Über das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen I

Von E. GESZTELYI (Debrecen)

Einleitung

Es ist in der Theorie der Mikusinskischen Operatorenrechnung [1]) ein Integralbegriff für Operatorfunktionen erklärt. Die Erklärung des Integrals für Operatorfunktionen geschieht durch Zurückführung auf ein für Zahlfunktionen definiertes (Riemann- oder Lebesgue-) Integral. Das Integral von Operatorfunktionen ist dann als Pendant des gewöhnlichen Integrals anzusehen.

Wir wollen hier einen Integralbegriff für Operatorfunktionen definieren, der dem Stieltjesschen Integralbegriff entspricht. Da die Definition des Integrals auf das Stieltjes-Integral von Zahlfunktionen zurückgeführt wird, und — wie wir sehen werden — das Integral viele Eigenschaften eines Stieltjes-Integrals besitzt, ist es motiviert auch in diesem Falle über ein Stieltjes-Integral zu sprechen.

Wir werden das Stieltjes-Integral für stetige Operatorfunktionen in zwei Stufen einführen. Erst werden wir das Integral einer stetigen Operatorfunktion bezüglich einer Zahlfunktion von beschränkter Schwankung erklären. Diese Definition ist dem nicht Stieltjesschen Falle ähnlich. Ein wenig komplizierter ist die Sache, wenn wir das Integral einer Operatorfunktion bezüglich einer Operatorfunktion deuten wollen. Obwohl die Begriffe: „Beschränktheit", und „Schwankung" für Operatoren und Operatorfunktionen im allgemeinen sinnlos sind, haben wir eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffs einer Funktion von beschränkter Schwankung für Operatorfunktionen gefunden. Wir können dann das Integral einer stetigen Operatorfunktion bezüglich einer Operatorfunktion von beschränkter Schwankung leicht deuten.

Wir beweisen für dieses Integral, daß viele Eigenschaften eines Stieltjesschen Integrals erfüllt sind.

---

[1]) [1].

§ 1. Das Integral einer stetigen Operatorfunktion bezüglich einer Zahlfunktion von beschränkter Variation

Lemma 1. *Ist die (Zahl-) Funktion $f(\lambda, t)$ im Gebiet $D: \alpha \leqq \lambda \leqq \beta$, $0 \leqq t < \infty$ stetig, und ist $\varphi(\lambda)$ im Intervall $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, so ist die Funktion*

$$f(t) = \int_\alpha^\beta f(\lambda, t)\, d\varphi(\lambda) \tag{1. 1}$$

stetig in $0 \leqq t < \infty$.

Beweis. Wir können voraussetzen, daß $\varphi(\lambda)$ nicht konstant ist. Dann ist $V=$ Totalvariation von $\varphi(\lambda)$ positiv. Es sei ein $t_0 \geqq 0$ beliebig vorgegeben. Dann wählen wir ein $T > t_0$. Aus der Stetigkeit von $f(\lambda, t)$ in D, folgt die gleichmäßige Stetigkeit von $f(\lambda, t)$ im geschlossenen Gebiet $D_1: \alpha \leqq \lambda \leqq \beta$, $0 \leqq t \leqq T$. Ist nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß unabhängig von λ

$$|f(\lambda, t_0+h) - f(\lambda, t_0)| < \frac{\varepsilon}{V} \tag{1. 2}$$

ist, falls $|h| < \delta$ ist. Aus (1. 2) erhalten wir speziell

$$\max_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |f(\lambda, t_0+h) - f(\lambda, t_0)| < \frac{\varepsilon}{V}. \tag{1. 3}$$

So folgt nach bekannten Abschätzungen für $|h| < \delta$

$$|f(t_0+h) - f(t_0)| = \left| \int_\alpha^\beta [f(\lambda, t_0+h) - f(\lambda, t_0)]\, d\varphi(\lambda) \right| \leqq$$

$$\leqq \max_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |f(\lambda, t_0+h) - f(\lambda, t_0)| \cdot V \leqq \frac{\varepsilon}{V} V = \varepsilon.$$

Damit haben wir die Stetigkeit von $f(t)$ bewiesen.

Definition 1. (i) Wir werden das Gebiet $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$, $0 \leqq t < \infty$ mit D bezeichnen. (ii) Es sei $f(\lambda)$ eine in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion. Dann existiert ein Operator $p \neq 0$ derart, daß $pf(\lambda)$ eine in D stetige Zahlfunktion zweier Veränderlicher ist. Wir werden diese Funktion folgendermaßen bezeichnen:

$$pf(\lambda) = \{pf(\lambda)(t)\}$$

Definition 2. Unter dem Stieltjes-Integral der stetigen Operatorfunktion $f(\lambda)$ bezüglich der Zahlfunktion $\varphi(\lambda)$ von beschränkter Schwankung verstehen wir den Operator

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\, d\varphi(\lambda) = p^{-1} \left\{ \int_\alpha^\beta pf(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda) \right\} \tag{1. 4}$$

wobei der Operator p im Sinne der Definition 1. zu wählen ist, und das in Klammern stehende Integral im Sinne von Stieltjes—Riemann zu verstehen ist.

