Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen

Von GERHARD MICHLER (Frankfurt/M.)

Unter einem kleinen Rechtsideal eines Ringes R versteht man ein Rechtsideal K von R derart, daß R das einzige $R = K + U$ erfüllende Rechtsideal U von R ist. Analog wird ein kleines Linksideal und ein kleines zweiseitiges Ideal von R erklärt. In ([2], S. 7) hat R. BAER u. a. bewiesen, daß ein Ring dann und nur dann eine Linkseins besitzt, wenn in R/J, wobei J das Jacobson-Radikal von R ist, die Eins existiert, J ein kleines Rechtsideal ist, und $x \in R$ stets zu Rx gehört. Dieser Satz zeigt, daß zwischen den Radikalen, den kleinen Rechtsidealen und der Existenz eines Einselementes enge Beziehungen bestehen, die in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich für Ringe mit abgeschwächten Kettenbedingungen untersucht werden. In § 1 werden Eigenschaften kleiner Elemente von vollständigen Verbänden angegeben, die in den Beweisen der Kriterien für die Existenz von Einselementen in §2, §3 und §4 benötigt werden und zum großen Teil in [3] schon von R. BAER für kleine Normalteiler von Gruppen bewiesen worden sind. Der § 2 befaßt sich mit Beziehungen zwischen dem oberen Nilradikal N, dem Brown—McCoy'schen Radikal G und dem Vorhandensein einer Linkseins in Ringen R mit Minimalbedingung für potente Hauptrechtsideale, wobei ein Rechtsideal potent heißt, wenn es mindestens ein nichtnilpotentes Element besitzt. In § 3 wird gezeigt, daß die Summen DR, D^rR und D^lR aller kleinen Ideale, aller kleinen Rechtsideale, bzw. aller kleinen Linksideale Radikale auf der Klasse aller assoziativen Ringe R definieren, für die $DR \leqq G$, $D^rR \leqq J$ und $D^lR \leqq J$ gilt.

Bekanntlich (vgl. BAER [1], S. 637) gibt es sogar endliche Ringe R mit $R_l = \langle x \in R \mid xR = 0 \rangle = 0$, die keine Rechtseins besitzen. Fordert man aber noch zusätzlich, daß $(R/K)_l = 0$ für alle nilpotenten Ideale K gilt, dann hat R eine Rechtseins; hierzu wird dann noch nicht einmal die volle Minimalbedingung für Rechtsideale benötigt, wie in § 4 gezeigt wird. Aus diesem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die Existenz einer Rechtseins in einem Artinschen Ring ergibt sich als Korollar der folgende Satz von F. SZÁSZ ([12], S. 352): Jeder torsionsfreie Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale besitzt eine Rechtseins.

Ich möchte meinen herzlichen Dank Herrn Professor Dr. R. BAER für seine zahlreichen wertvollen Anregungen aussprechen. Herrn Professor Dr. F. KASCH danke ich für seine vielen Hinweise.

Bezeichnungen

Mit R wird stets ein assoziativer Ring bezeichnet. Die Verbandsoperationen Schnitt und Verbindung, werden durch $\wedge$ und $\vee$ dargestellt, während $\cap$ und $\cup$ nur für den mengentheoretischen Durchschnitt und die mengentheoretische Vereinigung stehen. Ist $\mathfrak{V}$ eine Familie von Mengen X, die bezüglich der mengentheoretischen Enthaltenseinsbeziehung einen vollständigen Verband bildet, dann wird mit $\langle x \rangle$ das von $x \in \bigcup_{X \in \mathfrak{V}} X$ erzeugte Element des Verbandes $\mathfrak{V}$ bezeichnet.

(x) = das von $x \in R$ erzeugte Hauptideal von R,
$(x)_R$ = das von $x \in R$ erzeugte Hauptrechtsideal von R,
$(x)_L$ = das von $x \in R$ erzeugte Hauptlinksideal von R,
$K_r = \langle x \in R | Kx = 0 \rangle$ ist der Rechtsannihilator der Teilmenge K von R.
$A \dotplus B$ = die direkte Summe der R-Moduln A und B.

Wenn e ein Idempotent von R ist, dann ist $(1-e)R = \langle r - er | r \in R \rangle$. *Radikale des Ringes R:* B = unteres Nilradikal von Baer, L = Levitzki-Radikal, N = oberes Nilradikal, J = Jacobson-Radikal, G = Brown-McCoy'sches Radikal,

DR = Durchschnitt aller maximalen zweiseitigen Ideale von R,

$D^r R$ bzw. $D^l R$ = Durchschnitt aller maximalen Rechts- bzw. Linksideale von R

Bezüglich der Terminologie verweise ich auf G. Szász [13], Jacobson [8], Fuchs [6] und F. Szász [10].

§ 1. Kleine Elemente in Verbänden

Das duale Gegenstück eines großen oder wesentlichen R-Untermoduls eines R-Moduls (Vgl. Eckmann und Schopf [5]), bzw. eines großen Rechtsideals eines Ringes ist ein kleiner R-Untermodul bzw. ein kleines Rechtsideal. Allgemein ist ein Element A eines beschränkten Verbandes $\mathfrak{V}$, in dem 0 das kleinste und 1 das größte Element ist, ein *kleines Element* von $\mathfrak{V}$, wenn 1 das einzige $1 = A \vee B$ erfüllende Element B von $\mathfrak{V}$ ist. Stets ist 0 ein kleines Element von $\mathfrak{V}$, während 1 niemals klein in $\mathfrak{V}$ ist, wenn $1 \neq 0$.

In diesem Abschnitt möchte ich nun Eigenschaften kleiner Elemente von $\mathfrak{V}$ angeben, die zum großen Teil schon von Baer für kleine Normalteiler in [3] bewiesen worden sind.

Hilfssatz 1. 1. *Sei $\mathfrak{V}$ ein beschränkter Verband, dann gilt:*

(a) *Wenn A ein kleines Element von $\mathfrak{V}$ und $B \leqq A$ ist, dann ist B ein kleines Element von $\mathfrak{V}$.*

(b) *Die Menge aller kleinen Elemente von $\mathfrak{V}$ bildet einen Teilverband $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{V}$, in dem 0 das kleinste Element ist.*

(c) *Wenn $\mathfrak{S}$ ein nach oben beschränkter Teilverband von $\mathfrak{R}$ ist, dann gibt es ein größtes Element S in $\mathfrak{S}$, das ein kleines Element von $\mathfrak{V}$ ist, und S ist die Verbindung aller Elemente von $\mathfrak{S}$.*

(d) *$\mathfrak{R}$ hat dann und nur dann ein maximales Element, wenn jede (beliebig mächtige) Verbindung von kleinen Elementen von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{R}$ enthalten ist.*

Beweis. Erfüllt $X \in \mathfrak{V}$ die Gleichung $1 = B \vee X$, dann gilt wegen $B \leqq A$ auch $1 = A \vee X$, woraus $X = 1$ folgt, weil A klein in $\mathfrak{V}$ ist, womit (a) bewiesen ist.

Seien A und B kleine Elemente von $\mathfrak{V}$; sei $X \in \mathfrak{V}$ so gewählt, daß $1 = (A \vee B) \vee X$ gilt. Aus der Kleinheit von A und B und aus der Assoziativität von $\vee$ folgt $X = 1$; also ist $\mathfrak{N}$ wegen (a) ein Verband, in dem 0 das kleinste Element ist.

Wenn $\mathfrak{S}$ ein Teilverband von $\mathfrak{N}$ mit maximalen Elementen ist, dann gibt es nach Szász ([13], S. 55) ein größtes Element S in $\mathfrak{S}$. Da $S \in \mathfrak{N}$, ist S ein kleines Element von $\mathfrak{V}$. Wäre S nicht gleich der Verbindung aller Elemente von $\mathfrak{S}$, dann gäbe es ein kleines, in $\mathfrak{S}$ enthaltenes Element Q von $\mathfrak{V}$ mit $Q \nleqq S$. Also wäre $S < S \vee \vee Q \in \mathfrak{S}$, und S wäre nicht maximal in $\mathfrak{S}$. Aus diesem Widerspruch folgt (c) Die Aussage (d) ist eine Folge von (b) und (c), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Bemerkung 1. 2. Daß eine Verbindung unendlich vieler kleiner Elemente von $\mathfrak{V}$ im allgemeinen kein kleines Element von $\mathfrak{V}$ ist, zeigt der Untergruppenverband einer abelschen Gruppe vom Prüferschen Typ p^∞. (Siehe Baer [3], S. 152.) Also ist die Voraussetzung der Existenz maximaler Elemente in $\mathfrak{N}$ nicht nur notwendig, sondern auch unentbehrlich dafür, daß jede beliebig mächtige Verbindung kleiner Elemente von $\mathfrak{V}$ klein ist.

Definition. Ein Verbandsepimorphismus μ des vollständigen Verbandes $\mathfrak{V}$, dessen Schrankenelemente 0 und 1 sind, auf einen Verband $\mathfrak{V}^*$ heißt *unitär*, wenn 1 das einzige $A^\mu = 1^*$ erfüllende Element A von $\mathfrak{V}$, das größer als die Verbindung $K(\mu)$ aller Elemente des Kerns von μ ist, und 1^* das größte Element von $\mathfrak{V}^*$ ist.

Hilfssatz 1. 3. *Ist $\mathfrak{V}$ ein vollständiger Verband, dann bilden unitäre Verbandsepimorphismen μ kleine Elemente von $\mathfrak{V}$ auf kleine Elemente von $\mathfrak{V}^\mu$ ab.*

Beweis. Sei μ ein unitär Verbandsepimorphismus mit Kern $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}^\mu$ und A ein kleines Element von $\mathfrak{V}$. Sei $K(\mu) = \bigvee_{X \in \mathfrak{Q}} X$. Ist X^* ein $1^* = A^\mu \vee X^*$ erfüllendes Element von $\mathfrak{V}^\mu$, dann existiert in $\mathfrak{V}$ ein Element $X \geqq K(\mu)$ mit $X^* = X^\mu$. Hieraus folgt $1^* = A^\mu \vee X^\mu = (A \vee X)^\mu$. Da $A \vee X \geqq K(\mu)$ und μ unitär ist, folgt $1 = A \vee X$, weshalb $X = 1$ wegen der Kleinheit von A und somit $X^* = X^\mu = 1^*$ ist, also ist A^μ ein kleines Element von $\mathfrak{V}^\mu$.

