

# Über eine skalare Form der Gleichung der autoparallelen Abweichung im affinen Raum

Von ARTHUR MOÓR (Szeged)

## Einleitung

Die Gleichung der autoparallelen Abweichung, die in den Riemannschen und Finslerschen Räumen mit der geodätischen Abweichung identisch ist, spielt in wichtigen geometrischen Untersuchungen eine fundamentale Rolle. Wenn man die Gleichung der autoparallelen, bzw. geodätischen Abweichung auf eine geeignete skalare Form bringt, kann in der zweidimensionalen Fall mit Hilfe des in der Gleichung der geodätischen Abweichung vorkommenden Skalars der mögliche Durchmesser des Raumes abgeschätzt werden (vgl. [4], § 4), bzw. man kann auf die Existenz einer Hüllkurve der aus einem Punkte ausgehenden autoparallelen Kurven schließen (vgl. [3], § 4). Diese, und andere Untersuchungen, die eine skalare Form der geodätischen Abweichung benützen, können mit Hilfe der zweidimensionalen geodätischen Unterräume auch auf den  $n$ -dimensionalen Fall erweitert werden (vgl. [5]).

In diesem Aufsatz wollen wir für die autoparallele Abweichung der  $n$ -dimensionalen affinen Räume eine skalare Form ableiten und mit deren Hilfe Untersuchungen bezüglich einer möglichen Hüllfläche der aus einem Punkte ausgehenden autoparallelen Kurven durchführen. Statt der zweidimensionalen autoparallelen bzw. geodätischen Unterräume (vgl. [5] § 1) werden wir aber ein orthonormiertes kontra-, bzw. kovariantes  $n$ -Bein benützen. Die im folgenden angewandte Methode, die für die affinen Räume sehr geeignet ist, ist selbstverständlich auch für den metrischen Fall anwendbar. Die Benützung der kontravarianten und kovarianten  $n$ -Beine macht die Theorie der zweidimensionalen Unterräume ersetzbar. Die Skalare, die in unserer Theorie vorkommen, hängen aber im allgemeinen von dem benützten  $n$ -Bein ab.

Im Paragraphen I werden wir aber vorher einige Sätze über die Hüllfläche der  $(n-1)$ -parametrischen Kurvenscharen angeben. Für den zweidimensionalen Fall ist diese Theorie mit anderer Ausdrucksweise z. B. in [2] angegeben.

### § 1. Über die Hüllfläche der Kurvenscharen

Es sei durch die Gleichungen

$$(1.1) \quad C_{\varrho^\alpha}: x^i = x^i(t; \varrho^1, \varrho^2, \dots, \varrho^{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

eine  $(n-1)$ -parametrische Kurvenschar  $C_{\varrho^\alpha}$  angegeben, wo <sup>1)</sup> die  $\varrho^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ ) die einzelnen Kurven bestimmende Parameter und  $t$  den Kurvenparameter von  $C_{\varrho^\alpha}$  bedeutet.  $C_{\varrho^\alpha}$  bedeutet die zu den Parametern  $\varrho^\alpha$  gehörige Kurve, aber auch die ganze Kurvenschar wollen wir einfach durch  $C_{\varrho^\alpha}$  bezeichnen.

Definition: Die *Hyperfläche*:

$$(1.2) \quad \mathcal{F}: x^i = \varphi^i(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})$$

ist eine Hüllfläche der Kurvenschar  $C_{\varrho^\alpha}$  falls die folgenden beiden Forderungen erfüllt sind:

F<sub>1</sub>)  $\mathcal{F}$  besteht aus endlich vielen Stücken  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ , so, daß durch jeden Punkt von  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) genau eine Kurve der Kurvenschar hindurchgeht.

F<sub>2</sub>) Der Tangentenvektor einer Kurve  $C_{\varrho^\alpha}$  der Kurvenschar ist im gemeinsamen Punkt von  $C_{\varrho^\alpha}$  und  $\mathcal{F}$  eine Linearkombination der Tangentenvektoren von  $\mathcal{F}$ .