Diese Definition ist korrekt, denn erstens steht auf der rechten Seite von (1. 4) zwischen Klammern eine nach Lemma 1. in $0 \leqq t < \infty$ stetige Funktion, zweitens hängt das Integral nicht von p ab.

Um diese letzte Behauptung zu beweisen werden wir aus der Theorie des Stieltjes-Integrals den folgenden Fubinischen Satz benutzen: [2])

Satz (F). *Es sei $f(x, y)$ eine im Quadrat $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\gamma \leqq y \leqq \delta$ stetige Funktion. Sind $\varphi(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, $\psi(y)$ $(\gamma \leqq y \leqq \delta)$ in den entsprächenden Intervallen von beschränkter Schwankung, so gilt*

$$\int_\alpha^\beta \Big[\int_\gamma^\delta f(x, y)\, d\psi(y)\Big]\, d\varphi(x) = \int_\gamma^\delta \Big[\int_\alpha^\beta f(x, y)\, d\varphi(x)\Big]\, d\psi(y).$$

Auf Grund dieses Satzes können wir zeigen, daß

$$p_1^{-1}\Big\{\int_\alpha^\beta p_1 f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\} = p_2^{-1}\Big\{\int_\alpha^\beta p_2 f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\}$$

d. h.

$$p_2\Big\{\int_\alpha^\beta p_1 f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\} = p_1\Big\{\int_\alpha^\beta p_2 f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\} \tag{1. 5}$$

gilt, wobei man ohne die Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen kann, daß p_1 und p_2 Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$ sind (d. h. sie sind in $[0, \infty)$ stetig). Wir erhalten in der Tat

$$\{p_2(t)\}\Big\{\int_\alpha^\beta p_1 f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\} = \Big\{\int_0^t p_2(t-\tau)\Big[\int_\alpha^\beta p_1 f(\lambda)(\tau)\, d\varphi(\lambda)\Big]\, d\tau\Big\} =$$

$$= \Big\{\int_\alpha^\beta d\varphi(\lambda)\int_0^t p_2(t-\tau)[p_1 f(\lambda)(\tau)]\, d\tau\Big\} = \Big\{\int_\alpha^\beta (p_2 p_1) f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\} =$$

$$= \Big\{\int_\alpha^\beta (p_1 p_2) f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\} = \Big\{\int_\alpha^\beta d\varphi(\lambda)\int_0^t p_1(t-\tau)[p_2 f(\lambda)(\tau)]\, d\tau\Big\} =$$

$$= \Big\{\int_0^t p_1(t-\tau)\Big[\int_\alpha^\beta p_2 f(\lambda)(\tau)\, d\varphi(\lambda)\Big]\, d\tau\Big\} = \{p_1(t)\}\Big\{\int_\alpha^\beta p_2 f(\lambda)(t)\, d\varphi(\lambda)\Big\}.$$

Bemerkung. Das unter (1. 4) stehende Stieltjes-Integral ist eine Verallgemeinerung des im Buch von Mikusiński gegebenen Integrals, da $\varphi(\lambda) = \lambda$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, und in diesem Falle geht die Definition 2. in die Mikusinskische über.

---

[2]) [2]

Satz 1. *Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

$$\text{(i)} \qquad \int_{\alpha}^{\beta} [c_1 f_1(\lambda) + c_2 f_2(\lambda)]\, d\varphi(\lambda) = c_1 \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda)\, d\varphi(\lambda) + c_2 \int_{\alpha}^{\beta} f_2(\lambda)\, d\varphi(\lambda),$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d[\varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi_1(\lambda) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi_2(\lambda),$$

$$\text{(iii)} \qquad \int_{\alpha}^{x} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda) + \int_{x}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda), \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Diese Eigenschaften kann man ebenso rechtfertigen, wie dies für das gewöhnliche Integral einer Operatorfunktion geschieht.

§ 2. Operatorfunktion von beschränkter Schwankung

Ist für eine Zahlfunktion $f(x)$ die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

unabhängig von der Wahl der Zahlen

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \beta$$

beschränkt, so sagt man, daß $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist. Diese Definition läßt sich nicht unmittelbar auf Operatorfunktionen übertragen, da man über keinen Absolutwert (auch über keine Norm) von Operatoren sprechen kann. Wir werden hier eine fast triviale notwendige und hinreichende Bedingung anwenden, die für unsere Verallgemeinerung geeignet ist.

