Über einen Äquivalenzsatz

Von LÁSZLÓ LEINDLER (Szeged)

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall (a, b) orthonormiertes, vollständiges Funktionensystem. Bezeichne $E_n = E_n(f)$ den im Sinne der Metrik des Raumes $L^2(a, b)$ erreichbaren besten Annäherungsgrad von $f(x)$ mit Linearformen

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k \varphi_k(x).$$

Nach einem bekannten Satz von Gram ([1]) ist

$$E_n^2 = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k(x)\right)^2 dx = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \quad \text{mit} \quad c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x)\, dx.$$

Mehrere Ergebnisse sind bekannt, die ihre Behauptungen aus Bedingungen von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} E_n < \infty \tag{1}$$

erhalten. Z. B.: ist $\{\varphi_n(x)\}$ das trigonometrische System, dann folgt aus (1) im Falle $\lambda_n = \sqrt{n}$, daß, die Fourierentwicklung von $f(x)$ absolut konvergiert (STETSCHKIN [8]); im Falle $\lambda_n = n(\log n)^{\frac{1}{2}}$ folgt, daß die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergiert (SALEM und ZYGMUND [7]). Ohne Spezialisierung von $\{\varphi_n(x)\}$ folgt aus (1) im Falle $\lambda_n = n$, daß die Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

fast überall unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall konvergiert (LEINDLER [3]) bzw. $|C, \frac{1}{2}|$-summierbar ist [1]) (LEINDLER [2]); usw.

Wir haben in [4] bewiesen, daß die Bedingung (1) für die Fourierreihen im Falle $\lambda_n = n(\log n)^{\frac{1}{2}}$ damit gleichwertig ist, daß es eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{r_n\}$ gibt, mit den Eigenschaften:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r_n < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n r_n} < \infty. \tag{3}$$

Im Zusammenhang mit diesem Ergebnis hat sich die Frage gestellt, mit welchem Ungleichungspaar von der Form (3) Bedingung (1) im allgemeinen äquivalent ist. Ein solcher allgemeiner Äquivalentzsatz wäre deswegen nützlich, weil wir daraus mehrere neue Koeffizientenbedingungen für gewisse Konvergenz- bzw. Summationseigenschaften verschiedener Reihen nach den bekannten Ergebnissen sofort bekommen könnten.

Wir bekommen aus dem Hilfssatz von § 1 bezüglich der Zahlenreihen mit $\beta = 1$, $\gamma = 2$ und $\alpha_k = |c_k|$ den folgenden

Satz I. *Seien $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge und $\Lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1}$. Dann ist die Bedingung* (1) *gleichwertig damit, daß es eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ mit den Eigenschaften*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \mu_n < \infty$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{\lambda_n \mu_n} < \infty$$

gibt.

Aus dem Satz I ergibt sich unmittelbar

Folgerung I. *Die Bedingung* (1) *ist im Falle $\lambda_n = n^{\frac{1}{2}}$ mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \mu_n < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty \qquad (0 < \mu_n \leqq \mu_{n+1}), \tag{4}$$

im Falle $\lambda_n = n$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \mu_n < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n \mu_n} < \infty, \tag{5}$$

im Falle $\lambda_n = n\sqrt{\log n}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \mu_n < \infty \quad \textit{und} \quad \sum \frac{1}{n \mu_n} < \infty, \tag{6}$$

---

[1]) Die Orthogonalreihe (2) heißt im Intervall (a, b) fast überall $|C, \alpha|$-summierbar, wenn in (a, b) fast überall $\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)} x)| < \infty$ gilt, wobei $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ das n-te (C, α)-Mittel der Reihe (2) bezeichnet.

im Falle $\lambda_n = n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ $(-1<\alpha<\frac{1}{2})$ *mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \mu_n < \infty \quad \textit{und} \quad \sum \frac{1}{n^{2\alpha}\mu_n} < \infty \tag{7}$$

gleichwertig.

Nach den schon erwähnten Ergebnissen erhalten wir aus der Folgerung I:

Folgerung II. *Unter der Bedingung* (4) *mit* $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ *konvergiert die Fourierentwicklung von* $f(x)$ *absolut.*

Folgerung III. *Unter der Bedingung* (5) *konvergiert die Reihe* (2) *fast überall unbedingt; bzw. unter* (5) *ist die Reihe* (2) *fast überall* $|C, \frac{1}{2}|$*-summierbar.*

Die Bedingungen (5) sind den wohlbekannten Orliczschen Bedingungen bezüglich der unbedingten Konvergenz fast gleich, aber sie fordern etwas weniger als die Bedingungen von Orlicz (s. [6] und [5]).