Durch die Parameterwerte  $u^\alpha$  sei nun ein Punkt von  $\mathcal{F}$  festgelegt. Da durch jeden Punkt von  $\mathcal{F}$  eine Kurve von (1.1) hindurchgeht, sind die Parameter  $\varrho^\alpha$  Funktionen von  $u^\alpha$ , d. h. es ist:

$$\varrho^\alpha = \varrho^\alpha(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}).$$

Offenbar ist auch der Kurvenparameter  $t$  von den  $u^\alpha$  abhängig, d. h.:

$$t = t(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}).$$

In den Punkten von  $\mathcal{F}$  hat man also nach (1.1) und (1.2):

$$(1.3) \quad \varphi^i(u^\alpha) \equiv x^i(t(u^\alpha); \varrho^\beta(u^\alpha)).$$

Nach der Forderung F<sub>2</sub>) besteht die Relation

$$\frac{\partial x^i(t(u); \varrho(u))}{\partial t} = a^\alpha \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^\alpha},$$

wo die  $a^\alpha$  entsprechende Skalare bedeuten, die von  $u^\alpha$  abhängig sind. Auf Grund von (1.3) wird somit in den Punkten von  $\mathcal{F}$ :

$$(1.4a) \quad \frac{\partial x^i(t; \varrho)}{\partial t} \equiv a^\alpha \left( \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial \varrho^\beta} \frac{\partial \varrho^\beta}{\partial u^\alpha} \right).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß in den Punkten von  $\mathcal{F}$  die Vektoren  $\frac{\partial x^i}{\partial t}, \frac{\partial x^i}{\partial \varrho^\beta}$  ( $\beta = 1, \dots, n-1$ ) linear abhängig sind, d. h. es gilt in jeden Punkten von  $\mathcal{F}$ :

$$(1.4b) \quad \text{Det} \left( \frac{\partial x^i}{\partial t}, \frac{\partial x^i}{\partial \varrho^\beta} \right) = 0.$$

<sup>1)</sup> Die griechischen Indizes bedeuten jetzt und im folgenden immer die Zahlen  $1, 2, \dots, n-1$ . Die lateinischen Indizes hingegen laufen immer von 1 bis  $n$ .

Umgekehrt: ist für irgendeine Fläche  $\mathcal{F}$  die Bedingung  $F_1$ ) und (1. 4b) gültig, so ist die Fläche  $\mathcal{F}$  Hüllfläche, da aus (1. 4b) offenbar die lineare Abhängigkeit der Vektoren  $\frac{\partial x^i}{\partial t}, \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}$  ( $\beta = 1, \dots, n-1$ ) folgt. Es gilt also:

*Außer der Bedingung  $F_1$ ) ist (1. 4b) notwendig und hinreichend dafür, daß  $\mathcal{F}$  eine Hüllfläche sei.*

Es seien jetzt  $C_{q^\alpha}$  und  $C_{q^\alpha + \Delta q^\alpha}$  sich schneidende Kurven. Es gilt der folgende

**Satz 1.** *Durchläuft  $\Delta q^\alpha$  eine Folge von Zahlen, für die  $\lim \Delta q^\alpha = 0$  und  $\lim \frac{\Delta q^\alpha}{\Delta q^\beta} \neq 0$  gilt, existiert ferner der Limespunkt der Schnittpunkte von  $C_{q^\alpha}$  und  $C_{q^\alpha + \Delta q^\alpha}$ , so gehört dieser Limespunkt immer zu der Hüllfläche der Kurvenschar  $C_{q^\alpha}$ .*

**BEWEIS.** Der Schnittpunkt der Kurven  $C_{q^\alpha}$  und  $C_{q^\alpha + \Delta q^\alpha}$  sei beim Parameterwert  $t_1$ , bzw.  $t_2$ . Es sei

$$t_1 = t + \Delta t_1, \quad t_2 = t + \Delta t_2,$$

wo  $\Delta t_1$  und  $\Delta t_2$  Funktionen von  $\Delta q^\alpha$  sind, für die

$$\lim \Delta t_1 = \lim \Delta t_2 = 0, \quad (\Delta q^\alpha \rightarrow 0)$$

ist. Die Reihenentwicklung von  $\Delta t_1$  und  $\Delta t_2$  wird also die folgende Form haben:

$$(1. 5) \quad \Delta t_1 = t_{1\alpha} \Delta q^\alpha + \dots, \quad \Delta t_2 = t_{2\alpha} \Delta q^\alpha + \dots,$$

wo die Punkte die in  $\Delta q^\alpha$  höheren Glieder bedeuten. Wegen der Existenz des Schnittpunktes von  $C_{q^\alpha}$  und  $C_{q^\alpha + \Delta q^\alpha}$  hat man

$$x^i(t + \Delta t_1; q^\alpha) = x^i(t + \Delta t_2; q^\alpha + \Delta q^\alpha).$$

Die Reihenentwicklung nach  $\Delta q^\alpha$  gibt unter Beachtung der Relationen (1. 5) bis auf Glieder von erster Ordnung in den  $\Delta q^\alpha$ :

$$\frac{\partial x^i(t; q)}{\partial t} (t_{1\alpha} - t_{2\alpha}) \Delta q^\alpha - \frac{\partial x^i(t; q)}{\partial q^\alpha} \Delta q^\alpha = 0.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, daß die Vektoren  $\frac{\partial x^i}{\partial t}, \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, n-1$ ) linear abhängig sind, d. h. (1. 4b) gilt. Das beweist unseren Satz.