Satz 2. *Eine Zahlfunktion $f(x)$ ist dann und nur dann eine Funktion von beschränkter Schwankung, falls $f(x)$ mittels einer stetigen Zahlfunktion $f_1(x)$ und einer Zahlfunktion $\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung in der Form*

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} f_1(\lambda)\, d\varphi(\lambda) + f(\alpha) \tag{2. 1}$$

geschrieben werden kann.

In der Tat, ist $f_1(\lambda)$ in (2. 1) eine stetige Funktion, so ist — wie bekannt — $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, und umgekehrt: ist $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, so erhalten wir eine Darstellung von $f(x)$ von der Form (2. 1) bei $f_1(\lambda) \equiv 1$ und $\varphi(\lambda) = f(\lambda)$, da

$$\int_{\alpha}^{x} df(\lambda) = f(x) - f(\alpha)$$

ist.

Wir geben für die Operatorfunktionen von beschränkter Schwankung die folgende Definition:

Definition 3. Wenn eine Operatorfunktion $g(x)$ in der Form

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} g_k(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda) + g(\alpha) \tag{2. 2}$$

geschrieben werden kann, wo die Operatorfunktionen $g_k(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig sind, und die Zahlfunktionen $\varphi_k(\lambda)$ von beschränkter Variation sind ($k=1, 2, \ldots, n$), so nennen wir $g(x)$ eine Operatorfunktion von beschränkter Schwankung. Wir nennen die Formel (2. 2) eine Darstellung der Operatorfunktion $g(x)$.

Auf Grund dieser Definition sind die folgenden beiden Behauptungen aquivalent:

(i) $g(x)$ ist eine Funktion von beschränkter Schwankung,

(ii) $g(x)$ besitzt eine Darstellung.

(Ein Problem: Es sei M die Menge sämtlicher Operatorfunktionen $g(x)$ die in der Form

$$g(x) = \int_{\alpha}^{x} g_1(\lambda)\, d\varphi(\lambda) + g(\alpha) \qquad x \in [\alpha, \beta]$$

geschrieben werden können, wobei $g_1(\lambda)$ eine stetige Operatorfunktion, und $\varphi(\lambda)$ eine Zahlfunktion von beschränkter Schwankung ist. Wir wissen nicht, ob die Menge M bezüglich der Addition geschlossen ist, oder nicht. Mit anderen Worten: Es seien $f_1(x), g_1(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktionen, ferner seien $\varphi(x), \psi(x)$ Zahlfunktionen von beschränkter Schwankung. Wir fragen, ob eine in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion $h_1(x)$ und eine Zahlfunktion $\sigma(x)$ von beschränkter Schwankung existieren derart, daß die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{\alpha}^{x} f_1(\lambda)\, d\varphi(\lambda) + \int_{\alpha}^{x} g_1(\lambda)\, d\psi(\lambda) = \int_{\alpha}^{x} h_1(\lambda)\, d\sigma(\lambda).)$$

Man verifiziert leicht den folgenden

Satz 3. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ Operatorfunktionen von beschränkter Schwankung, so ist auch $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ eine Operatorfunktion von beschränkter Schwankung für beliebige Operatoren c_1 und c_2.*

§ 3. Das Integral einer stetigen Operatorfunktion bezüglich einer Operatorfunktion von beschränkter Schwankung

Definition 4. Es sei $f(x)$ eine in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion, ferner sei $g(x)$ eine Operatorfunktion mit der Darstellung (2. 2). Wir definieren das Stieltjes-Integral von $f(x)$ bezüglich $g(x)$ durch die Formel:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) g_k(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda). \tag{3. 1}$$

Satz 4. *Das Stieltjes-Integral* (3. 1) *hängt nur von* $f(x)$ *und* $g(x)$ *ab, es ist aber unabhängig von der Darstellung von* $g(x)$, *d. h. von der Wahl der Funktionen* $g_k(x)$ *und* $\varphi_k(x)$, *die die Funktion* $g(x)$ *in der Form* (2. 2) *darstellen.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $g(x)$ zwei Darstellungen besitzt:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} g_k(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda) + g(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha}^{x} h_i(\lambda)\, d\psi_i(\lambda) + g(\alpha) \tag{3. 2}$$

wobei $g_k(\lambda)$, $h_i(\lambda)$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ i=1, 2, \ldots, m)$ in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktionen, $\varphi_k(\lambda)$, $\psi_i(\lambda)$ Zahlfunktionen von beschränkter Variation sind. Es ist dann zu zeigen, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} f(\lambda) g_k(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha}^{x} f(\lambda) h_i(\lambda)\, d\psi_i(\lambda) \tag{3. 3}$$

ist, wo $f(\lambda)$ eine beliebige in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion ist.

