = B_1$ und folglich

$$\psi(t) = \begin{cases} A_1 t + B_1 & \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_v^*) \\ A_1 t + 2B_1 & \text{für} \quad t \in D_\omega^*. \end{cases}$$

Endlich gilt im Falle $D_u^* \cap D_\omega^* \neq 0$, $D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ (der auch den Spezialfall $D_u^* \cap D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ enthält)

$$\psi(t) = A_1 t \quad \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_v^* \cup D_\omega^*).$$

Als nächsten Fall setzen wir

$$D^* \subset D_2^* \tag{23}$$

voraus. In diesem Fall haben wir

$$\omega = 2\pi - (u+v)$$

und somit $c = 2\pi$, $a = b = -1$. D_ω^* wird wieder ein offenes Intervall sein. Die allgemeine stetige Lösung für $\psi(t)$ lautet

$$\psi(t) = \begin{cases} A_1 t + B_1 & \text{für} \quad t \in D_u^*, \\ A_1 t + B_2 & \text{für} \quad t \in D_v^*, \\ -A_1(t - 2\pi) + B_1 + B_2 & \text{für} \quad t \in D_\omega^*. \end{cases} \tag{24}$$

Die Konstanten A_1, B_1, B_2 sind frei wählbar, falls alle drei Mengen D_u^*, D_v^*, D_ω^* fremd sind.

Ist $D_u^* \cap D_v^* = 0$, dagegen $D_u^* \cap D_\omega^* \neq 0$, so haben wir

$$\psi(t) = \begin{cases} B_1 & \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_\omega^*) \\ 0 & \text{für} \quad t \in D_v^*. \end{cases}$$

Für $D_u^* \cap D_v^* = 0$ und $D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ haben wir

$$\psi(t) = \begin{cases} B_2 & \text{für} \quad t \in (D_v^* \cup D_\omega^*) \\ 0 & \text{für} \quad t \in D_u^* \end{cases}$$

und im Falle $D_u^* \cap D_\omega^* \neq 0$, $D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ erhalten wir endlich

$$\psi(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_v^* \cup D_\omega^*).$$

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo

$$D^* \cap D_{12}^* \neq 0 \tag{25}$$

ist. Setzen wir $\overset{i}{D}{}^* = D^* \cap D_i^*$, dann sind $\overset{i}{D}{}^* (\subset D_i^*)$ zusammenhängende offene Bereiche und nach (22), (24) haben wir

$$\psi(t) = \begin{cases} A_1 t + B_1 & \text{für} \quad t \in \overset{1}{D}{}_u^*, \\ A_1 t + B_2 & \text{für} \quad t \in \overset{1}{D}{}_v^*, \\ A_1 t + B_1 + B_2 & \text{für} \quad t \in \overset{1}{D}{}_\omega^*, \end{cases} \tag{26}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} E_1 t + C_1 & \text{für} \quad t \in \overset{2}{D}{}_u^*, \\ E_1 t + C_2 & \text{für} \quad t \in \overset{2}{D}{}_v^*, \\ -E_1(t-2\pi) + C_1 + C_2 & \text{für} \quad t \in \overset{2}{D}{}_\omega^*, \end{cases}$$

wo $\overset{i}{D}{}_u^*, \overset{i}{D}{}_v^*$ die entsprechenden Projektionen von $\overset{i}{D}{}^*$, und $\overset{i}{D}{}_\omega^*$ den Wertbereich der Funktion $\omega(u, v)$ in $\overset{i}{D}{}^*$ bedeuten. Man kann leicht sehen, daß die Relationen $\overset{1}{D}{}_u^* \cap \overset{2}{D}{}_u^* \neq 0$ und $\overset{1}{D}{}_v^* \cap \overset{2}{D}{}_v^* \neq 0$ bestehen. Da $\overset{1}{D}{}_u^* \cap \overset{2}{D}{}_u^*, \overset{1}{D}{}_v^* \cap \overset{2}{D}{}_v^*$ offene Intervalle sind, haben wir wegen (26)

$$E_1 = A_1, \quad C_1 = B_1, \quad C_2 = B_2. \tag{27}$$

Wir behaupten nun, daß der Durchschnitt $\overset{1}{D}{}_\omega^* \cap \overset{2}{D}{}_\omega^*$ nicht leer sein kann. In der Tat sei (u_0, v_0) ein Punkt der Geraden $u + v = \pi$, der in D^* liegt. Nehmen wir die Zahl $\varepsilon > 0$ so klein an, daß die Punkte $(u_0 - \varepsilon, v_0 - \varepsilon), (u_0 + \varepsilon, v_0 + \varepsilon)$ noch in D^* liegen. Wir haben dann

$$\omega(u_0 - \varepsilon, v_0 - \varepsilon) = u_0 + v_0 - 2\varepsilon = \pi - 2\varepsilon$$

$$\omega(u_0 + \varepsilon, v_0 + \varepsilon) = 2\pi - (u_0 + \varepsilon + v_0 + \varepsilon) = \pi - 2\varepsilon.$$

