Cauchy-Gleichungen für Quaternionenfunktionen

Von I. MAKAI (Debrecen)

In 1962, an der 1. Tagung über Fuktionalgleichungen in Oberwolfach hat O. Taussky—Todd das folgende Problem gestellt (s. [2]):

„Es sei $f(x)$ eine Funktion, die für Quaternionen oder Cayleysche Zahlen definiert ist und deren Werte reelle Zahlen sind. Es sei weiter $f(xy)=f(x)f(y)$. Wie charakterisiert man die Funktion $f(x)=norm(x)$?"

Wir haben im Jahre 1963 dieses Problem teilweise beantwortet, was an der 2. Tagung über Funktionalgleichungen (7—11. Oktober 1963) in Oberwolfach vorgetragen wurde (vgl. [3] S. 10). Wir geben hier diese Ergebnisse wieder, die sich auf das Problem von Taussky—Todd und auf das duale Problem beziehen.

§ 1. Einleitung

Üblicherweise nennen wir eine über dem Körper (der reellen oder komplexen Zahlen) **K** betrachtete vierdimensionale Algebra **Q** einen Quaternionenkörper, wenn ihre Einheiten

$$1, E_1, E_2, E_3 \qquad (1 \in \mathbf{K})$$

die Multiplikationsregel

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -1,$$

$$E_1E_2 = -E_2E_1 = E_3, \quad E_2E_3 = -E_3E_2 = E_1, \quad E_3E_1 = -E_1E_3 = E_2$$

erfüllen.

Es seien im folgenden die Elemente des Grundkörpers **K** mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben, die Elemente des Quaternionenkörpers **Q** mit großen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet. Wir werden die Funktionen auch mit kleinen oder großen Buchstaben bezeichnen, je nachdem ihre Werte in dem Körper **K** oder in dem Körper **Q** liegen.

Ein beliebiges Element A des Körpers **Q** kann man immer in der eindeutigen Form

$$A = a_0 + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$$

darstellen, wo a_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) Elemente des Körpers **K** sind.

Die Komplemente a_0 von A heißt *Skalarteil* oder *Skalar* von A und wird mit $s(A)$ bezeichnet:

$$s(A) = a_0, \qquad (s(A) \in \mathbf{K})$$

der Bestandteil $a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3$ von A heißt *Vektorteil* oder *Vektor* von A und man schreibt

$$V(A) = a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3, \qquad (V(A)\in\mathbf{Q})$$

so daß jede Quaternion A folgendermaßen zerlegt werden kann:

$$A = s(A)+V(A).$$

Ist $V(A)=0$, so heißt A eine *skalare Quaternion* oder ein *Skalar*; ist $s(A)=0$, so heißt A eine *vektorielle Quaternion* oder ein *Vektor*.

Unter der *Konjugierten* $\bar{A}$ von A versteht man die Quaternion

$$\bar{A} = s(A)-V(A).$$

Es ist

$$\bar{A}\bar{B}=\bar{B}\bar{A},$$

ferner gelten die Gleichungen

$$s(\bar{A}) = s(A), \quad V(\bar{A}) = -V(A), \quad \bar{\bar{A}} = A.$$

Unter der *Norm* (oder den *absoluten Betrag*) $n(A)$ einer Quaternion A versteht man den folgenden Ausdruck der Komponenten a_0, a_1, a_2, a_3 von A

$$n(A) = +\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

der die Funktionalgleichung

(1) $$n(AB)=n(A)n(B) \qquad (A, B\in\mathbf{Q})$$

erfüllt.

Um die *trigonometrische Gestalt der Quaternionen* zu erklären, setzen wir erstens voraus, daß der Vektor $V(A)$ von A von Null verschieden ist, also gilt die Ungleichung

$$n[V(A)]>0,$$

und wir bilden den Vektor

(2) $$J(A)=n[V(A)]^{-1}V(A).$$

Es sei noch für die Quaternion A durch die Relationen

(3) $$\begin{cases}\cos\varphi(A) = n(A)^{-1}s(A)\\ \sin\varphi(A) = n(A)^{-1}n[V(A)]\end{cases}$$

ein Winkelmaß erklärt, eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π. So werden die Quaternionen $A, J(A)$ und der Winkel $\varphi(A)$ die Identität

(4) $$A = n(A)[\cos\varphi(A)+J(A)\sin\varphi(A)]$$

erfüllen. Wir erstrecken die Gültigkeit der Identität (4) auch auf den Fall $n[V(A)]=0$. In diesem Fall ist $J(A)$ ein beliebiger Vektor von $\mathbf{Q}$.

Unter der *Achse der Quaternion A* versteht man den Vektor $J(A)$. Jenen Winkel $\varphi(A)$, der durch die Relationen (3) bestimmt ist, werden wir das *Argument der Quaternion A* nennen.