## § 2. Skalare Form der autoparallelen Abweichung

In einem  $n$ -dimensionalen Raum, der auf die Koordinaten  $x^i$  bezogen ist, seien durch die Gleichungen von der Form

$$(2. 1) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i \left( x(s), \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

gewisse Kurven ausgezeichnet, die im folgenden als die autoparallelen Kurven des Raumes betrachtet werden sollen. Über die Funktionen  $G^i(x, x'), x'^i = \frac{dx^i}{ds}$

wollen wir annehmen, daß sie nach ihren Argumenten mindestens zweimal stetig differenzierbar und in den  $x^i$  von zweiter Ordnung homogen sind. Bezüglich der Geometrie dieser affinen Räume verweisen wir auf die Arbeit [1] von L. BERWALD.

Es sei durch die Gleichungen

$$(2.2) \quad \frac{d^2 \psi^i}{d\sigma^2} + 2G^i \left( \psi(\sigma), \frac{d\psi}{d\sigma} \right) = 0$$

eine zur Kurve (2.1) infinitesimale Kurve angegeben, die mit (2.1) den zum Parameterwert  $s = \sigma = 0$  gehörigen Punkt gemein hat, d. h.:

$$(2.3) \quad \psi^i(0) = x^i(0).$$

Die Punkten dieser Kurven seien durch die Relationen

$$(2.4a) \quad \psi^i(\sigma) = x^i(s) + \xi^i(s),$$

$$(2.4b) \quad \sigma = s + \lambda(s)$$

zueinander geordnet, wo  $\xi^i(s)$  einen infinitesimalen Vektor und  $\lambda(s)$  einen infinitesimalen Skalar bedeutet. Wegen (2.3) hat man:

$$(2.5) \quad \xi^i(0) = 0, \quad \lambda(0) = 0.$$

Auf Grund der Gleichungen (2.4a) und (2.4b) wird:

$$(2.6a) \quad \frac{d\psi^i}{d\sigma} = \frac{dx^i}{ds} (1 - \lambda') + \frac{d\xi^i}{ds}, \quad \lambda' \equiv \frac{d\lambda}{ds}$$

$$(2.6b) \quad \frac{d^2 \psi^i}{d\sigma^2} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} (1 - 2\lambda') - \frac{dx^i}{ds} \lambda'' + \frac{d^2 \xi^i}{ds^2}, \quad \lambda'' \equiv \frac{d^2 \lambda}{ds^2}$$

wenn die Glieder, die in  $\xi^i$  bzw.  $\lambda$  von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden. Benützen wir nun das von L. BERWALD eingeführte invariante Differential:

$$(2.7) \quad \frac{D\xi^i}{ds} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\xi^i}{ds} + G_r^i \xi^r, \quad G_r^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^i(x, x')}{\partial x'^r}$$

(vgl. [1], Formel (2.4)) und eliminieren wir  $\frac{d\xi^i}{ds}$  und  $\frac{d^2 \xi^i}{ds^2}$  mittels (2.7) von (2.6a) und (2.6b), so wird aus (2.2) in Hinsicht auf (2.1)

$$(2.8) \quad \frac{D^2 \xi^i}{ds^2} + K_j^i(x, x') \xi^j - \frac{dx^i}{ds} \lambda'' = 0,$$

wo

$$K_j^i \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G_j^i}{\partial x^r} x'^r + 2G_{jr}^i G^r - G_r^i G_j^r,$$

$$G_{jr}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 G^i}{\partial x'^j \partial x'^r} \equiv \frac{\partial G_j^i}{\partial x'^r} \equiv \frac{\partial G_r^i}{\partial x'^j}$$

ist.  $K_j^i$  ist der Berwaldsche affine Abweichungstensor des Raumes (vgl. [1], Formel (2. 6)), und die Gleichung (2. 8) ist die Gleichung der autoparallelen Abweichung. Diese unterscheidet sich von der entsprechende Gleichung von L. BERWALD (vgl. [1], Gleichung (2. 5)) nur in dem Glied  $\frac{dx^i}{ds} \lambda''$ . Dieses fällt weg, falls z. B. der Parameter  $s$  mit dem Parameter  $\sigma$  identisch ist, wie das bei L. BERWALD bedingt wird. In diesem Fälle ist nämlich  $\lambda(s) \equiv 0$ ; wir wollen aber das nicht annehmen, da das im folgenden keine Schwierigkeiten verursachen wird. Unsere Formel (2. 8) ist damit etwas allgemeiner als die von L. BERWALD.