Es gilt also

$$(\pi - 2\varepsilon) \in \overset{1}{D}{}_\omega^* \quad \text{und} \quad (\pi - 2\varepsilon) \in \overset{2}{D}{}_\omega^*$$

und so ist wirklich $\overset{1}{D}{}_\omega^* \cap \overset{2}{D}{}_\omega^* \neq 0$. Folglich müssen wir (wegen der Existenz von inneren Punkten des Durchschnittes $\overset{1}{D}{}_\omega^* \cap \overset{2}{D}{}_\omega^*$)

$$A_1 t + B_1 + B_2 \equiv -A_1(t - 2\pi) + B_1 + B_2$$

haben, was zu

$$A_1 = 0$$

führt. Wir haben also wegen (27):

$$\psi(t) = \begin{cases} B_1 & \text{für} \quad t \in (\overset{1}{D}{}_u^* \cup \overset{2}{D}{}_u^*) \\ B_2 & \text{für} \quad t \in (\overset{1}{D}{}_v^* \cup \overset{2}{D}{}_v^*) \\ B_1 + B_2 & \text{für} \quad t \in (\overset{1}{D}{}_\omega^* \cup \overset{2}{D}{}_\omega^*). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir, daß

$$D_u^* = \overset{1}{D}{}_u^* \cup \overset{2}{D}{}_u^*, \quad D_v^* = \overset{1}{D}{}_v^* \cup \overset{2}{D}{}_v^*, \quad D_\omega^* = \overset{1}{D}{}_\omega^* \cup \overset{2}{D}{}_\omega^* \cup \{\pi\}$$

gilt und daß die Funktion $\psi(t)$ (im Punkt π) stetig ist, dann ist

$$\psi(t) = \begin{cases} B_1 & \text{für} \quad t \in D_u^*, \\ B_2 & \text{für} \quad t \in D_v^*, \\ B_1 + B_2 & \text{für} \quad t \in D_\omega^*. \end{cases} \tag{28}$$

Die Funktion ψ sieht also folgendermaßen aus, je nachdem die Mengen D_u^*, D_2 D_ω^* gemeinsame Punkte besitzen oder nicht besitzen:

Falls $D_u^* \cap D_v^* = D_u^* \cap D_\omega^* = D_v^* \cap D_\omega^* = 0$ ist, so können die Konstanten B_1, B_2^* beliebig gewählt werden.

Ist $D_u^* \cap D_v^* \neq 0$, aber $D_u^* \cap D_\omega^* = D_v^* \cap D_\omega^* = 0$ sind, so ist $B_2 = B_1$ und

$$\psi(t) = \begin{cases} B_1 & \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_v^*), \\ 2B_1 & \text{für} \quad t \in D_\omega^*. \end{cases}$$

Falls $D_u^* \cap D_\omega^* \neq 0$ und $D_u^* \cap D_v^* = D_v^* \cap D_\omega^* = 0$ gilt, so haben wir

$$\psi(t) = \begin{cases} B_1 & \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_\omega^*), \\ 0 & \text{für} \quad t \in D_v^* \end{cases}$$

und im symmetrischen Fall $D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ mit $D_u^* \cap D_v^* = D_u^* \cap D_\omega^* = 0$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \in D_u^*, \\ B_2 & \text{für} \quad t \in (D_v^* \cup D_\omega^*). \end{cases}$$

Endlich erhalten wir falls $D_u^* \cap D_v^* \neq 0$ ist, und entweder $D_u^* \cap D_\omega^* \neq 0$ oder $D_v^* \cap D_\omega^* \neq 0$ gilt,

$$\psi(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \in (D_u^* \cup D_v^* \cup D_\omega^*).$$

§ 3.