Es sei ein Operator $p \neq 0$ gegeben derart, daß die Funktionen

$$\begin{aligned} pg_k(\lambda)(t) &= G_k(\lambda, t) \qquad k=1, 2, \ldots, n \\ ph_i(\lambda)(t) &= H_i(\lambda, t) \qquad i=1, 2, \ldots, m \\ pf(\lambda)(t) &= F(\lambda, t) \end{aligned} \tag{3. 4}$$

im Gebiet D im gewöhnlichen Sinne stetig sind. (S. Def. 1.) Man erhält aus (3. 2) auf Grund der Definition 2. für $x \in [\alpha, \beta]$

$$p[g(x) - g(\alpha)] = \left\{\sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} G_k(\lambda, t)\, d\varphi_k(\lambda)\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha}^{x} H_i(\lambda, t)\, d\psi_i(\lambda)\right\}. \tag{3. 5}$$

Da $G_k(\lambda, t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ und $H_i(\lambda, t)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ im Gebiet $D_x\colon \alpha \leqq \lambda \leqq x$, $0 \leqq t < \infty$ im gewöhnlichen Sinne stetig sind, sehen wir daß $p[g(x) - g(\alpha)]$ nach Lemma 1. für jedes feste x eine stetige Funktion der Klasse $\mathcal{C}$ ist. Wir können also die Gleichung

$$p[g(x) - g(\alpha)] = \{G(x, t)\}$$

und damit statt den Operatorgleichungen (3. 5) die Gleichungen

$$G(x, t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} G_k(\lambda, t)\, d\varphi_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} H_i(\lambda, t)\, d\psi_i(\lambda)$$

schreiben. Man sieht hieraus, daß $G(x, t)$ für ein beliebiges, aber festes t eine Funktion von beschränkter Variation in $[\alpha, \beta]$ ist.

Wählen wir t und $\tau \leqq t$ beliebig aber fest im Intervall $[0, \infty)$ so erhalten wir nach bekannten Sätzen aus der Theorie des gewöhnlichen Stieltjesschen Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x, t-\tau)\, d_x G(x, \tau) = \tag{3. 6}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} F(x, t-\tau) G_k(x, \tau)\, d\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha}^{\beta} F(x, t-\tau) H_i(x, \tau)\, d\psi_i(x).$$

Integriert man beide Seiten von (3. 6) (wo die Funktionen nach Lemma 1. in $0 \leqq \tau \leqq t$ stetig sind) nach τ von 0 bis t, so bekommt man

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{t} \left[\int_{\alpha}^{\beta} F(x, t-\tau) G_k(x, \tau)\, d\varphi_k(x) \right] d\tau = \tag{3. 7}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{t} \left[\int_{\alpha}^{\beta} F(x, t-\tau) H_i(x, \tau)\, d\psi_i(x) \right] d\tau.$$

Wendet man nach vertauschung der Reihenfolge der Integration (Satz (F)) die Symbolik der Operatorenrechnung an, so nimmt (3. 7) die Form

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \{F(x, t)\} \{G_k(x, t)\}\, d\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha}^{\beta} \{F(x, t)\} \{H_i(x, t)\}\, d\psi_i(x) \tag{3. 8}$$

an, d. h. mit Rücksicht auf (3. 4)

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \{pf(x)(t)\} \{pg_k(x)(t)\}\, d\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha}^{\beta} \{pf(x)(t)\} \{ph_i(x)(t)\}\, d\psi_i(x). \tag{3. 9}$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (3. 9) durch p^{-2}, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} p^{-2} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} p^2 f(x) g_k(x)(t)\, d\varphi_k(x) \right\} = \sum_{i=1}^{m} p^{-2} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} p^2 f(x) h_i(x)(t)\, d\psi_i(x) \right\}. \tag{3. 10}$$

Damit haben wir Satz 4. bewiesen, da (3. 10) und (3. 3) nach Definition 2. übereinstimmen.

§ 4. Eigenschaften des Stieltjesschen Integrals

Man kann leicht verifizieren, daß die Eigenschaften, die wir für einen spezialen Fall in Satz 1. bewiesen haben, auch für das allgemeinere Integral gelten. Diese Eigenschaften fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 5. *Wenn die Operatorfunktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ in $[\alpha, \beta]$ von beschränkter Schwankung sind, so gilt*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)]\, d[b_1 g_1(x) + b_2 g_2(x)] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_i b_j \int_{\alpha}^{\beta} f_i(x)\, dg_j(x) \tag{4. 1}$$

für stetige Operatorfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und beliebige Operatoren a_1, a_2, b_1, b_2. Ist ferner $g(x)$ von beschränkter Schwankung, so gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{x} f(\lambda)\, dg(\lambda) + \int_{x}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda) \tag{4. 2}$$

für ein beliebiges $x \in [\alpha, \beta]$.