Folgerung IV. *Unter der Bedingung* (6) *bzw.* (7) *ist die Reihe* (2) *fast überall* $|C, \alpha > \frac{1}{2}|$*- bzw.* $|C, -1<\alpha<\frac{1}{2}|$*-summierbar.* (S. [2])

Endlich geben wir eine weitere Anwendung des Satzes I. Sei $\bar{l}_n$ eine konvexe Folge positiver monoton gegen Null strebender Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{l}_n = \infty$. Eine Borelsche Menge B aus $[0, 2\pi]$ heißt von positiver konvexer Kapazität bezüglich der Folge $\{\bar{l}_n\}$, wenn über $[0, 2\pi]$ ein totaladditives Maß μ existiert mit $\mu(B)=1$ und wenn $\int_B Q(r, x-y, l)\,d\mu(y)$ für $r \to 1-0$ gleichmäßig beschränkt in x ist, wobei $Q(r, x, l) = \frac{1}{2} l_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n l_n \cos x$, sonst sagt man, daß die konvexe Kapazität der Menge B bezüglich der Folge $\{l_n\}$ Null ist.

Temko [(9]) hat den folgenden Satz bewiesen:

Sei $W(n)$ eine monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nW(n)} < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{W(n)} = \infty$. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, W(n) < \infty,$$

dann kann die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{8}$$

nur auf einer solchen Menge divergieren, deren konvexe Kapazität bezüglich der Folge $\{\bar{l}_n\}$ Null ist, wobei $\bar{l}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kW(k)}$ gilt.

Wir beweisen den

Satz II. *Sind*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n < \infty \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{(\log n)^{1/2}} E_n = \infty, \tag{9}$$

so kann die Reihe (8) *nur auf einer solchen Menge divergieren, deren konvexe Kapazität bezüglich der Folge* $\{l_n\}$ *Null ist, wobei*

$$l_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{E_k}{k(\log k)^{1/2}}$$

ist.

Beweis. Aus (9) folgt nach der Folgerung I mit $\lambda_n = n(\log n)^{\frac{1}{2}}$, daß die Beziehung (6) besteht. Ferner raum es aus dem Beweis des Hilfssatzes gesehen werden, daß man μ_n in (6) zu $\dfrac{(\log n)^{\frac{1}{2}}}{E_n}$ wählen kann. Somit sind die Bedingungen des Satzes von Temko im Falle $W(n) = \mu_n = \dfrac{(\log n)^{\frac{1}{2}}}{E_n}$ erfüllt. Also folgt die Behauptung des Satzes II aus dem Temkoschen Satz.

§. 1 Hilfssatz

Hilfssatz. *Sei* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monotone Zahlenfolge,* $\gamma < \beta$ *positive Zahlen,* $\{\alpha_n\}$ *eine nichtnegative Zahlenfolge, und sei* $\Lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}$. *Dann ist die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k^{\gamma} \right)^{\beta/\gamma} < \infty \tag{1. 1}$$

gleichwertig damit, daß es eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ *mit den Eigenschaften*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\gamma} \mu_n < \infty \tag{1. 2}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_n \mu_n^{\beta/(\gamma-\beta)}} < \infty \tag{1. 3}$$

gibt.

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß (1. 1) aus (1. 2) und (1. 3) folgt. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, so ist unsere Behauptung offenbar. Wir nehmen an, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$ ist. Dann definieren wir eine Indexfolge $\{p_m\}$ durch vollständige Induktion folgenderweise: seien $p_0 = 0$ und $p_1 = 2$. Ist $m \geqq 2$, dann sei p'_m die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\sum_{n=p_{m-1}+1}^{p'_m} \lambda_n^{-1} > 4 \sum_{n=p_{m-2}+1}^{p_{m-1}} \lambda_n^{-1}$$

besteht, und sei

$$p_m = \max(p_{m-1}+1, p'_m - 1).$$

Dann bekommen wir mit einfacher Rechnung

$$(1.4)\qquad \sum_{n=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k^\gamma\right)^{\beta/\gamma} \leqq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\alpha_k^\gamma\right)^{\beta/\gamma} \leqq$$

$$\leqq 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\alpha_k^\gamma\right)^{\beta/\gamma}\sum_{n=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_n} = 4\sum\nolimits_1 .$$

Durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt sich

$$(1.5)\qquad \sum\nolimits_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\alpha_k^\gamma\right)^{\beta/\gamma}\mu_{p_\nu+1}^{\beta/\gamma}\mu_{p_\nu+1}^{-\beta/\gamma}\sum_{n=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_n} \leqq$$

$$\leqq \left\{\sum_{k=p_1+1}^{\infty}\alpha_k^\gamma\mu_k\right\}^{\beta/\gamma}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{n=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\gamma/(\gamma-\beta)}\mu_{p_\nu+1}^{\beta/(\beta-\gamma)}\right\}^{(\gamma-\beta)/\gamma}.$$