Bemerkung 1. 4. In Hilfssatz 1. 3. ist die Voraussetzung, daß die Verbandsepimorphismen μ unitär sind, unentbehrlich dafür, daß K^μ in $\mathfrak{V}^\mu$ klein ist, wenn K ein kleines Element von $\mathfrak{V}$ ist, wie folgendes Beispiel zeigt. Sei $\mathfrak{L}$ die Kette: $0 < A < 1$ und $\mathfrak{L}^*$ die Kette: $0^* < 1^*$, dann ist die Abbildung μ mit $0^\mu = 0^*$, $A^\mu = 1^\mu = 1^*$ ein Verbandsepimorphismus von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{L}^*$. A ist ein kleines Element von $\mathfrak{L}$, aber A^μ ist nicht klein in $\mathfrak{L}^*$, obwohl $\mathfrak{L}$ vollständig ist.

Hilfssatz 1. 5. *Die folgenden Eigenschaften eines Elementes K eines vollständigen Verbandes $\mathfrak{V}$ sind äquivalent:*

(1) *K ist ein kleines Element von $\mathfrak{V}$.*

(2) *Es gibt unitäre Verbandsepimorphismen μ von $\mathfrak{V}$ mit Kern $\mathfrak{Q}(\mu)$ derart, daß $Q(\mu) = \bigvee_{X \in \mathfrak{Q}(\mu)} \leqq K$ ist, und für jedes solches μ ist K^μ in $\mathfrak{V}^\mu$ und $Q(\mu)$ in $\mathfrak{V}$ klein.*

(3) *Es gibt einen unitären Verbandsepimorphismus μ von $\mathfrak{V}$ mit Kern $\mathfrak{Q}(\mu)$ derart, daß $Q = \bigvee_{X \in \mathfrak{Q}(\mu)} X \leqq K$, Q ein kleines Element in $\mathfrak{V}$ und K^μ ein kleines Element von $\mathfrak{V}^\mu$ ist.*

Beweis. Gilt (1), dann ist der identische Automorphismus ein Verbandsepimorphismus, dessen Kern $0 \leqq K$ ist, da $\mathfrak{V}$ ein vollständiger Verband ist. Ist μ irgendein unitärer Verbandsepimorphismus von $\mathfrak{V}$ mit Kern $\mathfrak{Q}(\mu)$ derart, daß $Q(\mu) = \bigvee_{X \in \mathfrak{Q}(\mu)} X \leqq K$ ist, dann ist $Q(\mu)$ nach Hilfssatz 1. 1. ein kleines Element von $\mathfrak{V}$. Da μ unitär und K ein kleines Element ist, ist K^{μ} nach Hilfssatz 1. 3. ein kleines Element von $\mathfrak{V}^{\mu}$. Also folgt (2) aus (1). (3) ist eine Abschwächung von (2). Es gelte (3), und $X \in \mathfrak{V}$ erfülle $1 = K \vee X$. Hieraus folgt: $1^* = 1^{\mu} = (K \vee X)^{\mu} = K^{\mu} \vee X^{\mu}$, also ist $X^{\mu} = 1^*$, da K_{μ} in $\mathfrak{V}^{\mu}$ klein ist. Nun ist auch $1^* = Q^{\mu} \vee X^{\mu} = (Q \vee X)^{\mu}$, weshalb $1 = Q \vee X$ ist, weil μ unitär ist. Aus der Kleinheit von Q folgt $X = 1$, d. h. ist klein in $\mathfrak{V}$.

Hilfssatz 1. 6. *In einem vollständigen Verband $\mathfrak{V}$ ist jedes kleine Element $K \leqq \bigwedge_{X \in \mathfrak{M}} X$, wobei $\mathfrak{M}$ die Menge aller dualen Atome von $\mathfrak{V}$ ist.*

Beweis. Da $\mathfrak{V}$ vollständig ist, ist $D = \bigwedge_{X \in \mathfrak{M}} X$ ein Element von $\mathfrak{V}$. Gäbe es ein kleines Element K in $\mathfrak{V}$ mit $K \nleqq D$, dann existierte ein $X \in \mathfrak{M}$ mit $K \nleqq X$, also wäre $X < K \vee X$, woraus $1 = K \vee X$ folgt, weil X ein duales Atom von $\mathfrak{V}$ ist. Aus der Kleinheit von K ergibt sich $X = 1$, und X ist kein duales Atom, was $X \in \mathfrak{M}$ widerspricht.

Eine Familie $\mathfrak{V}$ von Mengen X, die bezüglich der mengentheoretischen Enthaltenseinbeziehung einen vollständigen Verband bildet, heißt ein *Zorn'scher Verband*, wenn die Verbindung T in $\mathfrak{V}$ von allen Elementen eines Turms $\mathfrak{T}$, der aus Elementen $X \in \mathfrak{V}$ mit $x \notin \cup X$ besteht, auch $x \notin \cup T$ erfüllt.

Hilfssatz 1. 7. *Sei $\mathfrak{V}$ ein Zorn'scher Verband und $D = \bigwedge_{X \in \mathfrak{M}} X$, wobei $\mathfrak{M}$ die Menge aller dualen Atome von $\mathfrak{V}$ ist, dann ist $\langle x \rangle$ für jedes $x \in \cup D$ ein kleines Element von $\mathfrak{V}$.*

Beweis. Gäbe es ein $x \in \cup D$ derart, daß $\langle x \rangle$ kein kleines Element von $\mathfrak{V}$ wäre, dann gäbe es ein $Y \in \mathfrak{V}$ mit $Y \neq 1$ und $1 = \langle x \rangle \vee Y$. Sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller $Z \in \mathfrak{V}$ mit $1 = \langle x \rangle \vee Z$ und $Z \neq 1$, dann ist $\mathfrak{N}$ nicht leer, weil $Y \in \mathfrak{N}$. Wäre $x \in \cup Z$ für ein $Z \in \mathfrak{N}$, dann wäre $\langle x \rangle \leqq Z$, und so $Z = 1$, was $Z \neq 1$ widerspricht. Sei $\mathfrak{T}$ ein Turm von Elementen $Z \in \mathfrak{N}$, dann gilt für die Verbindung T in $\mathfrak{V}$ aller Elemente von $\mathfrak{T}: x \notin T$, weil $\mathfrak{V}$ ein Zorn'scher Verband ist. Hieraus folgt $T \neq 1$. Wegen $Z \leqq T$ für alle $Z \in \mathfrak{T}$ ist $1 = \langle x \rangle \vee T$, also ist $T \in \mathfrak{N}$. Nach dem Maximum-Prinzip der Mengenlehre existiert dann in $\mathfrak{N}$ ein maximales Element M. Wäre M kein duales Atom von $\mathfrak{V}$, dann gäbe es ein $M < N < 1$ erfüllendes Element N von $\mathfrak{V}$, weshalb wegen $1 = \langle x \rangle \vee M$ auch $1 = \langle x \rangle \vee N$ und wegen $N \neq 1$ $x \notin \cup N$ wäre, d. h. $N \in \mathfrak{N}$, und M wäre nicht maximal in $\mathfrak{N}$. Aus diesem Widerspruch folgt $x \in \bigwedge_{X \in \mathfrak{M}} X \leqq M$, d. h. $1 = \langle x \rangle \vee M = M$, was $M \neq 1$ widerspricht, womit Hilfssatz 1. 7. bewiesen ist.

Folgerung 1. 8. *In einem Zorn'schen Verband $\mathfrak{V}$ gilt:*

(a) *Die Verbindung $S\mathfrak{V}$ aller kleinen Elemente von $\mathfrak{V}$ ist gleich dem Schnitt $D\mathfrak{V}$ aller dualen Atome von $\mathfrak{V}$.*

(b) *Wenn μ ein unitärer Verbandsepimorphismus von $\mathfrak{V}$ auf einen vollständigen Verband $\mathfrak{V}^{\mu}$ ist, dann gilt:*

$$(D\mathfrak{V})^{\mu} \leqq D\mathfrak{V}^{\mu}.$$

BEWEIS. Da $\mathfrak{V}$ vollständig ist, sind $S\mathfrak{V}$ und $D\mathfrak{V}$ wohlbestimmte Elemente von $\mathfrak{V}$. Wegen Hilfssatz 1. 6. ist $S\mathfrak{V} \leqq D\mathfrak{V}$, und nach Hilfssatz 1. 7. ist $D\mathfrak{V}$ eine Teilmenge von $S\mathfrak{V}$, womit (a) bewiesen ist.

Ist $x \in \bigcup D\mathfrak{V}$, dann ist $\langle x \rangle$ nach Hilfssatz 1. 7. ein kleines Element von $\mathfrak{V}$, folglich ist $\langle x \rangle^\mu$ wegen Hilfssatz 1. 3. ein kleines Element von $\mathfrak{V}^\mu$, also ist $\langle x \rangle^\mu \leqq D\mathfrak{V}^\mu$ für alle $x \in \bigcup D\mathfrak{V}$ nach Hilfssatz 1. 6., d. h. $(D\mathfrak{V})^\mu \leqq D\mathfrak{V}^\mu$.

Bemerkung 1. 9. Es ist unmöglich, in Folgerung 1. 8. (b) die Ungleichung durch eine Gleichheit zu ersetzen, wie BAER ([3], S. 157) für den Untergruppenverband einer freien abelschen Gruppe abzählbar unendlichen Ranges gezeigt hat.

Ein Element X eines Zorn'schen Verbandes $\mathfrak{V}$ ist *endlich erzeugt*, wenn es endlich viele Elemente $x_i \in \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{V}} X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gibt derart, daß $X = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$.

Satz 1. 10. *Für einen Zorn'schen Verband $\mathfrak{V}$, in dem der Verband $\mathfrak{N}$ der kleinen Elemente der Kern eines unitären Verbandsepimorphismus μ von $\mathfrak{V}$ auf einen vollständigen Verband $\mathfrak{V}^*$ ist, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Das größte Element* 1 *von $\mathfrak{V}$ ist endlich erzeugt.*

(2) *Der Schnitt $D\mathfrak{V}$ aller dualen Atome von $\mathfrak{V}$ ist ein kleines Element von $\mathfrak{V}$, und es gibt endlich viele $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Elemente $x_i \in \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{V}} X$ derart, daß das größte Element 1^* von $\mathfrak{V}^*$ die Form $1^* = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle^\mu$ hat.*

BEWEIS. Aus (1) folgt die Existenz von $x_i \in \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{V}} X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit $1 = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$, woraus $1^* = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle^\mu$ folgt.

Wäre die Verbindung $S\mathfrak{V}$ aller kleinen Elemente von $\mathfrak{V}$ kein kleines Element von $\mathfrak{V}$, dann existierte ein $Y \in \mathfrak{V}$ mit $Y \neq 1$ und $1 = S\mathfrak{V} \vee Y$. Sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller $Z \in \mathfrak{V}$ mit den Bedingungen:

$*$ $Y \leqq Z$,

$*\,*$ mindestens ein Erzeugendes x_i der 1 ist für jedes $Z \in \mathfrak{N}$ nicht in $\bigcup Z$ enthalten.