Satz 6. *Ist $f(x)$ stetig in $[\alpha, \beta]$ und hat $g(x)$ eine stetige Ableitung in $[\alpha, \beta]$, so ist $g(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, und es gilt*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) g'(\lambda)\, d\lambda. \tag{4. 3}$$

Beweis. Die Definition 2. ist für $\varphi(\lambda) = \lambda$ identisch mit der Mikusińskischen Definition des gewöhnlichen Integrals von Operatorfunktionen. Besitzt $g(\lambda)$ eine stetige Ableitung $g'(\lambda)$, so gilt

$$g(x) = \int_{\alpha}^{x} g'(\lambda)\, d\lambda + g(\alpha).$$

Hieraus folgert man, daß $g(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, also nach Definition 4. (4. 3) gilt.

Satz 7. *Ist $g(x)$ eine Treppenfunktion:*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \leqq x \leqq x_0 \\ a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} & \text{für} \quad x_{k-1} < x < x_k \\ a_0 + a_1 + \ldots + a_n & \text{für} \quad x_n \leqq x \leqq \beta \end{cases} \tag{4. 4}$$

$$\alpha \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ Operatoren sind, so ist $g(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, und es gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dg(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k) \tag{4. 5}$$

für eine in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion $f(x)$.

Beweis. Man kann die Funktion $g(x)$ mit Hilfe der Funktionen

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \leqq x \leqq x_k \\ 1 & \text{für} \quad \beta > x > x_k \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

in der Form

$$g(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots + a_n \varphi_n(x) \tag{4. 6}$$

schreiben. $\varphi_k(x) = \int_{\alpha}^{x} d\varphi_k(\lambda)$ ist, ferner nach (4. 1) $a_k \varphi_k(x) = a_k \int_{\alpha}^{x} d\varphi_k(\lambda) = \int_{\alpha}^{x} a_k\, d\varphi_k(\lambda)$ gilt, geht (4. 6) in

$$g(x) = \int_{\alpha}^{x} a_0\, d\varphi_0(\lambda) + \int_{\alpha}^{x} a_1\, d\varphi_1(\lambda) + \ldots + \int_{\alpha}^{x} a_n\, d\varphi_n(\lambda) \tag{4. 7}$$

über. (4. 7) ist also eine Darstellung von $g(x)$, folglich gilt nach Definition 4. und Satz 1. (i), ferner auf Grund der Definition 2.:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dg(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) a_k\, d\varphi_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k p^{-1} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} pf(\lambda)(t)\, d\varphi_k(\lambda) \right\} = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{-1} \{ pf(x_k)(t) \} = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k).$$

Satz 8. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktionen und von beschränkter Schwankung, so gilt*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda) = f(\beta) g(\beta) - f(\alpha) g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda)\, df(\lambda). \tag{4. 8}$$

Zum Beweis dieses Satzes werden wir die folgenden Hilfssätze benützen:

Lemma 2. *Ist die Operatorfunktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung stetig in $[\alpha, \beta]$, dann besitzt $f(x)$ eine Darstellung*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} f_k(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda) + f(\alpha) \tag{4. 9}$$

derart, daß die Zahlfunktionen $\varphi_k(\lambda)$ von beschränkter Schwankung in $[\alpha, \beta]$ stetig sind.

Lemma 3. *Ist die Zahlfunktion $\sigma(x)$ von beschränkter Schwankung eine Sprungfunktion* [3], *so ist auch die Operatorfunktion*

$$g(x) = \int_\alpha^x f(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

eine Sprungfunktion für eine beliebige stetige Operatorfunktion $f(\lambda)$.

Definition 5. Eine Operatorfunktion $g(x)$ heißt eine Sprungfunktion, wenn die folgenden Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt sind:

(i) $g(x)$ ist in jedem Punkt des Interwals $[\alpha, \beta]$ definiert.

(ii) Das Intervall $[\alpha, \beta]$ läßt sich in eine endliche oder unendliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen derart, daß $g(x)$ im Inneren jedes Teilintervalls konstant ist.

Beweis *von Lemma 3.* Es sei I_ν ein offenes Teilintervall von $[\alpha, \beta]$, in dem $\sigma(x)$ konstant ist. Ist $p \neq 0$ ein Operator mit der Eigenschaft, daß $pf(\lambda)(t)$ stetig in D ist, so ist für $x \in I_\nu$

$$(4.10) \qquad pg(x) = \left\{\int_\alpha^x pf(\lambda)(t)\, d\sigma(\lambda)\right\} = \{\sum_{x_k < x} pf(x_k)(t)[\sigma(x_k+0) - \sigma(x_k - 0)]\}$$

konstant im Intervall I_ν, wobei $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ die Sprungstellen von $\sigma(x)$ sind. Gilt nämlich die Ungleichung $x_k < x''$ für ein $x'' \in I_\nu$, so gilt auch $x_k < x'$ für ein beliebiges $x' \in I_\nu$, also auch für den Fall, wenn $x' < x''$ ist. In der Tat, im entgegengesetzten Falle ist $x' \leqq x_k < x''$, und dies widerspricht der Tatsache, daß I_ν keine Sprungstelle besitzt. Gleicherweise folgt $x_i > x' \in I_\nu$ aus $x_i > x'' \in I_\nu$.