Nun kehren wir zu der Funktion φ zurück. Vor allem wollen wir die folgenden Bezeichnungen einführen. Das Quadrat Q (vgl. (2)) zerfällt in zwei Dreiecke D_1, D_2 und in die Strecke D_{12},

$$D_1: \begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 1 \\ x + y > 0 \end{cases} \tag{29}$$

$$D_2: \begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 1 \\ x + y < 0 \end{cases} \tag{30}$$

$$D_{12}: \begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \tag{31}$$

(D_1^*, D_2^*, D_{12}^* sind die Bilder von D_1, D_2, D_{12} mit Hilfe der Transformation (10)). Es bezeichne D_x, D_y entsprechend die Projektion von D auf die x-Achse bzw. die y-Achse und D_F den Wertbereich der Funktion

$$F(x, y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \tag{32}$$

wenn (x, y) den Bereich D durchläuft. Da die Abbildung (10) die Mengen D_x, D_y, D_F eineindeutig auf die Mengen D_u^*, D_v^*, D_ω^* abbildet, können die Lösungen φ der Gleichung (1) aus den Lösungen der Gleichung (5) erhalten werden.

Wir setzen

$$\Delta_0 \overset{\text{def}}{=} D_x \cap D_y, \quad \Delta_1 \overset{\text{def}}{=} D_x \cap D_F, \quad \Delta_2 \overset{\text{def}}{=} D_y \cap D_F \tag{33}$$

und unterscheiden die folgenden fünf Unterfälle

(34)
- a) $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$,
- b) $\Delta_0 \neq 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$,
- c) $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_0 = \Delta_2 = 0$ oder $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_0 = \Delta_1 = 0$,
- d) Eine der Mengen Δ_i ist leer, die zwei übrigen dagegen sind nichtleer,
- e) Keine der Mengen Δ_i ist leer, d. h. D_x, D_y, D_F haben gemeinsame Punkte.

Nun können wir nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen die folgende Tabelle aufstellen, die die allgemeine stetige Lösung von (1) in einzelnen Fällen ergibt (arc cos x bezeichnet den Hauptwert der Funktion arc cos).

I Fall $D \subset D_1$.

Unterfall a):

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in D_x, \\ C \arccos x + B & \text{für} \quad x \in D_y, \\ C \arccos x + A + B & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases} \tag{35}$$

Unterfall b):

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y), \\ C \arccos x + 2A & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases} \tag{36}$$

Unterfall c):

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_F), \\ C \arccos x & \text{für} \quad x \in D_y. \end{cases} \tag{37a}$$

bzw.

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x & \text{für} \quad x \in D_x, \\ C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in (D_y \cup D_F). \end{cases} \tag{37b}$$

Unterfälle d) und e):

$$\varphi(x) = C \arccos x \quad \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y \cup D_F). \tag{38}$$

II Fall $D \subset D_2$.
Unterfall a):

$$(39) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in D_x, \\ C \arccos x + B & \text{für} \quad x \in D_y, \\ -C \arccos x + A + B + 2\pi C & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases}$$

Unterfall b):

$$(40) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y), \\ -C \arccos x + 2A + 2\pi C & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases}$$

Unterfall c):

$$(41a) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_F), \\ 0 & \text{für} \quad x \in D_y, \end{cases}$$

bzw.

$$(41b) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in D_x, \\ A & \text{für} \quad x \in (D_y \cup D_F). \end{cases}$$

Unterfälle d) und e):

$$(42) \qquad \varphi(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y \cup D_F).$$

III Fall $D \cap D_{12} \neq 0$.
Unterfall a):

$$(43) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad x \in D_x, \\ B & \text{für} \quad x \in D_y, \\ A + B & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases}$$

Unterfall b):

$$(44) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y), \\ 2A & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases}$$

Unterfall c):

$$(45a) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_F), \\ 0 & \text{für} \quad x \in D_y. \end{cases}$$

bzw.

$$(45b) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in D_x, \\ A & \text{für} \quad x \in (D_y \cup D_F). \end{cases}$$

Unterfälle d) und e):

$$(46) \qquad \varphi(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y \cup D_F).$$

Die in dieser Tabelle auftretenden Konstanten sind beliebig. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß es entweder keine nichttriviale (von Null verschiedene) Lösung gibt oder, daß es einparametrige bzw. zweiparametrige bzw. dreiparametrige Scharen von Lösungen gibt. Darunter kann man auch halbtriviale Lösungen unterscheiden, die stückweise konstant sind.