Dann ist $\mathfrak{N}$ nicht leer, da $Y \in \mathfrak{N}$; denn wären alle $x_i \in \bigcup Y$, dann wäre $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle \leqq Y$ und so wäre $Y = 1$, was $Y \neq 1$ widerspricht. Da $\mathfrak{V}$ ein Zorn'scher Verband ist, gibt es nach dem Maximum-Prinzip der Mengenlehre in $\mathfrak{V}$ ein maximales Element M von $\mathfrak{N}$, das den Forderungen $*$ und $*\,*$ genügt und deshalb ein duales Atom von $\mathfrak{N}$ ist. Die Bedingung $*$ impliziert $1 = S\mathfrak{V} \vee M$, woraus $M = 1$ nach Hilfssatz 1. 6. folgt, was der Bedingung $*\,*$ widerspricht. Aus Folgerung 1. 8. folgt $S\mathfrak{V} = D\mathfrak{V}$, weshalb (2) aus (1) folgt.

Gilt (2), dann ist $1^* = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle^\mu$ für endlich viele geeignete $x_i \in \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{V}} X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ woraus $1^* = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle^\mu \vee D\mathfrak{V}^\mu$ folgt, weil $D\mathfrak{V}$ ein Element des Kerns von μ ist. Da μ unitär ist, gilt $1 = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle \vee D\mathfrak{V}$, weshalb sich (1) wegen der Kleinheit von $D\mathfrak{V}$ aus (2) ergibt.

Folgerung 1. 11. *Ist $\mathfrak{V}$ ein Zornscher Verband, in dem der Verband $\mathfrak{N}$ der kleinen Elemente von $\mathfrak{V}$ der Kern eines unitären Verbandsepimorphismus μ von $\mathfrak{V}$ auf einen vollständigen Verband $\mathfrak{V}^\mu$ ist, der $\bigwedge_{X \in \mathfrak{B}} X^\mu = (D\mathfrak{V})^\mu$, wobei $\mathfrak{B}$ die Menge aller dualen Atome X von $\mathfrak{V}$ ist, erfüllt, dann ist* 0 *das einzige kleine Element von $\mathfrak{V}^\mu$.*

Beweis. Angenommen, K^μ ist ein kleines Element von $\mathfrak{V}^\mu$, dann ist $K^\mu \leqq D\mathfrak{V}^\mu$ nach Hilfssatz 1. 6. Ist X ein duales Atom von $\mathfrak{V}$, dann ist X^μ ein duales Atom von $\mathfrak{V}^\mu$, weil μ ein unitärer Verbandsepimorphismus von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}^\mu$ ist. Hieraus folgt $D\mathfrak{V}^\mu \leqq \bigwedge_{X \in \mathfrak{B}} X^\mu$, wobei $\mathfrak{B}$ die Menge aller dualen Atome von $\mathfrak{V}$ ist. Also gilt wegen Folgerung 1. 8

$$K^\mu \leqq D\mathfrak{V}^\mu \leqq \bigwedge_{X \in \mathfrak{B}} X^\mu = \Big(\bigwedge_{X \in \mathfrak{B}} X\Big)^\mu = (D\mathfrak{V})^\mu = 0,$$

weil $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}^\mu$ vollständig sind, und $\mathfrak{N}$ der Kern von μ ist.

Hat $\mathfrak{V}$ keine dualen Atome, dann erzeugt nach Hilfssatz 1. 7 jedes Element $x \in \bigcup_{X \in \mathfrak{B}} X$ ein kleines Element $\langle x \rangle$ von $\mathfrak{V}$, weshalb

$$1 = \vee \langle x \rangle, \quad x \in \cup X, \quad X \in \mathfrak{B},$$

woraus $\mathfrak{V}^\mu = 0$ folgt. Hiermit ist Folgerung 1. 11 bewiesen.

Beispiele. Der Verband aller Normalteiler einer Gruppe G, der Verband aller zweiseitigen Ideale eines Ringes R und der Verband aller R-Rechtsuntermoduln eines R-Rechtsmoduls M sind Verbände, die die Voraussetzungen von Satz 1. 10 und Folgerung 1. 11 erfüllen.

Bemerkung 1. 12. Da in beschränkten und in vollständigen Verbänden das Dualitätsprinzip gilt, sind auch die dualen Aussagen der Hilfssätze 1. 1 und 1. 6 für große Elemente richtig, wobei X ein großes Element eines beschränkten Verbandes $\mathfrak{V}$ ist, wenn 0 das einzige $0 = X \wedge A$ erfüllende Element A von $\mathfrak{V}$ ist. Wegen Hilfssatz 1. 6 gilt dann insbesondere: In einem vollständigen Verband $\mathfrak{V}$ ist die Verbindung aller Atome in dem Schnitt aller großen Elemente enthalten.

§ 2. Das Radikal von Brown—McCoy und das obere Nilradikal

In diesem Abschnitt soll ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Zusammenfallen des Radikals G von Brown—McCoy mit dem oberen Nilradikal N eines assoziativen Ringes R bewiesen werden, das in den nächsten Abschnitten benötigt wird. Ein Rechtsideal K von R heißt *potent*, wenn K mindestens ein nicht-nilpotentes Element besitzt.

Hilfssatz 2. 1. *Ist K ein potentes Rechtsideal eines Ringes R, der die Minimalbedingung für alle potenten Hauptrechtsideale von R erfüllt, die in K liegen, dann enthält K minimale potente Rechtsideale von R.*

Der Beweis ist trivial.

Hilfssatz 2. 2. *In jedem minimalen potenten Rechtsideal M eines Ringes R existiert ein Idempotent $e \neq 0$ derart, daß $M = eR$ gilt.*

Beweis. Da M potent ist, gibt es ein $y \in M$ derart, daß keine Potenz von y ein Nilelement ist. Wegen $y^2 \in yM$, ist yM ein potentes, in M enthaltenes Rechtsideal von R, woraus $M = yM$ folgt, weil M ein minimales potentes Rechtsideal von R ist. Also existiert ein $x \in M$ mit $y = yx$, weshalb $x^2 - x \in y_r \cap M$. Da $y = yx \neq 0$, ist $x \notin y_r$, und so ist $y_r \cap M < M$; folglich ist $y_r \cap M$ ein Nilrechtsideal von R, weil M ein minimales potentes Rechtsideal von R ist. Hieraus folgt die Existenz einer kleinsten $(x^2 - x)^n = 0$ erfüllenden natürlichen Zahl n; $x^2 - x$ ist ein Element des Jacobson-Radikals J von R.

Wäre $x \in J$, dann wäre $M = yM = yxM \leqq yJ$. Also ist $y = yx \in yJ$, weil y ein Element von M ist, woraus nach Hilfssatz 1 von Baer ([2], S. 4) $x = 0$ folgt. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, $x \notin J$. Also gilt:

$$\ast \qquad x^2 \equiv x \not\equiv 0 \mod J,$$

$$\ast\ast \qquad (x^2 - x)^n = 0.$$

Die Bedingung $\ast\ast$ impliziert nach Herstein ([7], S. 15, Lemma 1. 12), daß entweder x ein Nilelement ist, oder in M ein Idempotent $e \neq 0$ existiert. Wäre für eine natürliche Zahl m, $x^m = 0$, dann wäre wegen $\ast$

$$x \equiv x^2 \equiv \ldots \equiv x^m \equiv 0 \mod J,$$

was aber $x \not\equiv 0 \mod J$ widerspricht. Also gibt es in M ein Idempotent $e \neq 0$. Da $eR \leqq M$, und e kein Nilelement ist, ist eR ein potentes Rechtsideal von R, woraus $M = eR$ wegen der Minimalität von M folgt.

Bezeichnung. Wenn e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Elemente von R sind, dann werde mit

$$1 - (1 - e_n)(1 - e_{n-1}) \ldots (1 - e_2)(1 - e_1)$$

das Element

$$e_n + e_{n-1} + \ldots + e_2 + e_1 - (e_n e_{n-1} + e_n e_{n-2} + \ldots + e_{n-1} e_{n-2} + \ldots + e_2 e_1) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} e_n e_{n-1} \ldots e_2 e_1$$

bezeichnet; in Ringen R mit Einselement 1 sind beide Elemente identisch.

Hilfssatz 2. 3. *Ist $\mathfrak{M}$ eine abzählbare Menge idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eines Ringes R derart, daß $e_i e_k = 0$ für $i < k$ für alle $e_j \in \mathfrak{M}$ gilt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{M}$ ist endlich.*

(2) *Die Kette der Hauptrechtsideale $(1 - (1 - e_i)(1 - e_{i-1}) \ldots (1 - e_1))_R$ von R hat nur endlich viele Glieder.*

Beweis. Wenn $\mathfrak{M}$ eine unendliche, abzählbare Menge Idempotenter $e_i \neq 0$ ist, die der Voraussetzung von Hilfssatz 2. 3 genügen, dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl i ein $e_i \neq 0$ von $\mathfrak{M}$. Hat $\mathfrak{M}$ nur k Elemente $e_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, dann wird $e_{k+s} = 0$ für alle $s = 1, 2, \ldots$ gesetzt. Sei

$$I(n) = (1 - (1 - e_n)(1 - e_{n-1}) \ldots (1 - e_2)(1 - e_1))_R$$

für jede natürliche Zahl n, dann ist $y = 1-(1-e_{n+1})(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1)$ ein Element von $I(n+1)$. Es gilt die Gleichung:

$$* \qquad y = 1-(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1)+e_{n+1}(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1).$$

Mit y ist auch $ye_{n+1} = e_{n+1} \in I(n+1)$, woraus sich wegen $*$ ergibt: $1-(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1) \in I(n+1)$, d. h. $I(n) \leqq I(n+1)$ für alle nat. Zahlen n.

Wäre $I(n) = I(n+1)$ für eine natürliche Zahl n, dann wäre $y = 1-(1-e_{n+1})(1-e_n)\dots(1-e_1) \in I(n)$, weshalb eine ganz-rationale Zahl q und ein Element $r \in R$ existierten so, daß

$$y = q[1-(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1)]+[1-(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1)]r$$

wäre, woraus folgte, daß

$$ye_{n+1} = e_{n+1} = [1-(1-e_n)\dots(1-e_2)(1-e_1)]re_{n+1}.$$

Hieraus folgt

$$e_{n+1} = e_{n+1}^2 = e_{n+1}[1-(1-e_n)(1-e_{n-1})\dots(1-e_1)]re_{n+1} = 0$$

wegen $e_ie_k = 0$ für $i<k$. Aus diesem Widerspruch folgt $I(n)<I(n+1)$.