$g(x)$ ist also konstant in jedem Teilintervall, wo $\sigma(x)$ konstant ist. Damit ist Lemma 3. bewiesen.

Lemma 4. *Die Summe zweier Sprungfunktionen ist wieder eine Sprungfunktion.*

Lemma 5. *Eine Sprungfunktion ist dann und nur dann stetig in $[\alpha, \beta]$, falls sie in $[\alpha, \beta]$ konstant ist.*

Die Behauptungen der Lemmas 4. und 5. kann man leicht verifizieren.

Beweis *von Lemma 2.* $f(x)$ besitzt eine Darstellung

$$(4.11) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^n \int_\alpha^x f_k(\lambda)\, d\varphi_k^*(\lambda) + f(\alpha)$$

wobei $f_k(\lambda)$ stetig ist und die $\varphi_k^*(\lambda)$ Zahlfunktionen von beschränkter Schwankung sind.

Wir wissen, daß die Zahlfunktion $\varphi_k^*(\lambda)$ von endlicher Variation in eine Summe einer stetigen Funktion $\varphi_k(\lambda)$ von endlicher Variation und einer Sprungfunktion $\sigma_k(\lambda)$ zerlegt werden kann:

$$(4.12) \qquad \varphi_k^*(\lambda) = \varphi_k(\lambda) + \sigma_k(\lambda).$$

Setzen wir (4. 12) in (4. 11) ein, so erhalten wir auf Grund von Satz 1.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} f_k(\lambda)\, d\varphi_k(\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} f_k(\lambda)\, d\sigma_k(\lambda) + f(\alpha). \tag{4. 13}$$

Die Funktion

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{x} f_k(\lambda)\, d\sigma_k(\lambda)$$

ist nach Lemma 4. eine Sprungfunktion, denn die Funktionen

$$\int_{\alpha}^{x} f_k(\lambda)\, d\sigma_k(\lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind nach Lemma 3. Sprungfunktionen. Aus der Stetigkeit von $f(x)$ und aus (4. 13) folgt die Stetigkeit von $s(x)$, also nach Lemma 5. ist $s(x)$ konstant. Da

$$s(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\alpha} f_k(\lambda)\, d\sigma_k(\lambda) = 0$$

ist, so folgt, daß $s(x) \equiv 0$ in $[\alpha, \beta]$ ist. So ist (4. 13) die gewünschte Darstellung (4. 9) von $f(x)$.

Lemma 6. *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktionen, ferner seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetige Zahlfunktionen von beschränkter Schwankung. Dann existieren die Integrale*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{x} f(x) g(\lambda)\, d\psi(\lambda)\, d\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \left[\int_{\alpha}^{x} g(\lambda)\, d\psi(\lambda) \right] d\varphi(x) \tag{4. 14}$$

und

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{x}^{\beta} f(\lambda) g(x)\, d\varphi(\lambda)\, d\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \left[\int_{x}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda) \right] d\psi(x) \tag{4. 15}$$

und es gilt die Gleichung

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{x} f(x) g(\lambda)\, d\psi(\lambda)\, d\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{x}^{\beta} f(\lambda) g(x)\, d\varphi(\lambda)\, d\psi(x). \tag{4. 16}$$

Beweis. Die Existenz von (4. 14) und (4. 15) ist wegen der leicht verifizierbaren Stetigkeit von $\int_{\alpha}^{x} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)$ und $\int_{x}^{\beta} g(\lambda)\, d\psi(\lambda)$ gesichert.

Aus der Stetigkeit von $f(x)$ und $g(x)$ folgt die Existenz eines Operators $p \neq 0$ so, daß die Funktionen

$$pf(x)(t) = F(x, t) \tag{4.17}$$

$$pg(x)(t) = G(x, t) \tag{4.18}$$

in D stetig sind.

Dann gilt nach Definition 2.

$$\left[\int_\alpha^\beta \int_\alpha^x f(x) g(\lambda)\, d\psi(\lambda)\right] d\varphi(x) = p^{-2} \left\{\int_\alpha^\beta \left[\int_\alpha^x F(x, t) * G(\lambda, t)\, d\psi(\lambda)\right] d\varphi(x)\right\},$$

wobei

$$F(x, t) * G(\lambda, t) = \int_0^t F(x, t-\tau) G(\lambda, \tau)\, d\tau$$

ist. Halten wir t für einen Augenblick fest, und führen wir die Funktion

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} F(x, t) * G(\lambda, t) & \text{für} \quad \lambda \leqq x, \\ F(x, t) * G(x, t) & \text{für} \quad \lambda > x \end{cases} \tag{4.19}$$

ein.