Nach der Definition von $\{p_m\}$ gilt

$$\left(\sum_{n=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu+1}}\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\gamma/(\gamma-\beta)} \leqq O(1)\sum_{n=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu+1}}\frac{\Lambda_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_n},$$

somit ist nach (1. 5)

$$(1.6)\qquad \sum\nolimits_1 \leqq O(1)\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{n=p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}+\sum_{n=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\right)\frac{\Lambda_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_n\mu_{p_\nu+1}^{\beta/(\gamma-\beta)}}\right\}^{(\gamma-\beta)/\gamma} \leqq$$

$$\leqq O(1)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_n\mu_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\frac{\Lambda_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_n\mu_{p_\nu+1}^{\beta/(\gamma-\beta)}}\right\}^{(\gamma-\beta)/\gamma}.$$

Wir bezeichnen mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_s < \ldots$ die Indizes $m(\geqq 1)$, für die $p_{m+1} = p_m + 1$ ist, und mit $j_1 < j_2 < \ldots < j_r < \ldots$ die übrigen Indizes. Nach (1. 3) und der Definition von $\{p_m\}$ ist die letzte Summe in (1. 6) kleiner als

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Lambda_{p_{i_s}+1}^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_{p_{i_s}+1}\mu_{p_{i_s}+1}^{\beta/(\gamma-\beta)}}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=p_{j_{r-1}}+1}^{p_{j_r}}\frac{\Lambda_k^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_k\mu_k^{\beta/(\gamma-\beta)}} < \infty.$$

Daraus und aus (1. 4)—(1. 6) folgt die Ungleichung (1. 1).

Nun beweisen wir folgendes: wenn die Ungleichung (1. 1) besteht, so kann eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ angegeben werden, für die (1. 2) und (1. 3) erfüllt sind. Wir setzen der Abkürzung halber

$$\mu_n = \Lambda_n R_n^{\beta-\gamma}, \qquad R_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k^\gamma\right)^{1/\gamma}.$$

Durch Abelsche Umformung ergibt sich

$$(1.7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^\gamma\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^\gamma R_n^{\beta-\gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_k^\gamma R_n^{\beta-\gamma}.$$

Nun definieren wir eine Indexfolge $\{q_m\}$ folgenderweise: seien $q_0=1$ und $q_1=2$. Ist $m\geqq 2$, dann sei q'_m die kleinste ganze Zahl, für die

$$4R_{q'_m} < R_{q_{m-1}}$$

besteht, und sei

$$q_m = \max(q_{m-1}+1, q'_m-1).$$

Dann gilt nach (1. 7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\gamma}\mu_n \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{\nu=m}^{\infty} C_1(\beta,\gamma) \sum_{n=q_\nu}^{q_{\nu+1}-1} \alpha_n^{\gamma} R_{q_\nu}^{\beta-\gamma}. \tag{1. 8}$$

Nach der Definition von $\{q_m\}$ besteht

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} R_{q_\nu}^{\beta} \leqq C_2(\beta,\gamma) R_{q_m}^{\beta},$$

somit ist nach (1. 1), (1. 8) und nach der Definition von $\{q_m\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\gamma}\mu_n \leqq C_3(\beta,\gamma) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} \frac{1}{\lambda_k} R_{q_m}^{\beta} \leqq C_4(\beta,\gamma) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=q_m}^{q_{m+1}-1} \frac{1}{\lambda_k} R_{q_{m+1}-1}^{\beta} \leqq$$

$$\leqq C_4((\beta,\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} R_n^{\beta},$$

woraus die Beziehung (1. 2) nach (1. 1) folgt.

Der Beweis der Implikation (1. 1)$\Rightarrow$(1. 3) ist sehr einfach, nämlich ergibt sich nach (1. 1) mit $\mu_n = \Lambda_n R_n^{\beta-\gamma}$ sofort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n^{\beta/(\gamma-\beta)}}{\lambda_n \mu_n^{\beta/(\gamma-\beta)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} R_n^{\beta} < \infty.$$

Damit haben wir den Hilfssatz vollständig bewiesen.

Literatur

[1] J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate, *J. reine und angew. Math.* **94** (1883), 41–73.

[2] L. Leindler, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 243–268.

[3] ——— Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen, *Studia Math.* **23** (1963), 113–117.

[4] ——— Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen, *Acta Sci. Math. Szeged* **25** (1964), 233–248.

[5] ——— Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 139–148.

[6] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bulletin Internat. Acad. Sci. Polonaise Cracovie* (1927), 81–115.

[7] R. Salem and A. Zygmund, Some properties of trigonometric series whose terms have random signs, *Acta Math.* **91** (1954), 245–301.

[8] С. В. Стечкун, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, *Успехи мат наук* **2** (1954), 177–178.

[9] К. Б Темко, Выпуклая емкость и ряды фурье, *Доклады Академии наук СССР* **110** (1956), 943–944.

(Eingegangen am 8. September 1964.)