Gilt nun (1), dann gilt erst recht (2). Ist (2) efüllt, dann ist $\mathfrak{M}$ nicht unendlich, denn sonst wäre $I(1)<I(2)<\dots$ wegen $I(n) < I(n+1)$ für alle natürlichen Zahlen n eine unendliche Kette, was (2) widerspricht, womit Hilfssatz 2. 3 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. 4. *Für einen Ring R sind äquivalent:*

(1) $J=N$

(2) *Wenn $a \in J$ kein Nilelement ist, dann hat die Kette $(a)_R \geqq (a^2)_R \geqq \dots$ nur endlich viele verschiedene Glieder.*

Beweis. Wenn (1) erfüllt ist, enthält J nur Nilelemente, weshalb (2) aus (1) folgt. Es gelte (2), wäre dann $J \neq N$, dann gäbe es mindestens ein nicht-nilpotentes Element a in J. Da die Kette $(a)_R \geqq (a^2)_R \geqq \dots$ abricht, existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, daß $(a^n)_R = (a^{n+1})_R$ und $n \geqq 2$ gilt. Also ist $a^n = qa^{n+1} + a^{n+1}b$, wobei q ganz-rational und $b \in R$ ist. Ist $c = qa+ab$, dann ist $c \in J$, und so gilt $a^n = a^nc \in a^nJ$, woraus nach Baer ([2], S. 4) $a^n=0$ folgt. Demnach wäre a ein Nilelement. Aus diesem Widerspruch folgt (1).

Bemerkung 2. 5. Es ist ein ungelöstes Problem, ob das obere Nilradikal N eines beliebigen Ringes R alle einseitigen Nilideale enthält. Aus Hilfssatz 2. 4 folgt, daß in Ringen R mit Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale alle einseitigen Nilideale in der Summe aller zweiseitigen Nilideale enthalten sind; dabei heißt ein Rechtsideal *sternregulär*, wenn alle seine Elemente quasirechtsregulär sind.

Hilfssatz 2. 6. *Ist H ein potentes Ideal eines Ringes R derart, daß $J<H$, und in H kein Idempotent $e \neq 0$ existiert, das in H/N eine Linkseins repräsentiert. Die Minimalbedingung gelte für die Menge der potenten Hauptrechtsideale von R, die in H enthalten sind.*

Dann gibt es eine abzählbar unendliche Menge $\mathfrak{M}$ *von Idempotenten* e_i, *wobei* $e_0=0$ *und* $i=0, 1, 2, \ldots$ *ist, des Ideals* H *und potente Rechtsideale* Y_i *von* R, *die den folgenden Bedingungen genügen:*

(1) *Jedes* $e_i \neq 0$ *erzeugt ein in* H *liegendes minimales potentes Rechtsideal* $M_i=e_iR$ *von* R.

(2) $Y_0 \geqq Y_1 \geqq \ldots \geqq Y_j \ldots$ *ist eine echt absteigende Kette von potenten Rechtsidealen von* R.

(3) *Für jede natürliche Zahl* $j=0, 1, 2, \ldots$ *gilt:*

a) $H = e_1R \dotplus e_2R \dotplus \ldots \dotplus e_jR \dotplus Y_j$,

b) $e_ie_k=0$ *für* $0 \leqq i < k \leqq j$,

c) $e_iY_j=0$ *für* $0 \leqq i \leqq j$,

d) $e_{i+1} \in Y_i$ *für* $0 \leqq i+1 \leqq j$, *wenn* $j \neq 0$.

Beweis. Hilfssatz 2. 6. wird mittels vollständiger Induktion nach j bewiesen. Für $j=0$ ist nichts zu beweisen. Angenommen, die Behauptung sei für alle natürlichen Zahlen $j \leqq n$ gezeigt. Da Y_n ein potentes, in H liegendes Rechtsideal von R ist, enthält es wegen der Minimalbedingung für alle potenten in H enthaltenen Hauptrechtsideale von R nach Hilfssatz 2. 1 ein minimales potentes Rechtsideal M_{n+1} von R, das nach Hilfssatz 2. 2 von einem Idempotent $e_{n+1} \neq 0$ erzeugt wird. Zu dem Idempotent e_{n+1} von Y_n gehört die Zerlegung:

$$Y_n = e_{n+1}R \dotplus (1-e_{n+1})\, Y_n.$$

Ist $Y_{n+1} = (1-e_{n+1})Y_n$, dann gilt:

a′) $H = e_1R \dotplus e_2R \dotplus \ldots \dotplus e_{n+1}R \dotplus Y_{n+1}$,

c′) $e_iY_{n+1}=0$ für $0 \leqq i \leqq n+1$, was aus $e_{n+1}Y_{n+1}=0$, $Y_{n+1} < Y_n$ und $e_iY_n=0$ für $0 \leqq i \leqq n$ folgt,

d′) $e_{n+1} \in Y_n$, woraus sich dann

b′) $e_ie_k=0$ für $0 \leqq i < k \leqq n+1$ wegen der Induktionsannahme ergibt.

Wäre Y_{n+1} ein Nilrechtsideal von R, so wäre es im Jacobson-Radikal J von R enthalten. Wegen $J \leqq H$ und der Minimalbedingung für alle in H enthaltenen potenten Hauptrechtsideale von R folgte dann aus Hilfssatz 2. 4: $J=N$, weshalb $Y_{n+1} \leqq N$ wäre. Bildet man nun das Element

$$\begin{aligned} e &= e_{n+1}+e_n+\ldots+e_2+e_1+ \\ &\quad +(-1)(e_{n+1}e_n+e_{n+1}e_{n-1}+\ldots+e_ne_{n-1}+\ldots+e_2e_1)+\ldots+(-1)^{n+2}e_{n+1}e_n\ldots e_2e_1 \\ &= 1-(1-e_{n+1})(1-e_n)\ldots(1-e_2)(1-e_1), \end{aligned}$$

das in H liegt, dann ist $e_j=ee_j$ für $j = 0, 1, 2, n+1$ wegen der Bedingung $e_ie_k=0$ für $0 \leqq i < k \leqq n+1$. Hieraus folgte, $e \neq 0$ wäre ein Idempotent von H, das in H/N eine Linkseins repräsentierte, was der Voraussetzung von Hilfssatz 2. 5 widerspräche. Also ist Y_{n+1} ein potentes Rechtsideal von R.

Nach Induktionsannahme ist $Y_0 > Y_1 > Y_2 > \ldots > Y_n$ eine echt absteigende Kette von potenten Rechtsidealen von R. Da $Y_n = e_{n+1}R \dotplus (1-e_{n+1})Y_n$, $e_{n+1} \in Y_n$, aber $e_{n+1} \notin Y_{n+1}$ wegen $Y_{n+1} = (1-e_{n+1})Y_n$ ist, gilt $Y_n < Y_{n+1}$. Hieraus folgt dann (b′). Hiermit ist der Hilfssatz 2. 6 bewiesen.

Satz 2. 7. *Für einen Ring R sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(1) $G = N$.

(2) *Die Minimal- und die Maximalbedingung ist für alle potenten Hauptrechts ideale von R, die in G enthalten sind, erfüllt.*

(3) *Die Minimalbedingung gilt für alle in G enthaltenen potenten Hauptrechtsideale von R, und jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ von G so, daß $e_i e_k = 0$ für $i < k$ für alle $e_j \in \mathfrak{M}$ ist, ist endlich.*

(4) *Die Minimalbedingung gilt für alle potenten, in G enthaltenen Rechtsideale von R.*

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt. Es gelte (2), und $\mathfrak{M}$ sei eine abzählbare Menge idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ von G derart, daß $e_i e_k = 0$ für $i < k$ für alle $e_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ ist, dann sind die Hauptrechtsideale $(e_1)_R$, $(1-(1-e_2)(1-e_1))_R$, ... von R alle in G enthalten und potent, denn für jede natürliche Zahl n gilt: $[1-(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_2)(1-e_1)]e_n = e_n$, weshalb e_n ein Element von $(1-(1-e_n)\ldots(1-e_2)(1-e_1))_R$ ist. Wegen der Maximalbedingung für potente Hauptrechtsideale bricht dann die Kette $(e_1)_R \leqq (1-(1-e_2)(1-e_1))_R \leqq \ldots$ nach endlich vielen Gliedern ab, woraus nach Hilfssatz 2. 3 die Endlichkeit von $\mathfrak{M}$ folgt; mit (2) gilt also auch (3).

Sei (3) erfüllt und $G \neq N$; gäbe es in G kein Idempotent $e \neq 0$, das in G/N eine Linkseins repräsentiert, dann wären wegen $N \leqq G$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 2. 6 erfüllt, weshalb in G eine abzählbar unendliche Menge $\mathfrak{M}$ von Idempotenten $e_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ existierte derart, daß $e_i e_k = 0$ für $i < k$ wäre, was wegen (3) unmöglich ist. Also existiert in G/N die Eins. Da G/N das Brown—McCoy'sche Radikal von R/N ist, folgt hieraus nach Brown—McCoy ([4], S. 51): $G = N$; demnach ist (1) eine Folge von (3).

Aus der Gültigkeit von (1) folgt die von (4). Aus (4) und $G \neq N$ folgte unter der Annahme der Nichtexistenz eines Idempotent $e \neq 0$ in G, das in G/N eine Linkseins repräsentiert, nach Hilfssatz 2. 6, daß in G unendlich viele Rechtsideale Y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ von R existieren derart, daß $Y_0 > Y_1 > Y_2 > \ldots$ eine echt absteigende Kette von potenten Rechtsidealen von R ist, was der Bedingung (4) widerspricht. Also existiert in G/N die Eins, woraus wiederum $G = N$ folgt. Hiermit ist der Satz 2. 6 bewiesen.

Bemerkung 2. 8. Ist R der einfache Ring aller $\aleph_0 \times \aleph_0$ Matrizen mit endlich vielen Spalten- und Zeilenvektoren, die vom Nullvektor verschieden sind, über dem Körper der rationalen Zahlen (Vgl. F. Szász [11], S. 431), dann hat R kein Einselement und ist so nach Brown und McCoy ([4], S. 51) ein G-radikaler Ring, während er N-halbeinfach ist, obwohl R sogar die Minimalbedingung für alle Hauptrechts- und Hauptlinksideale nach F. Szász ([10], S. 64) erfüllt. Dieses Beispiel zeigt, daß die Maximalbedingung für potente, in G enthaltene Hauptrechtsideale von R in Ringen mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale nicht nur notwendig, sondern auch unentbehrlich für die Aussage $G = N$ ist.

Hilfssatz 2. 9. *R sei ein potenter Ring mit Minimalbedingung für alle potenten Hauptrechtsideale. Wenn jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ idempotenter Elemente $e_i \neq 0$*

von R derart, daß $e_i e_k = 0$ für $i < k$ für alle $e_i \in \mathfrak{M}$ gilt, endlich ist, dann existiert in R ein Idempotent $e \neq 0$ so, daß $(1-e)R$ ein Nilrechtsideal von R ist.