§ 4.

Jetzt wollen wir zeigen, daß tatsächtlich alle Fälle und dabei auch sämtliche Unterfälle auftreten können. Wir geben für jeden Fall und für jeden Unterfall je ein Beispiel für den entsprechenden Bereich an. Diese Angabe läßt sich in bezug auf den Bereich Q^* viel leichter bewerkstelligen, da dort die Funktion $\omega(u, v)$ viel einfacher aussieht als die Funktion $F(x, y)$, die zu dem Bereich Q und zu der Funktionalgleichung (1) gehört. Die auftretenden Bereiche D^* werden (offene) Dreiecke bilden, die durch Angabe der Scheitelkoordinaten bestimmt werden. ε wird im folgenden eine hinreichend kleine positive Zahl bedeuten.

I a): $\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \varepsilon\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon, 0\right).$

$$D_u^* = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right), \quad D_v^* = (0, \varepsilon), \quad D_\omega^* = \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right).$$

I b): $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon, \frac{\pi}{4}+\varepsilon\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon, \frac{\pi}{4}\right).$

$$D_u^* = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\varepsilon\right), \quad D_v^* = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\varepsilon\right), \quad D_\omega^* = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right).$$

I c): $(\pi-\varepsilon, 0), \quad (\pi-\varepsilon, \varepsilon), \quad (\pi, 0).$

$$D_u^* = (\pi-\varepsilon, \pi), \quad D_v^* = (0, \varepsilon), \quad D_\omega^* = (\pi-\varepsilon, \pi).$$

I d): $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \pi-\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

$$D_u^* = \left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad D_v^* = \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \pi-\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad D_\omega^* = (\pi-2\varepsilon, \pi).$$

I e): $(0, 0), \quad (0, \varepsilon), \quad (\varepsilon, \varepsilon).$

$$D_u^* = (0, \varepsilon), \quad D_v^* = (0, \varepsilon), \quad D_\omega^* = (0, 2\varepsilon).$$

II a): $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

$$D_u^* = \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right), \quad D_v^* = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right), \quad D_\omega^* = (\pi-\varepsilon, \pi).$$

II b): $(\pi-\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $(\pi-\varepsilon, \pi)$, (π, π).

$$D_u^* = (\pi-\varepsilon, \pi), \quad D_v^* = (\pi-\varepsilon, \pi), \quad D_\omega^* = (0, 2\varepsilon).$$

II c): $(\pi-\varepsilon, \varepsilon)$ (π, ε), $(\pi, 0)$.

$$D_u^* = (\pi-\varepsilon, \pi), \quad D_v^* = (0, \varepsilon), \quad D_\omega^* = (\pi-\varepsilon, \pi).$$

II d): $\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right)$, $\left(\frac{8\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}\right)$, $\left(\frac{8\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right)$.

$$D_u^* = \left(\frac{4\pi}{10}, \frac{8\pi}{10}\right), \quad D_v^* = \left(\frac{2\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right), \quad D_\omega^* = \left(\frac{6\pi}{10}, \pi\right).$$

II e): $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, (π, π).

$$D_u^* = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad D_v^* = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad D_\omega^* = (0, \pi).$$

III a): $(\varepsilon, \pi-2\varepsilon)$, $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $(2\varepsilon, \pi-\varepsilon)$.

$$D_u^* = (\varepsilon, 2\varepsilon), \quad D_v^* = (\pi-2\varepsilon, \pi-\varepsilon), \quad D_\omega^* = (\pi-\varepsilon, \pi].$$

III b): $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$.

$$D_u^* = \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right), \quad D_v^* = \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right), \quad D_\omega^* = (\pi-2\varepsilon, \pi].$$

III c): $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$D_u^* = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad D_v^* = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad D_\omega^* = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

III d): $\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}\right)$, $\left(\frac{8\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right)$.

$$D_u^* = \left(\frac{4\pi}{10}, \frac{8\pi}{10}\right), \quad D_v^* = \left(\frac{2\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right), \quad D_\omega^* = \left(\frac{6\pi}{10}, \pi\right].$$

III e): $(0, 0)$, (π, π), $(\pi, 0)$.

$$D_u^* = (0, \pi), \quad D_v^* = (0, \pi), \quad D_\omega^* = (0, \pi].$$

§ 5.