Es seien nun  $\eta_i^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ ) linear unabhängige Vektoren, für die die Relationen <sup>2)</sup>

$$(2. 9) \quad \frac{dx^i}{ds} \eta_i^{(\alpha)} = 0$$

d. h. die Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  stehen senkrecht auf den Tangentenvektor  $\frac{dx^i}{ds}$  der durch (2. 1) charakterisierte Kurve.

Da (2. 1) mit Hilfe des invarianten Differential in der Form

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} \equiv \frac{D}{ds} \frac{dx^i}{ds} = 0$$

geschrieben werden kann, bekommt man nach einer invarianten Ableitung von (2. 9) nach dem Parameter  $s$ :

$$(2. 10a) \quad \frac{dx^i}{ds} \frac{D\eta_i^{(\alpha)}}{ds} = 0,$$

$$(2. 10b) \quad \frac{dx^i}{ds} \frac{D^2 \eta_i^{(\alpha)}}{ds^2} = 0.$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß außer  $\eta_i^{(\alpha)}$  auch die Vektoren  $\frac{D\eta_i^{(\alpha)}}{ds}$ ,  $\frac{D^2 \eta_i^{(\alpha)}}{ds^2}$  auf den Tangentenvektor  $\frac{dx^i}{ds}$  senkrecht stehen. Dann folgt aber nach (2. 9), daß sie eine Linearkombination der Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  sind. Es gilt also

$$(2. 11a) \quad \frac{D\eta_i^{(\alpha)}}{ds} = a_\beta^\alpha \eta_i^{(\beta)},$$

$$(2. 11b) \quad \frac{D^2 \eta_i^{(\alpha)}}{ds^2} = b_\beta^\alpha \eta_i^{(\beta)}.$$

Die Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$ , und damit  $\frac{D\eta_i^{(\alpha)}}{ds}$  und  $\frac{D^2 \eta_i^{(\alpha)}}{ds^2}$  sind also längs der autoparallelen Kurve (2. 1) durch den Tangentenvektor  $\frac{dx^i}{ds}$  erklärt. Wir bemerken

<sup>2)</sup> Vgl. die Fußnote <sup>1)</sup>.

hier, daß wenn die Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  längs der Kurve  $x^i = x^i(s)$  parallel verschoben sind, dann ist  $a_\beta^{\alpha} = b_\beta^{\alpha} = 0$ . In diesem Falle ist nämlich

$$\frac{D\eta_i^{(\alpha)}}{ds} = 0, \quad \frac{D^2\eta_i^{(\alpha)}}{ds^2} = 0,$$

somit bekommt man wegen der lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  nach der Gleichungen (2. 11a) und (2. 11b) unmittelbar die Behauptung.

Wir ergänzen die Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  zu einem linear unabhängigen kovarianten  $n$ -Bein. Es sei  $\eta_i^{(n)}$  ein Vektor, für den die Relation

$$(2. 12) \quad \frac{dx^i}{ds} \eta_i^{(n)} = 1$$

gilt, und außerdem sei der Vektor  $\eta_i^{(n)}$  von den Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  linear unabhängig. Die  $n$  kovarianten Vektoren

$$\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \dots, \eta_i^{(n)}$$

sind also linear unabhängig.

Zu dem kovarianten  $n$ -Bein  $\eta_i^{(j)}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) konstruieren wir durch die Relationen

$$(2. 13) \quad \eta_{(j)}^i \eta_i^{(k)} = \delta_j^k \quad (\delta_j^k: \text{Kronecker } \delta)$$

das adjungierte kontravariante  $n$ -Bein:

$$\eta_{(1)}^i, \eta_{(2)}^i, \dots, \eta_{(n)}^i.$$

Nach den Gleichungen (2. 9), (2. 12) und (2. 13) folgt, daß

$$(2. 14) \quad \eta_{(n)}^i = \frac{dx^i}{ds}$$

ist; in (2. 13) haben wir selbstverständlich  $j=n$  gesetzt. Aus (2. 13) bekommt man noch nach einer Differentiation nach  $s$ , daß aus  $\frac{D\eta_i^{(\alpha)}}{ds} = 0$  auch  $\frac{D\eta_{(\beta)}^i}{ds} \eta_i^{(\alpha)} = 0$