Man sieht leicht, daß $H(x, \lambda)$ im Quadrat $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$ stetig ist. Es gilt also nach Satz (F)

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_\alpha^\beta H(x, \lambda)\, d\psi(\lambda)\right] d\varphi(x) = \int_\alpha^\beta \left[\int_\alpha^\beta H(x, \lambda)\, d\varphi(x)\right] d\psi(\lambda). \tag{4.20}$$

Wir erhalten mit Rücksicht auf (4. 19)

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta H(x, y)\, d\psi(\lambda) &= \int_\alpha^x H(x, \lambda)\, d\psi(\lambda) + \int_x^\beta H(x, \lambda)\, d\psi(\lambda) = \\ &= \int_\alpha^x F(x, t) * G(\lambda, t)\, d\psi(\lambda) + \int_x^\beta F(x, t) * G(x, t)\, d\psi(\lambda) = \\ &= \int_\alpha^x F(x, t) * G(\lambda, t)\, d\psi(\lambda) + F(x, t) * G(x, t)[\psi(\beta) - \psi(x)], \end{aligned} \tag{4.21}$$

und

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta H(x, \lambda)\, d\varphi(x) &= \int_\alpha^\lambda H(x, \lambda)\, d\varphi(x) + \int_\lambda^\beta H(x, \lambda)\, d\varphi(x) = \\ &= \int_\alpha^\lambda F(x, t) * G(x, t)\, d\varphi(x) + \int_\lambda^\beta F(x, t) * G(\lambda, t)\, d\varphi(x). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Durch partielle Integration bekommt man

$$(4.23)\quad \int_\alpha^\beta \Big[\int_\alpha^\lambda F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x)\Big]\,d\psi(\lambda) = \psi(\beta)\int_\alpha^\beta F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x) -$$

$$-\psi(\alpha)\int_\alpha^\alpha F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x) - \int_\alpha^\beta \psi(\lambda)\,d\int_\alpha^\lambda F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x) =$$

$$= \psi(\beta)\int_\alpha^\beta F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x) - \int_\alpha^\beta \psi(\lambda)F(\lambda,t)*G(\lambda,t)\,d\varphi(\lambda).$$

Dann gilt nach (4. 21)

$$(4.24)\quad \int_\alpha^\beta \Big[\int_\alpha^\beta H(x,\lambda)\,d\psi(\lambda)\Big]\,d\varphi(x) = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^x F(x,t)*G(\lambda,t)\,d\psi(\lambda)\,d\varphi(x) +$$

$$+\psi(\beta)\int_\alpha^\beta F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x) - \int_\alpha^\beta F(x,t)*G(x,t)\psi(x)\,d\varphi(x).$$

Aus (4. 22) und (4. 23) erhalten wir

$$(4.25)\quad \int_\alpha^\beta \Big[\int_\alpha^\beta H(x,\lambda)\,d\varphi(x)\Big]\,d\psi(\lambda) = \int_\alpha^\beta \Big[\int_\lambda^\beta F(x,t)*G(\lambda,t)\,d\varphi(x)\Big]\,d\psi(\lambda) +$$

$$+\psi(\beta)\int_\alpha^\beta F(x,t)*G(x,t)\,d\varphi(x) - \int_\alpha^\beta \psi(\lambda)F(\lambda,t)*G(\lambda,t)\,d\varphi(\lambda).$$

Also folgt aus (4. 24) und (4. 25) infolge von (4. 20)

$$(4.26)\quad \int_\alpha^\beta \Big[\int_\alpha^x F(x,t)*G(\lambda,t)\,d\psi(\lambda)\Big]\,d\varphi(x) = \int_\alpha^\beta \Big[\int_\lambda^\beta F(x,t)*G(\lambda,t)\,d\varphi(x)\Big]\,d\psi(\lambda).$$

Schreibt man auf der rechten Seite von (4. 26) λ statt x und x statt λ, so geht (4. 26) in

$$(4.27)\quad \int_\alpha^\beta \Big[\int_\alpha^x F(x,t)*G(\lambda,t)\,d\psi(\lambda)\Big]\,d\varphi(x) = \int_\alpha^\beta \Big[\int_x^\beta F(\lambda,t)*G(x,t)\,d\varphi(\lambda)\Big]\,d\psi(x)$$

über. Damit haben wir das Lemma 6. bewiesen.

Beweis *von Satz 8.* $f(x)$ und $g(x)$ besitzen die Darstellungen

$$(4.28)\qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_\alpha^x f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda) + f(\alpha),$$

$$(4.29)\qquad g(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_\alpha^x g_i(\lambda)\,d\psi_i(\lambda) + g(\alpha),$$

wobei wir wegen der Stetigkeit von $f(x)$ und $g(x)$ nach Lemma 2. voraussetzen können, daß die Funktionen $\varphi_k(x)$ und $\psi_i(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig sind.