Wir kehren zum Unterfall I d), e) zurück, wo die Gleichung nichttriviale Lösungen zuläßt und die Gesamtheit der Lösungen sehr einfach aussieht. Abgesehen von der multiplikativen Konstante besitzt die Gleichung die einzige Lösung

$$\varphi(x) = \arc \cos x. \tag{47}$$

Es handelt sich jetzt um die folgenden zwei Fragen:

1. Wie sieht der umfassendste Bereich D aus, für welchen die Formel (47) besteht?

2. Ist ein innerer Punkt (x_0, y_0) des Dreiecks D_1 gegeben, wann sind dann in der Umgebung $U(x_0, y_0)$ des Punktes (x_0, y_0) die Bedingungen d) bzw. e) erfüllt?

Auf die erste Frage ist die Antwort sehr einfach. Nämlich erfüllt das ganze Dreieck [5] (D_1) die Bedingungen des Unterfalls e). In der Tat, wenn $D = (D_1)$, gilt, so ist $D_x = D_y = D_F = (-1, 1)$, wir haben also mit dem Unterfall I e) zu tun und es besteht für $D = (D_1)$ die Formel (47) für die allgemeine stetige Lösung der Gleichung (1), falls von der multiplikativen Konstanten abgesehen wird. Anderseits ist es klar, daß die Formel (47) nicht bestehen kann, falls D größer ist als (D_1).

Um die zweite Frage beantworten zu können nehmen wir im Dreieck D_1^* einen inneren Punkt (u_0, v_0) und betrachten eine hinreichend kleine kreisförmige Umgebung dieses Punktes

$$(u - v_0)^2 + (v - v_0)^2 < \delta^2,$$

die gänzlich in D_1^* liegt. Es handelt sich darum, zu entscheiden, wann (bei hinreichend kleinem δ) von den Mengen

$$\Delta_0^* = D_u^* \cap D_v^*, \quad \Delta_1^* = D_u^* \cap D_\omega^*, \quad \Delta_2^* = D_v^* \cap D_\omega^*$$

höchstens eine leer sein kann. Es ist in diesem Fall $\omega(u, v) = u + v$ und folglich sehen die Intervalle D_u^*, D_v^*, D_ω^* folgendermaßen aus:

$$D_u^* = (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$$

$$D_v^* = (v_0 - \delta, v_0 + \delta)$$

$$D_\omega^* = (u_0 + v_0 - \delta\sqrt{2}, u_0 + v_0 + \delta\sqrt{2}).$$

Daraus ist zu ersehen, daß

aus $u_0 \neq 0$ (bei hinreichend kleinem δ) $\Delta_1^* = 0$

aus $v_0 \neq 0$ (bei hinreichend kleinem δ) $\Delta_2^* = 0$

folgt. Da weder u_0 noch v_0 gleich Null sein kann $\big((u_0, v_0)$ soll ein innerer Punkt von D_1^* sein$\big)$, so ist (bei hinreichend kleinem δ) $\Delta_1^* = 0$ und $\Delta_2^* = 0$ und folglich kann der Fall d) bzw. e) *nicht* vorkommen. Selbstverständlich kann bei hinreichend großem δ der Fall I d) bzw. I e) auftreten. Dieses Resultat können wir etwa so ausdrücken:

Ist D ein in D_1 enthaltener hinreichend kleiner Bereich, so besitzt die Gleichung (1) *in D eine wenigstens zweiparametrige Schar von nichttrivialen Lösungen.*

---

[5]) (D_1) bezeichnet die Menge der inneren Punkte von D_1.

§ 6.

In diesem letzten Paragraph wollen wir noch das folgende Problem erörtern. Es kann vorkommen, daß der Bereich D so beschaffen ist, daß zwei (oder sogar alle drei) von den Intervallen D_x, D_y, D_F fremde, aber tangierende Intervalle bilden. In diesem Fall kann man statt D die abgeschlossene Menge $\bar{D} = D \cup F(D)$ betrachten und man kann verlangen, daß φ auch im Punkt, wo diese zwei Intervalle zusammenstoßen stetig sein soll. Die Derivierbarkeit der Lösung wird im allgemeinen in diesem Punkt verloren gehen. Wir wollen hier keineswegs alle solche Lösungen finden. Wir zeigen nur an zwei Beispielen die Existenz solcher Lösungen, die in einem bzw. in zwei Punkten stetig aber nicht differenzierbar sind.