folgt. Ist aber  $\frac{D\eta_{(j)}^i}{ds} = 0$ , bzw.  $\frac{D\eta_i^{(j)}}{ds} = 0$ , so folgt aus (2. 13) nach Differentiation

nach  $s$  wegen

$$\eta_{(j)}^i \eta_k^{(j)} = \delta_k^i,$$

daß auch  $\frac{D\eta_j^{(k)}}{ds} = 0$ , bzw.  $\frac{D\eta_{(k)}^i}{ds} = 0$  ist. Ist also  $\eta_{(j)}^i$  längs (2. 1) parallel verschoben,

so ist auch  $\eta_i^{(j)}$  längs (2. 1) parallel verschoben.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der skalaren Form der Gleichung der autoparallelen Abweichung über. Vor allem bestimmen wir den infinitesimalen Vektor  $\xi^i(s)$  mit Hilfe des  $n$ -Beins  $\eta_{(j)}^i$  ( $j=1, \dots, n$ ). Es wird in Hinsicht auf (2. 14):

$$(2. 15) \quad \xi^j = \eta_{(\alpha)}^j \xi^{(\alpha)} + \frac{dx^j}{ds} \xi^{(n)},$$

wo über den Index  $\alpha$  selbstverständlich von 1 bis  $(n-1)$  summiert werden soll. Die Skalaren  $\xi^{(\alpha)}$  und  $\xi^{(n)}$  bekommen wir nach Überschiebungen mit  $\eta_j^{(\beta)}$ , bzw.  $\eta_j^{(n)}$ . Es ist auf Grund der Relationen (2. 9) und (2. 13), (2. 14):

$$(2. 16) \quad \xi^{(\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \xi^j \eta_j^{(\beta)}, \quad \xi^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \xi^j \eta_j^{(n)}.$$

Überschieben wir die Gleichung (2. 8) mit  $\eta_i^{(\alpha)}$ , beachten wir ferner die Relation (2. 9), so wird:

$$(2. 17) \quad \frac{D^2 \xi^i}{ds^2} \eta_i^{(\alpha)} + K_j^i \xi^j \eta_i^{(\alpha)} = 0.$$

Differenzieren wir nun die Relationen (2. 16) zweimal nach  $s$ , so wird wegen  $\frac{d\xi^{(\beta)}}{ds} = \frac{D\xi^{(\beta)}}{ds}$ :

$$(2. 18) \quad \frac{d^2 \xi^{(\beta)}}{ds^2} = \eta_j^{(\beta)} \frac{D^2 \xi^j}{ds^2} + 2 \frac{D\eta_j^{(\beta)}}{ds} \frac{D\xi^j}{ds} + \frac{D^2 \eta_j^{(\beta)}}{ds^2} \xi^j.$$

Beachten wir jetzt (2. 11a) und (2. 11b), ferner die Relation

$$(2. 18a) \quad \frac{D\eta_j^{(\beta)}}{ds} \frac{D\xi^j}{ds} = a_\gamma^\beta \eta_j^{(\gamma)} \frac{D\xi^j}{ds} = a_\gamma^\beta \left( \frac{d\xi^{(\gamma)}}{ds} - a_\delta^\gamma \xi^{(\delta)} \right),$$

die auf Grund von (2. 16) und (2. 11a) nach einer Ableitung von  $\xi^{(\gamma)}$  nach  $s$  leicht berechnet werden kann, so kann man aus (2. 17) mittels der Formeln (2. 18) und (2. 18a) die Glieder

$$\frac{D^2 \xi^j}{ds^2} \eta_j^{(\alpha)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{D\eta_j^{(\beta)}}{ds} \frac{D\xi^j}{ds}$$

eliminieren. Man bekommt dann:

$$(2. 19) \quad \frac{d^2 \xi^{(\alpha)}}{ds^2} - 2a_\gamma^\alpha \frac{d\xi^{(\gamma)}}{ds} + (2a_\gamma^\alpha a_\beta^\gamma - b_\beta^\alpha + K_\beta^\alpha) \xi^{(\beta)} = 0,$$

wo noch  $\xi^j$  mittels (2. 15) eliminiert und

$$(2. 20) \quad K_\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} K_j^i \eta_i^{(\alpha)} \eta_{(\beta)}^j$$

gesetzt wurde; man hat noch auch die wohlbekannte Relation  $K_j^i x'^j = 0$  benützt, die übrigens auf Grund der Homogenität der  $G^i$  leicht verifizierbar ist.