Beweis. Angenommen, Hilfssatz 2. 9 ist falsch. Dann folgt durch vollständige Induktion nach n mittels der Hilfssätze 2. 1 und 2. 2, daß in R abzählbar unendlich viele Idempotente $e_i \neq 0$ existieren derart, daß für jede natürliche Zahl n gilt:

a) $$R = e_1 R \dotplus e_2(1-e_1)R \dotplus \ldots \dotplus e_n(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)R \dotplus$$
$$\dotplus (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)R,$$

b) $e_i \in (1-e_{i-1})(1-e_{i-2})\ldots(1-e_1)R$ für $i \geqq 1$, wobei $e_0 = 0$ ist.

c) $(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)R$ ist ein potentes Rechtsideal von R.

Aus b) ergibt sich: $e_i e_k = 0$ für $i < k$. Also existierte in R eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 2. 10. *Für einen Ring $R \neq 0$ mit Minimalbedingung für alle potenten Hauptrechtsideale sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *In R existiert eine Linkseins.*

(2) *Jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ von R mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$ ist endlich, und jedes Nilrechtsideal ist ein kleines Rechtsideal von R.*

(3) *In R/G existiert die Eins, jedes Nilrechtsideal ist ein kleines Rechtsideal, und jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ von in G enthaltenen Idempotenten e_i mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$ ist endlich.*

Beweis. Aus der Existenz einer Linkseins folgt nach Baer ([2], S. 4), daß das Jacobson-Radikal J von R ein kleines Rechtsideal von R ist, weshalb nach Hilfssatz 1. 1 (a) alle Nilrechtsideale kleine Rechtsideale von R sind. Angenommen, $\mathfrak{M}$ wäre eine unendliche, abzählbare Menge idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$. Ist e eine Linkseins von R, dann gilt für jede natürliche Zahl n, für die e_n definiert ist:

$$(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)R = ((1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)e)_R;$$

denn es ist stets

$$(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)R = (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR \leqq$$
$$\leqq ((1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)e)_R.$$

Ist

$$x \in ((1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)e)_R,$$

dann ist

$$x = q(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)e + (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)er$$

für eine geeignete ganz-rationale Zahl q und ein $r \in R$. Da e eine Linkseins von R ist, gilt:

$$x = (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)(qe+er) = (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)e(qe+er);$$

also ist $x \in (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR$, weil $qe+er \in R$ ist. Zu dem Idempotent

e_1 gehört die Zerlegung: $R = e_1R \dotplus (1-e_1)eR$. Angenommen, es wäre schon bewiesen, daß

$$R = e_1R \dotplus e_2(1-e_1)eR + \ldots + e_n(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR + (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR,$$
$$(1-e_{i-1})(1-e_{i-2})\ldots(1-e_1)eR > (1-e_i)(1-e_{i-1})\ldots(1-e_1)eR$$

für alle $i \leqq n$ und $(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR$ ein potentes Rechtsideal von R ist. Dann hat das Element e_{n+1} die Form

$$e_{n+1} = e_1r_1 + e_2(1-e_1)er_2 + \ldots +$$
$$+ e_n(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)er_n + (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)er_{n+1}$$

für geeignete $r_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, woraus wegen $e_ie_k = 0$ für alle $i < k$ folgt:

$$e_{n+1} = (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)r_{n+1} \in (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR$$

Zu dem Idempotenten e_{n+1} gehört die Zerlegung:

$$(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR =$$
$$= e_{n+1}(1-e_n)\ldots(1-e_1)eR \dotplus (1-e_{n+1})(1-e_n)\ldots(1-e_1)eR,$$

weshalb $(1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR > (1-e_{n+1})(1-e_n)\ldots(1-e_1)eR$ ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, daß

$$(1-e_1)eR > (1-e_2)(1-e_1)eR > \ldots$$
$$\ldots > (1-e_n)(1-e_{n-1})\ldots(1-e_1)eR > (1-e_{n+1})\ldots(1-e_1)eR$$

eine unendliche, echt absteigende Kette von potenten Hauptrechtsidealen von R ist, was der Minimalbedingung für potente Hauptrechtsideale von R widerspricht. Also folgt (2) aus (1).

Gilt (2), dann ist R ein potenter Ring, denn sonst wäre $R = 0$, weil alle Nilrechtsideale kleine Rechtsideale von R sind. Da die Voraussetzungen von Hilfssatz 2. 9 erfüllt sind, existiert in R ein Idempotent e derart, daß $(1-e)R$ ein Nilrechtsideal von R ist. Wegen $R = eR \dotplus (1-e)R$ und der Kleinheit von $(1-e)R$ folgt $R = eR$, weshalb e eine Linkseins von R ist. Ist eine der äquivalenten Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann existiert in R/G die Eins, und wegen (2) ist jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ von in G enthaltenen Idempotenten $e_i \neq 0$ mit $e_ie_k = 0$ für $i < k$ endlich. Also folgt (3) aus (1). Mit (3) sind die Voraussetzungen von Satz 2. 7 erfüllt, woraus $G = N$ folgt, was $J = N$ impliziert, und so ist J ein kleines Rechtsideal von R. Da J ein Nilideal ist, folgt aus $Rx = Nx$ nach BAER ([2], S. 9), daß x ein Nilelement von R ist. Nach BAER ([2], S. 7) existiert dann in R eine Linkseins. Hiermit ist Satz 2. 10 bewiesen.

§ 3. Kleine Ideale und Radikale

Allgemein ist ein *Radikal* eine eindeutige Zuordnungsvorschrift f, die jedem Ring R ein Ideal fR von R zuordnet so, daß

$$(fR)^\mu \leqq fR^\mu$$

für jedem Epimorphismus μ von R auf R^μ ist, und

$$f(R/fR)=0$$

ist. Beispiele hierfür sind die Radikale von BAER, BROWN—MCCOY und JACOBSON.

Hilfssatz 3. 1. *Die Zuordnungsvorschriften:*

a) $D\colon R \to DR$,

d) $D^r\colon R \to D^r R$,

c) $D^l\colon R \to D^l R$

sind auf der Klasse aller assoziativen Ringe R Radikale.

BEWEIS. Nach Folgerung 1. 8 gilt: DR ist die Summe aller kleinen zweiseitigen Ideale von R; $D^r R$ ist die Summe aller kleinen Rechtsideale von R.

Es ist klar, daß $D^r R$ ein Rechtsideal von R ist. Ist K ein kleines Rechtsideal von R, dann ist K auch ein kleiner R-Rechtsuntermodul des R-Rechtsmoduls R. Wegen Hilfssatz 1. 3 ist xK ein kleiner R-Rechtsmodul des R-Rechtsmoduls xR für jedes $x \in R$. Ist X ein $R = xK + X$ erfüllendes Rechtsideal von R, dann folgt aus dem Dedekind'schen Modulsatz:

$$xR = xK + (xR \cap X),$$

weshalb

$$X \geqq xR \cap X = xR \geqq xK$$

ist, weil xK ein kleiner R-Rechtsuntermodul von xR ist. Hieraus folgt $R = X$, und daher ist xK ein kleines Rechtsideal von R. Also ist $xK \leqq D^r R$ für alle $x \in R$, d. h. $D^r R$ ist ein zweiseitiges Ideal von R.

Ist μ ein Epimorphismus von R auf R^μ, dann ist

$$(DR)^\mu \leqq DR^\mu \quad \text{und} \quad (D^r R)^\mu \leqq D^r R^\mu$$

eine Folge von Folgerung 1. 8.

Da der Verband aller zweiseitigen Ideale eines Ringes R und der Verband aller Rechtsideale von R die Voraussetzungen von Folgerung 1. 11 erfüllen, gibt es in R/DR keine kleinen zweiseitigen Ideale $X \neq 0$, bzw. keine kleinen Rechtsideale $Y \neq 0$ in $R/D^r R$. Also gilt nach Folgerung 1. 8

$$D(R/DR) = 0 = D^r(R/D^r R),$$

womit Hilfssatz 3. 1 bewiesen ist.

Bemerkung. Den Beweis dafür, daß $D^r R$ ein zweiseitiges Ideal des Ringes R ist, verdanke ich Herrn Professor KASCH.

Folgerung 3. 2. (a) *Das Nullideal ist das einzige kleine zweiseitige Ideal von* R/DR.

(b) *Das Nullideal ist das einzige kleine Rechtsideal von* $R/D^r R$.

(c) DR *ist der Durchschnitt aller Ideale* I *von* R *so, daß in* R/I *das Nullideal das einzige kleine Ideal ist.*

(d) *$D^r R$ ist der Durchschnitt aller Ideale Y von R derart, daß in R/Y das Nullideal das einzige kleine Rechtsideal ist.*

(e) *Der Ring R ist als Ideal dann und nur dann endlich erzeugt, wenn die Summe DR aller kleinen Ideale von R in R klein ist, und R/DR als Ideal endlich erzeugt ist.*

(f) *Der Ring R ist als Rechtsideal von R dann und dann endlich erzeugt, wenn die Summe aller kleinen Rechtsideale von R ein kleines Rechtsideal von R ist, und $R/D^r R$ als Rechtsideal endlich erzeugt ist.*

Der BEWEIS folgt sofort aus Hilfssatz 3. 1, Satz 1. 10, Folgerung 1. 8 und Folgerung 1. 11.

KEGEL hat in ([9], S. 104) den Hyperannihilator eines Ringes R definiert, ähnlich läßt sich auch der obere Rechtsannihilator R^r eines Ringes R konstrieren:

Definition. Die Rechtsannihilatorkette des Ringes R wird definiert durch:

1. $$R_{r,0} = 0$$

2. $R_{r,\beta}$ ist das eindeutig bestimmte, $R_{r,\beta-1}$ enthaltende Ideal von R, das $R_{r,\beta}/R_{r,\beta-1} = [R/R_{r,\beta-1}]_r$ erfüllt, wenn β keine Limeszahl ist.

3. Ist β eine Limeszahl, dann ist

$$R_{r,\beta} = \sum_{\mu<\beta} R_{r,\mu}.$$

Da R eine Menge ist, existiert eine (kleinste) Ordnungszahl π derart, daß $R_{r,\pi} = R_{r,\pi+1}$ ist. $R^r = R_{r,\pi}$ heißt der *obere Rechtsannihilator* des Ringes R. Analog definiert man den oberen Linksannihilator R^l.

Hilfssatz 3. 3. *In jedem Ring R gilt:*

(a) $(R/R^r)_r = 0 = (R/R^r)^r$.

(b) *R^r ist die Summe aller Ideale I von R mit der Eigenschaft, daß es zu jedem Epimorphismus μ von R auf R^μ mit $I^\mu \neq 0$ in I^μ ein Ideal $K \neq 0$ von R^μ mit $R^\mu K = 0$ gibt.*

(c) $R^r = \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X$, *wobei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Ideale X von R mit $(R/X)_r = 0$ ist.*

(d) *R^r ist im unteren Nilradikal B des Ringes R erhalten.*

BEWEIS. (a) folgt sofort aus der Definition des oberen Rechtsannihilators des Ringes R.

