Sur les équations fonctionnelles iteratives, I

Par MIRCEA REGHIŞ et LIVIU VUC (Timisoara)

1. Introduction

L'équation fonctionnelle itérative[1])

$$F[x, f(x), f(\alpha(x))] = 0 \tag{1}$$

écrite sous la forme:

$$\begin{cases} f(x) = \psi[x, f(\alpha(x))] \\ f(\alpha(x)) = \varphi[x, f(x)] \end{cases} \tag{2}$$

où f est la fonction inconnue, les fonctions α, F (resp. φ, ψ) étant données, fait l'objet d'un grande nombres de recherches.

Pour obtenir la forme (2) on suppose habituellement que la fonction $F(x, u, v)$ vérifie des conditions qui assurent la résolubilité de l'équation $F(x, u, v) = 0$, par rapport à u et v. On suppose aussi que F satisfait certaines conditions de continuité et différentiabilité nécessaires dans le cas où on cherche les solutions continues ou d'une certaine classe de dérivabilité.

L'équation (1) a été considérée dans des cas plus ou moins particuliers par plusieurs auteurs [4—10], qui ont obtenu des résultats intéressants.

Dans cet ordre d'idées nous tenons à mentionner que dans [1] on étudie un grand nombre d'équations fonctionelles qui appartiennent à ce type. Mais nous n'avons pas trouvé dans la litérature l'étude du problème général de l'existence et de l'unicité des solutions de cette équation.

Dans le présent travail nous nous proposons de faire une étude systématique de ce problème, posé dans toute sa généralité.

Une remarque très importante, qui a été faite aussi par A. N. SHARKOWSKI [9], et qui s'impose dès qu'on commence l'étude des équations itératives, c'est que le rôle le plus essentiel dans cette étude appartient à la fonction α, appelée parfois [9] le „noyau de l'équation" ou bien „argument fonctionel" [3].

---

[1]) Après avoir reçu notre manuscrit, la rédaction de "Publicationes Mathématicae" a bien eu l'amabilité de nous communiquer que M. MAREK KUCZMA, dans son travail "Third note on the general solution of a functional equation", en cours de publication dans "Annales Polonici Mathematici", a obtenu des résultats très voisins aux ceux du présent travail. N'ayant jusqu'à présent la possibilité de voir les résultats mentionnés, nous ne pouvons pas faire ici l'étude des liaisons entre ces résultats et les nôtres.

Dans le présent travail nous donnerons absoulument toutes les solutions de l'équation (1) et tâcherons d'énoncer et solutioner le problème de l'unicité sous la forme la plus générale possible, imposée par la nature même des choses.

Pour obtenir les résultats dans un cadre général nous considérons les fonctions, qui interviennent dans (1) et (2), comme définies sur des ensembles abstraits aux valeurs dans d'autres ensembles abstraits.

On ne suppose pas ces ensembles dotés avec des structures topologiques ou algébriques. Dans un autre travail nous continuerons l'étude de l'équation (1) avec diverses hypothèses topologiques et algébriques concernant la structure de ces ensembles.

2. Hypotheses fondamentales

Désignons par X, Y, Z trois ensembles quelconques. Soit

$$\alpha: X \to X$$

une application de X dans lui même et

$$F: X \times Y \times Y$$

une application du produit cartésien $X \times Y \times Y$ dans Z.

Fixons maintenant un élément arbitraire $\theta \in Z$ et supposons que l'équation

$$F(x, u, v) = \theta \tag{3}$$

admet, pour chaque paire $(x, u) \in X \times Y$, respectivement pour chaque paire $(x, v) \in \in X \times Y$ au moins une solution

$$v = \varphi(x, u), \quad \text{respectivement} \quad u = \psi(x, v), \quad \text{avec}$$
$$v \equiv \varphi[x, \psi(x, v)] \quad \text{et} \quad u \equiv \psi[x, \varphi(x, u)]. \tag{4}$$

Dans ce qui suit nous fixerons ces deux formes explicitées de l'équation (3).