(2. 19) ist nun die gewünschte skalare Form der autoparallelen Abweichung, da die  $\xi^{(\alpha)}$  Skalaren sind.

Wir stellen zum Schluß dieses Paragraphen eine im folgenden wichtige Forderung bezüglich des Vektors  $\xi^j$ :

*Forderung:*  $\xi^j$  sei eine Linearkombination der Vektoren  $\eta_{(\alpha)}^j$ .

Aus der Formel (2. 15) wird jetzt:

$$(2. 21) \quad \xi^j = \eta_{(\alpha)}^j \xi^{(\alpha)},$$

d. h.  $\xi^j$  steht senkrecht auf den Vektor  $\eta_i^{(n)}$ . Unsere Forderung ist übrigens nicht eine wesentliche Beschränkung, und bedeutet nach (2. 4a) nur soviel, daß die Punkte der Kurven:  $x^i(s)$  und  $\psi^i(\sigma)$  nicht ganz beliebig zueinander geordnet sind (vgl. [3], Gleichung (3. 10a)).

Unsere Konstruktion bezüglich des ko- und kontravarianten  $n$ -Beins ist auch im metrischen Fall durchführbar. In diesem Falle wird aber

$$(2. 22) \quad \eta_{(j)}^i = g^{ik} \eta_k^{(j)}, \quad \eta_i^{(j)} = g_{ik} \eta_{(j)}^k$$

und  $\eta_{(j)}^i$  bzw.  $\eta_i^{(j)}$  bilden nach (2. 13) und (2. 22) ein orthogonales und normiertes  $n$ -Bein. Der Parameter  $s$  wird jetzt auf Grund von (2. 12), (2. 14) und (2. 22) eben die Bogenlänge auf der Kurve (2. 1) bedeuten. Im zweidimensionalen Falle kann sogar erreicht werden, daß

$$\frac{D\eta_{(1)}^i}{ds} = 0$$

sei. (Vgl. z. B. [4], Formel (4. 8)).

### § 3. Über die Schnittpunkte der unendlich benachbarten autoparallelen Kurven

Die Gleichung (2. 19) der autoparallelen Abweichung kann durch die Elimination des Gliedes  $\frac{d\xi^{(\gamma)}}{ds}$  vereinfacht werden. Führen wir mittels der Substitution

$$(3. 1) \quad \xi^{(\alpha)} = \varrho_\beta^\alpha z^\beta$$

neue unbekannte Funktionen  $z^\beta(s)$  ein, wo die Funktionen  $\varrho_\beta^\alpha(s)$  dem Differentialgleichungssystem

$$(3. 2) \quad \frac{d\varrho_\gamma^\alpha}{ds} - a_\beta^\alpha(s) \varrho_\gamma^\beta = 0$$

genügen sollen, so geht (2. 19) auf Grund von (3. 1) und (3. 2) in die Gleichung

$$(3. 3) \quad \varrho_\beta^\alpha \frac{d^2 z^\beta}{ds^2} + \left( \frac{d^2 \varrho_\beta^\alpha}{ds^2} - b_\gamma^\alpha \varrho_\beta^\gamma + K_\gamma^\alpha \varrho_\beta^\gamma \right) z^\beta = 0$$

über. Stellen wir die Forderung, daß die Lösungen  $\varrho_\beta^\alpha$  von (3. 2) linear unabhängig seien, d. h.:

$$\text{Det}(\varrho_\beta^\alpha) \neq 0$$



gelte, so sind die Funktionen  $\tau_\beta^\alpha$  durch die Gleichungen

$$(3.4) \quad \varrho_\beta^\alpha \tau_\alpha^\gamma = \delta_\beta^\gamma \quad (\delta_\beta^\alpha: \text{Kronecker } \delta)$$

eindeutig definiert. Eine Überschiebung von (3.3) mit  $\tau_\alpha^\gamma$  gibt nach (3.4) das Differentialgleichungssystem:

$$(3.5) \quad \frac{d^2 z^\alpha}{ds^2} + K_\beta^{\alpha\gamma} z^\beta = 0,$$

wo

$$(3.5a) \quad K_\beta^{\alpha\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_\alpha^\gamma \left( \frac{d^2 \varrho_\beta^\alpha}{ds^2} - b_\gamma^\alpha \varrho_\beta^\gamma + K_\gamma^\alpha \varrho_\beta^\gamma \right)$$

bedeutet.

Die Gleichung (3.5) ist die allgemeinste skalare Form der Gleichung der autoparallelen Abweichung.