Dann erhalten wir auf Grund der Definition 4. und Satz 1.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dg(x) = \sum_{i=1}^m \int_\alpha^\beta f(x) g_i(x)\,d\psi_i(x) = \tag{4.30}$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_\alpha^\beta \left[\sum_{k=1}^n \int_\alpha^x f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda) + f(\alpha)\right] g_i(x)\,d\psi_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \int_\alpha^\beta g_i(x) \int_\alpha^x f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x) + f(\alpha) \sum_{i=1}^m \int_\alpha^\beta g_i(x)\,d\psi_i(x).$$

Setzen wir in (4. 29) $x=\beta$, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^m \int_\alpha^\beta g_i(x)\,d\psi_i(x) = g(\beta) - g(\alpha)$$

also geht (4. 30) in

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dg(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \int_\alpha^\beta \int_\alpha^x g_i(x) f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x) + f(\alpha)[g(\beta) - g(\alpha)] \tag{4.31}$$

über. Gleicherweise erhält man

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,df(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \int_\alpha^\beta \int_\alpha^x f_k(x) g_i(\lambda)\,d\psi_i(\lambda)\,d\varphi_k(x) + g(\alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]. \tag{4.32}$$

Wir erhalten auf Grund von Lemma 6. und Satz 1.

$$\int_\alpha^\beta \int_\alpha^x g_i(x) f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x) + \int_\alpha^\beta \int_\alpha^x f_k(x) g_i(\lambda)\,d\psi_i(\lambda)\,d\varphi_k(x) = \tag{4.33}$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^x g_i(x) f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x) + \int_\alpha^\beta \int_x^\beta g_i(x) f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta g_i(x) f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x) = \int_\alpha^\beta f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda) \int_\alpha^\beta g_i(x)\,d\psi_i(x).$$

Dann folgt aus (4. 31), (4. 32), (4. 33), (4. 28) und (4. 29) die Serie von Gleichungen

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dg(x)+\int_\alpha^\beta g(x)\,df(x)=\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^n\int_\alpha^\beta\int_\alpha^x g_i(x)f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x)+f(\alpha)g(\beta)-$$

$$-f(\alpha)g(\alpha)+\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m\int_\alpha^\beta\int_\alpha^x f_k(x)g_i(\lambda)\,d\psi_i(\lambda)\,d\varphi_k(x)+g(\alpha)f(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)=$$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^n\left[\int_\alpha^\beta\int_\alpha^x g_i(x)f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\,d\psi_i(x)+\int_\alpha^\beta\int_\alpha^x f_k(x)g_i(\lambda)\,d\psi_i(\lambda)\,d\varphi_k(x)\right]+$$

$$+f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)-2f(\alpha)g(\alpha)=$$

$$=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m\int_\alpha^\beta f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\int_\alpha^\beta g_i(x)\,d\psi_i(x)+f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)-2f(\alpha)g(\alpha)=$$

$$=\sum_{k=1}^n\int_\alpha^\beta f_k(\lambda)\,d\varphi_k(\lambda)\sum_{i=1}^m\int_\alpha^\beta g_i(x)\,d\psi_i(x)+f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)-2f(\alpha)g(\alpha)=$$

$$=[f(\beta)-f(\alpha)][g(\beta)-g(\alpha)]+f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)-2f(\alpha)g(\alpha)=f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha).$$

Damit haben wir den Satz 8. bewiesen.

§ 5. Verallgemeinerungen des Integrals

1. Wir haben bisher das Integral für stetige Operatorfunktionen bezüglich Operatorfunktionen von beschränkter Schwankung erklärt. Mit Hilfe der Formel (4. 8) läßt sich das Integral auch für Operatorfunktionen von beschränkter Schwankung bezüglich stetigen Operatorfunktionen verallgemeinern. Ist nämlich $f(x)$ eine Operatorfunktion von beschränkter Schwankung, und ist $g(x)$ eine beliebige stetige Operatorfunktion, so definieren wir das Integral von $f(x)$ bezüglich $g(x)$ folgendermaßen:

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,dg(\lambda)=f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)-\int_\alpha^\beta g(\lambda)\,df(\lambda). \tag{5. 1}$$

Man kann einsehen, daß die wichtigsten Eigenschaften eines Stieltjesschen Integrals gültig bleiben.

2. Das uneigentliche Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(\lambda)\, dg(\lambda)$$

definiert man als Grenzwert von $\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda)$ für $\beta \to \infty$:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(\lambda)\, dg(\lambda) = \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda), \tag{5. 2}$$

vorausgesetzt, daß die Integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dg(\lambda)$ für jedes $\beta \geqq \alpha$ definiert sind, und der Grenzwert, der im Sinne der Operatorenrechnung zu verstehen ist, existiert.

Literatur

[1] J. Mikusiński, Operational Calculus, *Pańistowowe* 1959.
[2] S. Saks, Theory of the Integral, *New York* 1937.
[3] F. Riesz – B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin* 1956.

(Eingegangen am 10. Januar 1965.)