Ein Ideal I des Ringes R heißt $\mathfrak{e}$-Ideal, wenn für jeden Epimorphismus μ von R mit $I^\mu \neq 0$ in I^μ ein Ideal $K \neq 0$ von R^μ existiert mit $(R^\mu)K = 0$. Die Summe S aller $\mathfrak{e}$-Ideale von R ist ein $\mathfrak{e}$-Ideal. Wäre $S \not\leqq R^r$, dann gäbe es ein in $(S + R^r)/R^r$ enthaltenes Ideal $K \neq 0$ von R/R^μ mit $(R/R^r)K = 0$, was wegen (a) unmöglich ist. Also ist $S \leqq R^r$.

Wäre R^r kein $\mathfrak{e}$-Ideal von R, dann existierte eine erste Ordnungszahl β, für die $R_{r,\beta}$ kein $\mathfrak{e}$-Ideal ist. Nach der Definition einer Rechtsannihilatorkette von R folgt dann, daß β keine Limeszahl ist, also ist $R_{r,\beta-1}$ ein $\mathfrak{e}$-Ideal von R. Hieraus folgt die Existenz eines Epimorphismus ε von R mit Kern K so, daß $(R_{r,\beta} + K)/K \neq 0$, aber $(R^\varepsilon)V \neq 0$ für alle in $(R_{r,\beta} + K)/K$ enthaltenen Ideale $V \neq 0$ von R^ε. Wäre $R_{r,\beta-1} \not\leqq K$, dann wäre $0 \neq (R_{r,\beta-1} + K)/K \leqq (R_{r,\beta} + K)/K$, und daher existierte ein Ideal $V \neq 0$ von R/K in $(R_{r,\beta-1} + K)/K$ mit $(R/K)V = 0$, weil $R_{r,\beta-1}$ ein $\mathfrak{e}$-Ideal von R ist. Also ist $R_{r,\beta-1} < K$. Nach Definition von $R_{r,\beta}$ gilt:

$$(R/R_{r,\beta-1})(R_{r,\beta}/R_{r,\beta-1}) = 0,$$

woraus

$$0 = [(R/R_{r,\beta-1})/(K/R_{r,\beta-1})][((R_{r,\beta}+K)/R_{r,\beta-1})/(K/R_{r,\beta-1})],$$

folgt, und so ist

$$(R/K)[(R_{r,\beta}+K)/K] = 0,$$

weshalb $R_{r,\beta}$ ein e-Ideal von R ist, was unmöglich ist. Hiermit ist (b) bewiesen.

(c) ist eine Folge der Aussagen (a) und (b). Das untere Nilradikal B des Ringes R ist nach JACOBSON ([8], S. 196, Theorem 1) der Durchschnitt aller Primideale von R. Ist P ein Primideal von R, dann ist $(R/P)_r = 0$, da R/P ein Primring ist. Aus (c) folgt daher (d).

Bemerkung 3. 4. Daß man in Hilfssatz 3. 3 die Ungleichung $R^r \leqq BR$ i. a. nicht durch die Gleichung $R^r = BR$ ersetzen kann — noch nicht einmal für endliche Ringe —, zeigt folgendes Beispiel: Ist R der Ring aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix},$$

wobei a, b, c, d, e Elemente eines endlichen Körpers F sind, dann ist R nach BAER ([1], S. 637) ein endlicher Ring mit $R_l = 0 = R_r$. Das Jacobson-Radikal fällt in R mit BR zusammen und besteht aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $0 = R_r \neq BR$.

Ein R-Rechtsmodul M heißt *trivial*, wenn $Mr = 0$ für alle Elemente r des R Ringes R gilt.

Hilfssatz 3. 5. *Für jeden Ring R gilt:*

(a) *Alle kleinen Rechtsideale von R sind im Jacobson-Radikal J enthalten.*

(b) *Alle kleinen zweiseitigen Ideale von R liegen im Brown—McCoy'schen Radikal G.*

(c) *Wenn R sich nicht epimorph auf einen einfachen Zeroring abbilden läßt, ist das untere Nilradikal B in der Summe DR aller kleinen zweiseitigen Ideale enthalten.*

(d) *Wenn R sich als R-Rechtsmodul nicht epimorph auf einen einfachen, trivialen R-Rechtsmodul abbilden läßt, dann ist der obere Linksannihilator R^l von R in der Summe aller kleinen Rechtsideale enthalten.*

BEWEIS. Das Jacobson-Radikal J ist bekanntlich der Durchschnitt aller modularen, maximalen Rechtsideale (bzw. Linksideale) von R, weshalb der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale von R in J enthalten ist. Aus Hilfssatz 1. 6 folgt dann (a).

Das Radikal G von Brown—McCoy des Ringes R ist nach Brown—McCoy ([4], S. 52, Theorem 7) der Durchschnitt aller modularen, maximalen Ideale von R. Also enthält G den Durchschnitt aller maximalen Ideale von R und wegen Hilfssatz 1. 6 auch alle kleinen zweiseitigen Ideale von R.

Das untere Nilradikal B ist nach Jacobson ([8], S. 196, Theorem 1) der Durchschnitt aller Primideale. Jedes maximale Ideal von R ist ein Primideal, wenn R sich nicht epimorph auf einen einfachen Zeroring abbilden läßt. Aus Hilfssatz 1. 6 folgt, daß B in der Summe aller kleinen Ideale von R liegt.

Wenn R keine maximalen Rechtsideale besitzt, dann ist $R = D^r R$, weshalb in diesem Fall (d) gilt. Hat R maximale Rechtsideale, dann wird (d) mittels transfiniter Induktion bewiesen. Es ist klar, daß $R_{l,0}$ in $D^r R$ enthalten ist. Es sei gezeigt, daß $R_{l,\beta} \leqq D^r R$ für alle $\beta < \mu$. Wenn μ eine Limeszahl ist, dann ist

$$R_{l,\mu} = \sum_{\beta < \mu} R_{l,\beta} \leqq D^r R.$$

Wenn μ keine Limeszahl ist, dann ist $R_{l,\mu-1} \leqq D^r R$ nach Induktionsannahme. Wäre $R_{l,\mu} \not\leqq D^r R$, dann existierte ein maximales Rechtsideal M von R mit $R = R_{l,\mu} + M$. Ist $\bar{x} \in R/M$, dann ist $\bar{x} = r + M$, wobei $r \in R_{l,\mu}$. Ist $y \in R$, dann ist $\bar{x}y = ry + M$. Da $ry \in R_{l,\mu} R \leqq R_{l,\mu-1} \leqq D^r R \leqq M$ nach Definition von $R_{l,\mu}$ ist, gilt: $\bar{x}y = 0$, d. h. R/M ist ein einfacher trivialer R-Rechtsmodul, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $R_{l,\mu} \leqq D^r R$. Durch transfinite Induktion folgt $R^l \leqq D^r R$.

Hilfssatz 3. 6. *Ist R ein Ring mit Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale derart, daß R als R-Rechtsmodul sich nicht epimorph auf einen einfachen, trivialen R-Rechtsmodul abbilden läßt. Wenn in $R/J \neq 0$ die Eins existiert, dann gilt:*

(a) *Es gibt ein die Eins in R/J repräsentierendes Idempotent $e \neq 0$ in R derart, daß $R(1-e) \leqq D^r R$;*

(b) *In $R/D^r R$ existiert eine Rechtseins.*

Beweis. Wegen der Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale ist das Jacobson-Radikal J nach Hilfssatz 2. 4 ein Nilideal von R. Da in R/J die Eins existiert, gibt es in R nach Baer ([2], S. 8) ein Idempotent $e \neq 0$, das in R/J die Eins repräsentiert.

Ist M ein maximales Rechtsideal von R, dann gilt

$$R = M + U$$

für jedes Rechtsideal U von R mit $U \not\leqq M$. Ist $k \in R$, aber $k \notin M$, dann ist $R = M + (k)_R$. Wäre nicht $sJ \leqq M$ für alle $s \in (k)_R$, dann wäre $R = M + sJ$ für ein geeignetes $s \in (k)_R$. Also gilt: $s = m + sj$ für geeignete $m \in M$, $j \in J$. Da j sternregulär ist, gilt $j = jl - l$ für ein gewisses $l \in J$. Hieraus folgt: $s = m + sjl - sl = m + (s-m)l - sl = m - ml \in M$, woraus $sJ \leqq M$, und so $R = M$ folgte. Aus diesem Widerspruch ergibt sich: $sJ \leqq M$ für alle $s \in (k)_R$, d. h. $(k)_R \leqq M$. Da $J + e$ die Eins von R/J ist, gilt $R = eR + J$. Wäre $(k)_R e \leqq M$, dann wäre $(k)_R R = (k)_R(eR + J) \leqq (k)_R eR + (k)_R J \leqq M$, und R/M wäre ein trivialer, einfacher R-Rechtsmodul, der ein epimorphes Bild von R wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $(k)_R e \not\leqq M$. Für alle $r \in R$

gilt: $re-er\in J$, weil e eine zweiseitige Eins in R/J repräsentiert. Hieraus folgt für alle $r\in R$:

$$[(k)_R e+M]r\subseteq(k)_R er+M =$$
$$=(k)_R(re-(re-er))+M\subseteq(k)_R re+(k)_R(re-er)+M\subseteq(k)_R e+M,$$

da $(k)_R$ ein Rechtsideal von R, $re-er\in J$ und $(k)_R J\subseteq M$ ist. Also ist $(k)_R e+M$ ein Rechtsideal von R, das echt größer als M ist, d. h. $R=(k)_R e+M$. Ist $r\in R$, dann ist $r=q'ke+kr'e+m'$, wobei q' ganz-rational, $r'\in R$ und $m'\in M$ ist. Dann ist $re=q'ke+kr'e+m'e$ und so $r-re=m'-m'e\in M$ für alle $r\in R$. Da M ein beliebiges maximales Rechtsideal von R ist, gilt: $R(1-e)\subseteq D^r R$. Hieraus folgt wegen $R=Re\dotplus R(1-e)$, daß in $R/D^r R$ eine Rechtseins existiert.