Die Schnittpunkte der unendlich benachbarten autoparallelen Kurven (2.1) und (2.2) sind nach (2.4a) durch  $\xi^i(s_0) = 0$  gekennzeichnet, wo  $s_0$  einen geeigneten Parameterwert bedeutet. Auf Grund der Relation (2.3) bestimmt offenbar der Parameterwert  $s_0 = 0$  einen gemeinsamen Punkt. Um andere Schnittpunkte der Kurven (2.1) und (2.2) zu bekommen — falls diese überhaupt existieren — muß man die Nullstellen der Lösungen  $\xi^i(s)$  von (2.8) zu bestimmen. Bilden nun die Limespunkte dieser Nullstellen eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche  $\mathcal{F}$ , so ist nach Satz 1 die Hyperfläche  $\mathcal{F}$  eine Hüllfläche. Statt der Nullstellen von  $\xi^i(s)$ , ist es hinreichend die von  $z^\alpha(s)$  zu bestimmen, denn es gilt der folgende

**Satz 2.** Die Nullstellen von  $\xi^i(s)$  und  $z^\alpha(s)$  stimmen überein, wenn  $\xi^i(s)$ , bzw.  $z^\alpha(s)$  die Lösungen von (2.8), bzw. (3.5) sind.

BEWEIS. Nach (2.21) und (3.1) gilt:

$$(3.6a) \quad \xi^i(s) = \eta_{(\alpha)}^i \varrho_\beta^\alpha z^\beta(s).$$

Nach dieser Formel ist also  $\xi^i(s_0) = 0$ , falls  $z^\beta(s_0) = 0$  besteht. Aus dieser Formel folgt aber nach einer Überschiebung mit  $\eta_i^{(\gamma)} \tau_\gamma^\alpha$  auf Grund der Relationen <sup>3)</sup> (2.13) und (3.4):

$$(3.6b) \quad z^\alpha(s) = \xi^i(s) \eta_i^{(\gamma)} \tau_\gamma^\alpha.$$

Diese Formel drückt aus, daß aus  $\xi^i(s_0) = 0$  auch  $z^\alpha(s_0) = 0$  folgt.

In manchen Fällen kann für die Existenz der Nullstellen von  $\xi^i(s)$  leicht ein Kriterium angegeben werden. Nehmen wir an, daß die Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  längs der autoparallelen Kurve (2.1) parallel verschoben sind. Die invariante Differentiale von  $\eta_i^{(\alpha)}$  sind also identisch Null, und wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $\eta_i^{(\alpha)}$  folgt aus (2.11a) und (2.11b), daß auch  $a_\beta^\alpha = b_\beta^\alpha = 0$  ist.

Bezüglich des zu Grunde gelegten affinen Raumes nehmen wir an, daß sein affiner Abweichungstensor  $K_j^i$  die Form:

$$(3.7) \quad K_k^i = K(x, x') \left( \delta_k^i - \frac{dx^i}{ds} \eta_k^{(n)} \right), \quad x'^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{ds}$$

<sup>3)</sup> In (2.13) soll jetzt  $j = \alpha, k = \gamma$  gesetzt werden. Vgl. auch unsere Fußnote <sup>1)</sup>.

hat. Der Skalar  $K$  ist der Krümmungsskalar des Raumes, der Raum selbst ist also ein Raum von skalarer Krümmung (vgl. [1] Formel (13. 3)); unsere Formel (3. 7) ist eine natürliche Verallgemeinerung derjenigen Formel, welche die Finslerräume von skalarer Krümmung charakterisiert). Da aus (2. 13) und (2. 14) auch

$$\eta_{(j)}^i \eta_k^{(j)} \equiv \eta_{(i)}^i \eta_k^{(i)} + \frac{dx^i}{ds} \eta_k^{(n)} = \delta_k^i$$

folgt, wird nach (3. 7):

$$(3. 8) \quad K_k^i = K(x, x') \eta_{(i)}^i \eta_k^{(i)}.$$

Auf Grund von (2. 20) und (2. 13) wird

$$(3. 9) \quad K_\beta^\alpha = K(x, x') \delta_\beta^\alpha$$

und aus (2. 19) wird somit

$$(3. 10) \quad \frac{d^2 \xi^{(\alpha)}}{ds^2} + K(x, x') \xi^{(\alpha)} = 0.$$

Die Gleichung (3. 10) ist also jetzt die skalare Form der autoparallelen Abweichung. Bezüglich der Räume von skalarer Krümmung beweisen wir unseren