Beispiel 1. Als D nehmen wir das offene Dreieck mit den Scheitel $L(0, -1)$, $M(\delta, -1)$, $N(0, -1+\delta)$, wo δ eine positive, hinreichend kleine Zahl ist. Es ist also $D \subset D_2$. Es ist offenbar

$$D_x = (0, \delta), \quad D_y = (-1, -1+\delta).$$

Eine leichte, aber ziemlich lange Rechnung zeigt, daß

$$D_F = (-\varepsilon, 0)$$

ist, wo $\varepsilon = \sqrt{2\delta}$. Wir haben folglich (wenn δ hinreichend klein ist) mit dem Unterfall II a) zu tun. Die allgemeine stetige Lösung lautet also folgendermaßen

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in D_x, \\ C \arccos x + B & \text{für} \quad x \in D_y, \\ -C \arccos x + A + B + 2\pi C & \text{für} \quad x \in D_F. \end{cases} \tag{48}$$

Die Intervalle D_x und D_F berühren sich im Punkte $x=0$. Wir können aber D_x als Intervall $[0, \delta)$ betrachten, wo die Null zu D_x gehört (es genügt zu diesem Zweck die Seite LN dem Dreieck D zu zurechnen). Wenn wir nun die Stetigkeit der Lösung $\varphi(x)$ im Punkte $x=0$ verlangen, so haben wir laut der ersten und der dritten der Formeln (48)

$$C \arccos 0 + A = -C \arccos 0 + A + B + 2\pi C,$$

oder

$$B = -C\pi,$$

was zu

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \arccos x + A & \text{für} \quad x \in D_x, \\ C \arccos x - C\pi & \text{für} \quad x \in D_y, \\ -C \arccos x + A + C\pi & \text{für} \quad x \in D_F \end{cases} \tag{49}$$

führt (eine nur zweiparametrige Schar von Lösungen!). Auf Grund von

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{-C}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für} \quad x \in (D_x \cup D_y), \\ \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für} \quad x \in D_F \end{cases} \tag{50}$$

sind für $x=0$ die einseitigen Ableitungen gleich $-C$ bzw. $+C$, also (für $C\neq 0$) voneinander verschieden, woraus die Nichtdifferenzierbarkeit der Lösung $\varphi(x)$ in $x=0$ ersichtlich ist.

Beispiel 2. Im Dreieck D des vorigen Beispiels wählen wir die Zahl δ so, daß

$$-1+\delta = -\varepsilon = -\sqrt{2\delta}$$

ausfällt, also

$$\delta = \delta_0 = 2-\sqrt{3}.$$

Für diesen Wert von δ berühren sich auch die Intervalle D_y und D_F im Punkt $x_0 = 1-\sqrt{3}$. Wird jetzt D als abgeschlossenes Dreieck genommen und die Stetigkeit der Lösung $\varphi(x)$ auch im Punkt x_0 verlangt, so erhalten wir die Relation

$$C \arccos x_0 - C\pi = -C \arccos x_0 + A + C\pi$$

oder

$$A = C(2 \arccos x_0 - 2\pi)$$

und so erhalten wir nur eine einparametrige (mit einer multiplikativen Konstante versehene) Schar von stetigen Lösungen

$$\varphi(x) = \begin{cases} C(\ \arccos x + 2 \arccos x_0 - 2\pi) & \text{für} \quad x\in D_x, \\ C(\ \arccos x - \pi) & \text{für} \quad x\in D_y, \\ C(-\arccos x + 2\arccos x_0) & \text{für} \quad x\in D_F, \end{cases}$$

die im Intervall $(-1, 2-\sqrt{3})$ definiert sind, wobei jede Lösung in beiden Punkten x_0 und 0 *nichtdifferenzierbar* ist.

Weitere Arbeiten dieser Schriftenfolge wollen sich mit der *alternativen* Gleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi\left[xy - \varepsilon(x, y)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right] \qquad (\varepsilon(x, y)^2 \equiv 1) \tag{51}$$

sowie mit *mehrdeutigen* Lösungen der Gleichungen (1) und (51) beschäftigen.

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart*, 1961.

[2] M. Ghermanescu, Sur la définition fonctionnelle des fonctions trigonométriques, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957/58), 93—96.

[3] S. Gołab, Einige grundlegende Fragen der Theorie der Funktionalgleichungen, *Glasnik mat-fiz i astr. Zagreb* **20** (1965).

(Eingegangen am 7. August 1964.)