Quaternionen mit derselben Achse heißen *komplanar*, als Zeichen dafür wird „$\|$" verwendet.

Für komplanare Quaternionen gilt der folgende

Satz I. (s. [1]) *Zwei Quaternionen A, B sind dann und nur dann komplanar, wenn sie für die Multiplikation des Körpers* $\mathbf{Q}$ *vertauschbar sind.*

Es seien

$$A = n(A)[\cos \varphi(A) + J \sin \varphi(A)]$$

und

$$B = n(B)[\cos \varphi(B) + J \sin \varphi(B)]$$

zwei komplanare Quaternionen. Die trigonometrische Gestalt ihres Produktes AB ist die folgende:

$$AB = n(A)n(B)\{\cos [\varphi(A) + \varphi(B)] + J \sin [\varphi(A) + \varphi(B)]\}. \tag{5}$$

Die für komplanare Quaternionen geltende Multiplikationsregel (5) werden wir den „*Moivreschen Satz für Quaternionen*" nennen.

Wir werden noch die Definition des *Winkels* $\sphericalangle (J_1, J_2)$ *zwischen den Achsen* J_1 *und* J_2 angeben.

Der Winkel $\sphericalangle (J_1, J_2)$ sei durch die Relationen

$$0 \leqq \sphericalangle (J_1, J_2) \leqq \pi, \cos \sphericalangle (J_1, J_2) = -n(J_1 J_2)^{-1} s(J_1 J_2)$$

erklärt.

Es gilt der folgende

Satz II. (s. [1]) *Eine beliebige Quaternion A kann man immer in der Form*

$$A = n(A) J_1 J_2 \tag{6}$$

darstellen, wo J_1, J_2 zwei, die Relationen

$$\sphericalangle [J_1, J(A)] = \sphericalangle [J_2, J(A)] = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \sphericalangle (J_1, J_2) = \pi - \varphi(A)$$

erfüllende, sonst beliebig gewählte Achsen sind.

Bemerkung. *Es sei*

$$A = n(A) J_1 J_2, \tag{6}$$

so ist

$$\bar{A} = n(A) J_2 J_1. \tag{7}$$

§ 2. Über die Lösungen der Funktionalgleichung $F(ab) = F(a)F(b)$

Es seien a, b beliebige Elemente von $\mathbf{K}$ und wir erklären die Funktion

$$F(x) \qquad (x \in \mathbf{K}, F(x) \in \mathbf{Q})$$

durch die Funktionalgleichung

$$F(ab) = F(a)F(b). \tag{8}$$

Um die Funktionalgleichung (8) zu lösen, schließen wir erstens ihre triviale Lösungen

(9) $$F(x) \equiv 0$$

und

(10) $$F(x) \equiv 1$$

aus.

Wegen $ab = ba$ haben wir aus (8) die Gleichheit

$$F(a)\,F(b) = F(b)\,F(a),$$

folglich gilt (s. Satz I.)

$$F(a) \parallel F(b) \qquad (a, b \in \mathbf{K})$$

für zwei beliebige Elemente a, b. Also hat $F(x)$ eine, von x unabhängige, in einer Lösung von (8) konstante Achse und man kann für jedem Paar von Funktionenwerten $F(a)$, $F(b)$ von $F(x)$ den „Moivreschen Satz für Quaternionen" anwenden.

Wenn die trigonometrische Gestalt der Funktion $F(x)$

(11) $$F(x) = v(x)[\cos \overset{*}{\varphi}(x) + J \sin \overset{*}{\varphi}(x)]$$

ist, dann bekommt man aus (8) wegen (5) die Funktionalgleichung

(12) $$v(ab)[\cos \overset{*}{\varphi}(ab) + J \sin \overset{*}{\varphi}(ab)] =$$

$$= v(a)\,v(b)\{\cos[\overset{*}{\varphi}(a) + \overset{*}{\varphi}(b)] + J \sin[\overset{*}{\varphi}(a) + \overset{*}{\varphi}(b)]\},$$

die in die folgenden Funktionalgleichungen zerfällt:

(12. 1) $$v(ab) = v(a)\,v(b)$$

und

(12, 2) $$\overset{*}{\varphi}(ab) \equiv \overset{*}{\varphi}(a) + \overset{*}{\varphi}(b) \pmod{2\pi}.$$

Also kann man das Problem der Auflösung der Funktionalgleichung (8) auf das Problem der *auf dem Körper* $\mathbf{K}$ betrachteten Cauchy-Funktionalgleichungen (12. 1) und (12. 2) zurückführen. Zusammenfassend haben wir den folgenden