Satz 3. 7. *Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *R besitzt eine Rechtseins, und J ist ein Nilideal.*

(2) a) *R erfüllt die Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale von R.*

b) *R läßt sich als R-Rechtsmodul nicht epimorph auf einen einfachen, trivialen R-Rechtsmodul abbilden.*

c) *Die Summe $D^r R$ aller kleinen Rechtsideale ist ein kleines Linksideal von R.*

d) *In R/J existiert die Eins.*

(3) a) *Ein Linksideal K von R ist dann und nur dann ein kleines Linksideal von R, wenn es ein Nillinksideal ist.*

b) *Es gibt ein Nilideal V von R derart, daß R/V eine Rechtseins besitzt.*

(4) a) *Jedes lokal-nilpotente Linksideal ist ein kleines Linksideal von R.*

b) *In R/R^r existiert die Eins.*

c) *J ist ein Nilideal.*

Beweis. Gilt (1), dann ist das Jacobson-Radikal J von R nach Baer ([2], S. 7, Satz 2) ein kleines Linksideal. Da J alle Nillinksideale von R enthält, folgt aus Hilfssatz 1. 1, daß jedes Nillinksideal ein kleines Linksideal von R ist. Ist K ein kleines Linksideal, dann ist es nach Hilfssatz 3. 5 im Jacobson-Radikal J von R enthalten, und somit wegen (1) ein Nillinksideal von R. Da in R/J die Eins existiert, folgt (3) aus (1).

Wenn (3) erfüllt ist, dann ist $V\subseteq J$ und J/V das Jacobson-Radikal des Ringes R/V, weil V als Nilideal in J enthalten ist. Aus der Existenz einer Rechtseins in R/V folgt $D^l(R/V)=J/V$ nach Satz 1 von Baer ([2], S. 4), und somit ist J/V nach Satz 1. 10 ein kleines Linksideal von R/V. Da V ein kleines Linksideal von R ist, ist J nach Hilfssatz 1. 5 ein kleines Linksideal von R. Aus (3) folgt, J ist ein Nilideal, und in R/J existiert die Eins, weshalb nach Baer ([2], S. 7, Satz 2 u. S. 9) R eine Rechtseins hat, d. h. (1) und (3) sind äquivalent.

Es wird nun angenommen, daß R der Bedingung (1) genügt. Ist J ein Nilideal, dann erfüllt R nach Hilfssatz 2. 4 und Bemerkung 2. 5 die Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale. Aus der Existenz einer Rechtseins in R folgt die Existenz der Eins in R/J. Da (1) und (3) äquivalent sind, und J ein Nilideal ist, ist J ein kleines Linksideal von R. Nach Hilfssatz 3. 5 gilt $D^r R\subseteq J$; wegen Hilfssatz 3. 1 ist $D^r R$ ein Ideal von R, weshalb nach Hilfssatz 1. 1 die Summe aller kleinen Rechtsideale ein kleines Linksideal von R ist. Also ergibt sich (2) aus (1). Ist andererseits (2) erfüllt, dann existiert nach Hilfssatz 3. 6 in $R/D^r R$ eine Rechtseins, weshalb $J/D^r R$ ein kleines Linksideal von $R/D^r R$ ist, und so ist J wegen Hilfssatz 1. 5 ein kleines Linksideal von R. Wegen der Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale ist J nach Hilfssatz 2. 4 ein Nilideal. Also existiert nach Satz 2 von Baer ([2], S. 7 u. S. 9) in R eine Rechtseins, d. h. (1) und (2) sind äquivalent.

Unter der Annahme von (1) sind wegen $L \leqq J$ nach Hilfssatz 1. 1 alle lokal-nilpotenten Linksideale kleine Linksideale von R. Da in R/R^r eine Rechtseins existiert, und nach Hilfssatz 3. 3 $[R/R^r]_r = 0$ ist, existiert in R/R^r die Eins. Gilt andererseits (4), dann ist J/R^r das Jacobson-Radikal von R/R^r, weil nach Hilfssatz 3. 3 $R^r \leqq B$ und stets $B \leqq J$ ist. Mit B ist auch R^r ein lokal-nilpotentes Ideal von R; wegen Hilfssatz 1. 5 ist J dann ein kleines Linksideal in R. Da J ein Nilideal ist, und in R/J die Eins existiert, ist x stets ein Nilelement, wenn $xR = xJ$ gilt. Nach Satz 2 von Baer ([2], S. 7) gibt es dann in R eine Rechtseins, womit Satz 3. 7 bewiesen ist.

Folgerung 3. 8. *Für einen Ring $R \neq 0$ mit Minimalbedingung für alle potenten Hauptrechtsideale sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *R besitzt eine Linkseins.*

(2) *Jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ idempotenter Elemente $e_j \neq 0$ von R mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$ ist endlich, und jedes Nilrechtsideal ist ein kleines Rechtsideal von R.*

(3) *In R/G existiert die Eins, jedes Nilrechtsideal ist ein kleines Rechtsideal, und jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ von in G enthaltenen Idempotenten $e_j \neq 0$ mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$ ist endlich.*

(4) *R läßt sich als R-Linksmodul nicht epimorph auf einen einfachen, trivialen, R-Linksmodul abbilden, die Summe $D^l R$ aller kleinen Linksideale ist ein kleines Rechtsideal von R, und jede abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ idempotenter Elemente $e_j \neq 0$ mit $e_i e_k = 0$ für $i < k$ ist endlich.*

(5) *Ein Rechtsideal ist dann und nur dann ein kleines Rechtsideal von R, wenn es in J enthalten ist, und es gibt ein Nilideal V von R derart, daß in R/V eine Rechtseins existiert.*

(6) *Jedes lokal-nilpotente Rechtsideal ist ein kleines Rechtsideal von R, und in R/R^r existiert die Eins.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1), (2) und (3) besagt Satz 2. 10. Daß (1), (5) und (6) gleichwertig sind, folgt aus Hilfssatz 2. 4 und Satz 3. 7. Es ist also nur noch die Äquivalenz von (1) und (4) zu zeigen. Unter der Annahme von (1) folgt aus Satz 3. 7, daß R als R-Linksmodul sich nicht epimorph auf einen einfachen, trivialen R-Linksmodul abbilden läßt, und daß $D^l R$ ein kleines Rechtsideal von R ist. Da mit (1) auch (2) gilt, ergibt sich (4) aus (1).

Es gelte (4). Wäre R ein Nilring, dann enthält R maximale Linksideale, denn sonst wäre $R = D^l R$, woraus $R = 0$ folgte. Ist M ein maximales Linksideal von R und $k \in R$ mit $k \notin M$, dann wäre $R = M + Rs$, wenn es ein $s \in (k)_L$ mit $Rs \not\leqq M$ gäbe. Hieraus folgt für geeignete $m \in M$, $r \in R$: $s = m + rs$. Da R ein Nilring ist, gibt es ein $t \in R$ mit $r = tr - t$, weshalb $s = m + (tr - t)s = m + t(s - m) - ts = m - tm \in M$, und so $Rs \leqq M$ wäre. Aus diesem Widerspruch ergibt sich: $Rs \leqq M$ für alle $s \in (k)_L$, d. h. $R(k)_L \leqq M$. Also wäre R/M ein einfacher, trivialer R-Linksmodul, was wegen

(4) unmöglich ist. Hieraus folgt, daß R ein potenter Ring ist, weshalb nach Hilfssatz 2.9 in R ein Idempotent $e \neq 0$ existiert derart, daß $(1-e)R$ ein Nilrechtsideal ist, woraus die Existenz der Eins in R/J folgt. Nach Satz 3.7 hat R dann eine Linkseins, womit Folgerung 3.8 bewiesen ist.

§ 4. Einselemente in Artinschen Ringen

Eine wichtige Rolle für die Existenz einer Rechtseins in Ringen R mit Minimalbedingung für Rechtsideale spielen die Linksannihilatorideale von Faktorringen von R nach nilpotenten zweiseitigen Idealen, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird.

Hilfssatz 4. 1. *Die minimalen nilpotenten Ideale eines Ringes R sind kleine Linksideale von R oder in R_l enthalten.*

Beweis. Ist K ein minimales, nilpotentes, zweiseitiges Ideal von R, dann ist $K^2=0$. Ist $K \not\leqq R_l$, dann ist $KR=K$, weil K ein minimales Ideal von R ist. Ist I ein $R = K+I$ erfüllendes Linksideal von R, dann gilt:

$$K = KR = K(K+I) = KI \leqq K \cap I,$$

weshalb $K \leqq I$, und so $R=I$ ist, d. h. K ist ein kleines Linksideal von R.

Hilfssatz 4. 2. *Ist R ein Ring derart, daß für jedes Ideal K von R mit $K \leqq B$ der Ring R/K minimale nilpotente Ideale enthält und $(R/K)_l=0$ erfüllt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Das untere Nilradikal B ist ein kleines Linksideal von R.*

(2) *Unter den in B enthaltenen, kleinen Linksidealen von R gibt es maximale.*

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt. Gilt (2), dann ist die Summe aller in B enthaltenen, kleinen Linksideale von R nach Hilfssatz 1. 1 (c) ein kleines Linksideal von R, weshalb nach Hilfssatz 1. 1 (a) jede beliebige Summe in B enthaltener, kleiner Linksideale von R ein kleines Linksideal ist.

Sei $S_0=0$; wenn S_β definiert ist für alle Ordinalzahlen $\beta<\mu$, dann sei $S_\mu = \sum_{\beta<\mu} S_\beta$, wenn μ eine Limeszahl ist. Ist μ keine Limeszahl, dann sei S_μ das Ideal $I \geqq S_{\mu-1}$ von R, für das $I/S_{\mu-1}$ die Summe aller nilpotenten, minimalen, zweiseitigen Ideale des Ringes $R/S_{\mu-1}$ ist. Da R eine Menge ist, existiert eine kleinste Ordinalzahl π mit $S_\pi = S_{\pi+1}$. Sei $S=S_\pi$.

Offenbar ist S_0 ein kleines Linksideal von R, das in B liegt. Angenommen, alle S_β mit $\beta<\mu$ seien in B enthaltene, kleine Linksideale von R. Wenn μ eine Limeszahl ist, dann ist S_μ ein Linksideal von R mit $S_\mu \leqq B$. Ist μ keine Limeszahl, dann ist nach Voraussetzung $(R/S_{\mu-1})_l=0$, weshalb $S_\mu/S_{\mu-1}$ nach Hilfssatz 4. 1 ein kleines Linksideal von $R/S_{\mu-1}$ ist. Wegen der Linkskleinheit von $S_{\mu-1}$ in R ist dann S_μ ein kleines Linksideal von R nach Hilfssatz 1. 5. Durch transfinite Induktion folgt, daß $S \leqq B$ und ein kleines Linksideal von R ist. Gäbe es in R/S nilpotente Ideale, dann folgte unter der Berücksichtigung von Hilfssatz 4. 1 und der Voraussetzung, daß $S_\pi < S_{\pi+1}$ wäre. Also ist R/S halbprim, woraus nach Jacobson ([8], S. 196) $B=S$ folgt.