**Hauptsatz.** *Gilt für den Krümmungsskalar  $K$  eines affinen Raumes von skalarer Krümmung die Ungleichung:*

$$K(x, x') > \frac{1}{A^2}, \quad (A: \text{Konstante}),$$

*so existiert der Schnittpunkt der unendlich benachbarten autoparallelen Kurven (2. 1) und (2. 2). Bilden die Limespunkte der Schnittpunkte der aus einem Punkte ausgehenden autoparallelen Kurven eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche  $\mathcal{F}$ , so ist  $\mathcal{F}$  eben die Hüllfläche der autoparallelen Kurven.*

BEWEIS. Nach den Formeln (2. 5) und (2. 16) hat man

$$(3. 11) \quad \xi^{(\alpha)}(0) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-1).$$

Vor allem wollen wir zeigen, daß die Nullstellen der Lösungen  $\xi^{(\alpha)}(s)$  ( $\alpha = 1, \dots, n-1$ ) von (3. 10) übereinstimmen. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung hat nämlich zwei Parameter. Sind nun  $u(s), u^*(s)$  zwei verschiedene partikuläre Lösungen von (3. 10) mit  $u^*(s) \neq 0$ , so hat  $\xi^{(\alpha)}(s)$  die Form:

$$\xi^{(\alpha)}(s) = cu(s) + c^*u^*(s), \quad (\alpha = 1, \dots, n-1).$$

Wegen (3. 11) kann  $c^*$  eliminiert werden, somit wird:

$$\xi^{(\alpha)}(s) = c \left( u(s) - \frac{u(0)}{u^*(0)} u^*(s) \right).$$

Die Funktionen  $\xi^{(\alpha)}(s)$  haben also wegen der Unabhängigkeit der Funktion  $K$  von  $\alpha$  die Form:

$$\xi^{(\alpha)}(s) = c\xi(s), \quad \xi(0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, (n-1),$$

wo  $c$  einen beliebig wählbaren Parameter bedeutet. Unsere letzte Formel beweist aber unsere Behauptung bezüglich der Nullstellen von  $\xi^{(\alpha)}(s)$ .

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{A^2} y = 0, \quad y(0) = 0$$

hat aber wegen  $y(0) = 0$  die allgemeine Lösung:

$$(3.12) \quad y = p \sin \frac{1}{A} s,$$

wo der Parameter  $p$  beliebig angegeben werden kann. Offenbar ist für

$$\sigma_0 = \pi A,$$

$y(\sigma_0) = 0$ . Nach dem Sturmschen Satz über die Nullstellen der Lösungen der Differentialgleichung (3.10) und (3.12) folgt aber, daß für einen geeigneten Parameterwert  $s_0$

$$\xi^{(\alpha)}(s_0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, (n-1)$$

gelten wird, und  $s_0 < \sigma_0 = \pi A$  besteht. (vgl. z. B. [3] § 4, insbesondere S. 116).

Auf Grund der Gleichung (2.21) wird aber

$$\xi^i(s_0) = 0,$$

woraus nach (2.4a) die Existenz der vom Punkte  $x^i(0)$  verschiedene Schnittpunkt von (2.1) und (2.2) folgt.

Die aus einem Punkte ausgehenden autoparallelen Kurven bilden nun eine Kurvenschar von  $(n-1)$  Parametern. Eine autoparallele Kurve ist nämlich als Lösungskurve von (2.1) durch einen Punkt und eine Richtung festgelegt. Ist nun der Punkt fix, so kann noch die Richtung beliebig gewählt werden. Das bedeutet aber im  $n$ -dimensionalen Raum genau  $(n-1)$  frei wählbare Parameter.

Wegen  $s_0 < \sigma_0 = \pi A$  existiert der Limespunkt der Schnittpunkte, falls die autoparallele Kurve (2.2) nach (2.1) strebt, d. h. nach (2.4a) und (2.4b)  $\xi^i \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ . Nach unserem Satz 1 folgt dann, daß falls die Limespunkte eine Hyperfläche bilden, dann diese Hyperfläche eben die Hüllfläche wird, w. z. b. w.

### Literatur

- [1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 755–781.
- [2] G. JULIA, Cours de géométrie infinitésimale, Troisième fascicule. Paris, 1955.
- [3] A. MOÓR, Über die autoparallele Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957), 102–118.
- [4] H. RUND, Eine Krümmungstheorie der Finslerschen Räume, *Math. Ann.* **125** (1952), 1–18.
- [5] H. RUND, The scalar form of Jacobi's equations in the calculus of variations, *Ann. Mat. Pura Appl.* **35** (1953), 183–202.

(Eingegangen am 2. November 1964.)