Satz 1. *Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung*

(8) $$F(ab) = F(a)\,F(b)$$

hat die Gestalt

(11) $$F(x) = v(x)[\cos \overset{*}{\varphi}(x) + J \sin \overset{*}{\varphi}(x)],$$

wo J eine beliebige konstante Achse von $\mathbf{Q}$ *ist und die Funktionen $v(x)$, $\overset{*}{\varphi}(x)$ sind die Lösungen der Funktionalgleichungen*

(12. 1) $$v(ab) = v(a)\,v(b)$$

und

(12, 2) $$\overset{*}{\varphi}(ab) \equiv \overset{*}{\varphi}(a) + \overset{*}{\varphi}(b) \pmod{2\pi}.$$

Bemerkung. *Im Falle*

$$v(x) \equiv 0,$$

bzw.

$$v(x) \equiv 1, \quad \overset{*}{\varphi}(x) \equiv 0$$

gewinnen wir die Lösung (9), *bzw.* (10) *der Funktionalgleichung* (8).

§ 3. Über die Lösungen der Funktionalgleichung $f(AB)=f(A)f(B)$

Wir werden uns noch mit der Auflösung der Funktionalgleichung

$$f(AB)=f(A)f(B) \tag{13}$$

beschäftigen.

Es sei also die durch Funktionalgleichung (13) gekennzeichnete Funktion

$$f(X) \not\equiv 0 \qquad (X \in \mathbf{Q})$$

gegeben. Wegen der Gleichung (13), wegen des Satzes II. und wegen der nachfolgenden Bemerkung bekommen wir für das beliebige Element $Y (\in \mathbf{Q})$:

$$f(Y)=f[n(Y)J_1J_2]=f[n(Y)]f(J_1)f(J_2)=$$
$$=f[n(Y)]f(J_2)f(J_1)=f[n(Y)J_2J_1]=f(\bar{Y}),$$

also haben wir für $f(Y)$ die Relation

$$f(Y)=f(\bar{Y}). \tag{14}$$

Aus (14) folgt die Gleichheit

$$f(Y^2)=f[n^2(Y)] \qquad \left(n^2(Y)=Y\bar{Y}\right) \tag{15}$$

(durch Multiplikation mit $f(Y)$ der beiden Seiten von (14)).

Aber man kann ein beliebiges Element X von $\mathbf{Q}$ als Quadrat eines entsprechend gewählten Elementes Y von $\mathbf{Q}$ angeben. Es sei die trigonometrische Gestalt von X

$$X = n(X)[\cos \varphi(X) + J(X) \sin \varphi(X)],$$

dann erfüllt z. B. eine „Quadratwurzel"

$$Y = n(X)^{1/2}\left[\cos \frac{1}{2}\,\varphi(X) + J(X) \sin \frac{1}{2}\,\varphi(X)\right] \tag{16}$$

von X wegen des „Moivreschen Satzes der Quaternionen" die Gleichheit

$$X = Y^2.$$

Die Gleichung (15) geht mit Hilfe der Relation (16) in die Form

$$f(X)=f[n(X)] \tag{17}$$

über.

Wenn

$$f(X) \equiv 0 \tag{18}$$

ist, so haben wir wieder eine Lösung von (13), die auch in der allgemeinen Gestalt (17) der Lösungen von (13) enthalten ist.

Wir haben also den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Die Lösungen $f(X)$ der Funktionalgleichung*

$$f(AB) = f(A)f(B) \tag{13}$$

können nur von der Norm $n(X)$ ihrer Veränderlichen X ($\in \mathbf{Q}$) abhängen:

$$f(X) = f[n(X)]. \tag{17}$$

Bemerkung. Es sei $f(X)$ eine positiv-homogene Funktion erster Ordnung, die der Einheit 1 sich selbst zuordnet. Sie erfüllt also für beliebige skalare $k > 0$ die Funktionalgleichung

$$f(kX) = kf(X) \tag{19}$$

und die Gleichheit

$$f(1) = 1. \tag{20}$$

Wegen $n(X) > 0$ haben wir aus (17), (19) und (20) für $f(X)$ den Ausdruck

$$f(X) = n(X).$$

Die Norm $n(X)$ von X kann man als positiv-homogene multiplikative Funktion erster Ordnung von X mit der Eigenschaft (20) *charakterisieren.*

Literatur

[1] *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, B. II, 1. Teil, 2. Hälfte, 11. II. 6–7. *Leipzig*, 1914–1931.

[2] *Tagungsbericht der 1. Tagung über Funktionalgleichungen* (2–8. September 1962). Oberwolfach, 1962.

[3] *Tagungsbericht der 2. Tagung über Funktionalgleichungen* (7–11. Okt. 1963). Oberwolfach, 1963.

(Eingegangen am 23. September 1964.)