Hilfssatz 4. 3. *Der Ring R erfülle die Minimal- und Maximalbedingung für nilpotente, zweiseitige Ideale. Für alle in B enthaltenen Ideale K von R gelte $(R/K)_l = 0$, dann ist das untere Nilradikal B ein kleines Linksideal von R, das nilpotent ist.*

Beweis. Wegen der Maximalbedingung für nilpotente Ideale ist B nilpotent, und die im Beweis von Hilfssatz 4. 2 definierte Folge von Idealen S_β ist endlich. Mittels Hilfssatz 4. 1 und Hilfssatz 1. 1 (b) zeigt man unter Benutzung, daß alle kleinen, in B enthaltenen Linksideale von R nilpotent sind, daß alle S_β kleine Linksideale von R sind. Da B ihre Summe ist, und eine endliche Summe kleiner Linksideale nach Hilfssatz 1. 1 (b) ein kleines Linksideal von R ist, ist Hilfssatz 4. 3 bewiesen.

Satz 4. 4. *Für jedes Ideal $K \leqq B$ des Ringes R besitze der Ring R/K minimale, nilpotente, zweiseitige Ideale, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *R hat eine Rechtseins, und J ist ein Nilideal.*

(2) a) *Für alle Ideale $K \leqq B$ von R ist $(R/K)_l = 0$,*

b) *unter den in B enthaltenen kleinen Linksidealen von R gibt es maximale,*

c) *in R/J existiert die Eins,*

d) *R läßt sich als R-Rechtsmodul nicht epimorph auf einen einfachen, trivialen R-Rechtsmodul abbilden,*

e) *$(D^r R + B)/B$ ist ein kleines Linksideal von R/B,*

f) *R erfüllt die Minimalbedingung für potente sternreguläre Hauptrechtsideale.*

(3) *Für jedes Ideal $K \leqq B$ von R gilt $(R/K)_l = 0$, in R/B existiert die Eins, und X ist dann und nur dann ein kleines Linksideal von R, wenn X ein Nillinksideal ist.*

Beweis. Aus (1) folgen nach Satz 3. 7 die Bedingungen c), d) und f) von (2) und $D^r R$ ist ein kleines Linksideal von R, weshalb (2 e) nach Hilfssatz 1. 3 ebenfalls gilt. (2) a) ergibt sich sofort aus (1) und (2) b) folgt schließlich mittels Satz 3. 7 und Hilfssatz 1. 1.

Ist (2) erfüllt, dann ist B wegen Hilfssatz 4. 2 ein kleines Linksideal von R, woraus wegen (2) e) nach Hilfssatz 1. 5 folgt, daß $D^r R + B$ ein kleines Linksideal von R ist, weshalb auch $D^r R$ nach Hilfssatz 1. 1 ein kleines Linksideal von R ist. Nach Hilfssatz 3. 6 gibt es in $R/D^r R$ eine Rechtseins, weshalb aus Hilfssatz 3. 5 folgt, daß $J/D^r R$ ein kleines Linksideal von $R/D^r R$ ist, und so ist J wegen Hilfssatz 1. 5 ein kleines Linksideal von R, das wegen der Bedingung (2) f) nach Hilfssatz 2. 4 ein Nilideal ist. Nach R. Baer ([2], S. 7 und S. 9) hat R dann eine Rechtseins, und daher ist (1) eine Folge von (2).

Unter Berücksichtigung von Satz 3. 7 ist es klar, daß die Aussage (3) sich aus der ersten ergibt. Ist andererseits (3) erfüllt, dann ist B nach Hilfssatz 4. 2 ein kleines Linksideal von R. Aus (3) b) und $B \leqq J$ folgt, daß J/B ein kleines Linksideal von R/B ist; deshalb ist J wegen Hilfssatz 1. 5 ein kleines Linksideal, woraus nach (3) c) sich ergibt, daß J ein Nilideal ist, und so hat R nach Baer ([2], S. 7 und S. 9) eine Rechtseins, womit Satz 4. 4 bewiesen ist.

Folgerung 4. 5. *R sei ein Ring mit Minimalbedingung für alle zweiseitigen Ideale und Maximalbedingung für alle nilpotenten zweiseitigen Ideale. Wenn in R/B die*

Minimalbedingung für alle Hauptrechtsideale gilt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *In R gibt es eine Rechtseins.*

(2) *Für jedes nilpotente Ideal K von R ist $(R/K)_l = 0$, und es gilt die Maximalbedingung für alle in G enthaltenen, potenten Hauptrechtsideale von R.*

BEWEIS. Nach Theorem 9 von BROWN—MCCOY ([4], S. 52) ist R/G eine endliche direkte Summe von einfachen Ringen mit Einselement, weshalb in R/G die Eins existiert. Wegen der Minimalbedingung für Hauptrechtsideale in R/B gilt $B = N = J$ nach F. SZÁSZ ([11], S. 430). (2) hat $G = N$ nach Satz 2. 7 zur Folge, weshalb in R/B die Eins existiert. Aus Hilfssatz 4. 3 ergibt sich, daß B ein kleines Linksideal von R ist. Also ist (1) eine Folge von (2).

Gilt (1), dann ist $N = J = G$ (Vgl. F. SZÁSZ [11], S. 430), woraus nach Satz 2. 7 die Maximalbedingung für alle in G enthaltenen, potenten Hauptrechtsideale von R folgt. Hiermit ist Folgerung 4. 5 bewiesen.

Korollar 4. 6. *In einem Ring R mit Minimalbedingung für alle Rechtsideale sind äquivalent:*

(1) *R hat eine Rechtseins.*

(2) *Für jedes nilpotente Ideal K ist $(R/K)_l = 0$.*

BEWEIS. Ist (2) erfüllt, dann gilt in R auch die Maximalbedingung für alle Rechtsideale (Vgl. z. B. FUCHS [6], S. 286), weshalb Korollar 4. 6 aus Folgerung 4. 5 folgt.

Folgerung 4. 7. *In einem Ring R mit Minimalbedingung für alle Rechtsideale sind äquivalent:*

(1) *In R existiert die Eins.*

(2) *Für jedes nilpotente Ideal K ist $(R/K)_l = 0$, und es gilt $(R/D^r R)_r = 0$.*

BEWEIS. Daß (2) aus (1) folgt, ist klar. Gilt (2), dann hat R nach Korollar 4. 6 eine Rechtseins, also auch $R/D^r R$. Wegen $(R/D^r R)_r = 0$ existiert in $R/D^r R$ die Eins, und so ist $J/D^r R$ ein kleines Rechtsideal von $R/D^r R$. Nach Hilfssatz 3. 1 gilt $D^r(R/D^r R) = 0$, woraus $J = D^r R$ folgt. Wegen $R^l = 0$, erfüllt R die Maximalgbedinung für alle Rechtsideale, weshalb $D^r R$ nach Hilfssatz 1. 1 ein kleines Rechtsideal von R ist. Nach Satz 1 von BAER ([2], S. 4) existiert dann in R eine Linkseins, womit Folgerung 4. 7 bewiesen ist.

Eine weitere Folgerung von Korollar 4. 6 ist der folgende Satz von F. SZÁSZ:

Folgerung 4. 8. *Jeder torsionfreie Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale hat eine Rechtseins.*

BEWEIS. Aus der Torsionsfreiheit und der Minimalbedingung folgt nach FUCHS ([6], S. 280, Theorem 72. 2 und S. 64), daß die abelsche Gruppe R^+ von R teilbar ist, und daß R (wegen Theorem 73. 3 von FUCHS [6], S. 285) die Maximalbedingung für Rechtsideale erfüllt. Da sich diese Eigenschaften auf epimorphe Bilder $R^\mu \neq 0$ vererben, ist nach FUCHS ([6], S. 64 und S. 285) jeder Ring $R^\mu \neq 0$ torsionfrei. Wäre $(R^\mu)_l \neq 0$ für einen Epimorphismus μ von R, dann wäre jede Untergruppe U von $(R^\mu)_l$ ein Rechtsideal von R^μ, und so wäre $(R^\mu)_l$ ein nilpotenter Ring mit Minimalund Maximalbedingung für alle Rechtsideale, woraus nach FUCHS ([6], S. 288, Theorem 75. 1) folgt, daß $(R^u)_l$ endlich ist, was aber der Torsionfreiheit von R^u widerspricht. Folgerung 4. 8 ist nun eine Folge von Korollar 4. 6.

Bemerkung 4. 9. Sind R_1 und R_2 zwei Exemplare des Körpers Q der rationalen Zahlen, R_1^+ und R_2^+ ihre abelschen Gruppen bzgl. $+$, dann sei $R^+ = R_1^+ \oplus R_2^+$. Auf R^+ wird eine Multiplikation $\times$ erklärt durch:

1. Für $r_1, r_1' \in R_1, r_2, r_2' \in R_2$ gilt:

$$(r_1+r_2)\times(r_1'+r_2') = r_1\times r_1' + r_1\times r_2' + r_2\times r_2'$$

2. $r_1\times r_2 = r_1 r_2 \in R_1$, $r_i\times r_i' = r_i r_i' \in R_i$ $(i=1,2)$, wobei $r_1 r_2$ bzw. $r_i r_i'$ das Produkt von r_1 und r_2, bzw. von r_i und r_i' als rationale Zahlen ist.

3. $r_2\times r_1 = 0$.

Wie man leicht sieht, ist R ein Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale, der eine Rechtseins e hat und torsionsfrei ist. Aber e ist keine Linkseins, weshalb in R die Eins *nicht* existiert.

Also ist die Bedingung $(R/D\,R)_r = 0$ nicht nur notwendig, sondern auch unentbehrlich für die Existenz der Eins in Ringen R, die die Minimalbedingung für Rechtsideale und $(R/K)_l = 0$ für alle nilpotenten Ideale K von R erfüllen.

Literatur

[1] R. BAER, Inverses and Zero-Divisors, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 630—638.
[2] R. BAER, Kriterien für die Existenz eines Einselementes in Ringen, *Math. Z.* **56** (1952), 1—17.
[3] R. BAER, Der reduzierte Rang einer Gruppe, *J. Reine Angew. Math.* **214/215** (1964), 146—173.
[4] B. BROWN—N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 46—58.
[5] B. ECKMANN—A. SCHOPF, Über injektive Moduln. *Arch. Math.* **4** (1953), 75—78.
[6] L. FUCHS, Abelian groups, *Oxford, London, New York, Paris*, 1960.
[7] I. N. HERSTEIN, Theory of rings, *Univ. Chicago Math. Lecture Notes*, 1961.
[8] N. JACOBSON, Structure of rings, *A. M. S. Colloquium Publ.* **37**, 1956.
[9] O. H. KEGEL, On rings that are sums of two subrings, *J. Algebra*, **1** (1964), 103—109.
[10] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I. *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 54—64.
[11] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechstideale II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961), 417—440.
[12] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.* **11** (1963), 351—354.
[13] G. SZÁSZ, Einführung in die Verbandstheorie, *Budapest*, 1962.

(Eingegangen am 16. September 1964.)