Définition 1. *Nous appellerons équation fonctionnelle itérative du premier ordre le problème de trouver toutes les applications $f: X \to Y$ qui satisfont identiquement la relation*

$$F[x, f(x), f(\alpha(x))] = \theta \tag{5}$$

pour chaque $x \in X$.

Tenant compte des remarques faites à propos des égalités (4), nous poserons l'équation (5) sous la suivante forme équivalente

$$\begin{cases} f(\alpha(x)) = \varphi[x, f(x)] \\ f(x) = \psi[x, f(\alpha(x))]. \end{cases} \tag{6}$$

Nous avons affirmé que le problème (6) est équivalent à (5) parce que, dans le cas ou l'équation (5) peut être explicitée sous plusieurs formes du type (6), chacune de ces explicitations sera traitée comme un problème (6). Dans ce qui suit nous étudierons le problème (6).

Nottons pour chaque $x \in X$

$$\alpha^0(x) = x, \; \alpha^n(x) = \alpha(\alpha^{n-1}(x))$$

et même, à condition que cela soit possible,

$$\alpha^{-n}(x)=\alpha^{-1}(\alpha^{-(n-1)}(x)).$$

Dèfinition 2. *Soient $x_1, x_2 \in X$, nous dirons que x_1 est équivalent* à x_2 *et notterons $x_1 R x_2$ s'il existent deux nombres entiers $m, n \geqq 0$ de sorte que*

$$\alpha^m(x_1)=\alpha^n(x_2). \tag{7}$$

La relation R définie par (7) est évidemment refléxive, symetrique et transitive, donc elle induit dans X une décomposition en classes disjointes d'équivalence.

L'ensemble de ces classes forme l'ensemble quotient X/R de l'ensemble X par rapport à la relation R [2].

Si $\xi \in X/R$ et $x \in \xi$ alors nous ecrirons quelquefois $\xi=\xi_x$. Si $M \subset X$ et $\alpha(M) \subset M$ nous dirons selon l'usage que l'ensemble M est invariant par rapport à l'application α ou, simplement, invariant. Les ensembles invariants jouent un rôle décisif dans le problème de l'existence des solutions de l'équation (6) et surtout de leur unicité.

Proposition 1. *Les éléments de l'ensemble X/R sont invariants par rapport a l'application α.*

Démonstration évidente.

Les classes $\xi \in X/R$ forment une catégorie importante d'ensembles invariants et c'est pour cela que nous en donnerons plus bas une classification.

Definition 3. *Un ensemble C_n de la forme*

$$C_n=\{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{n-1}(x)\}$$

dont les éléments sont tous distincts et $\alpha^n(x)=x$ est dit cycle ayant la période $n \geqq 1$.

On voit qu'un point fixe sera un cycle de période $n=1$.

Remarque 1. Si $y \in C_n$ alors $C_n=\{y, \alpha(y), \ldots, \alpha^{n-1}(y)\}$. On voit aussi que la période est égale au plus petit nombre naturel n pour lequel $\alpha^n(y)=y$.

Remarque 2. On voit aisément que si $x_1 \in C_m, x_2 \in C_n$ (C_m, C_n-cycles) et $x_1 R x_2$, alors $m=n$ et $C_m=C_n$.

3. La classification des classes $\xi \in X/R$

Le type T_1. Nous dirons que la classe $\xi \in X/R$ appartient au type T_1 et écrirons cela $\xi \in T_1$ si α transforme biunivoquement la classe ξ, $\alpha(\xi)=\xi$ et ξ consiste d'un nombre fini d'éléments.

Si ξ consiste d'un seul élément x, c'est à dire $\xi=\{x\}$ alors évidemment $\alpha(x)=x$ et x est un point fixe de α. Si ξ consiste de $n>1$ éléments nous montrerons tout de suite que ξ est un cycle ayant la période n .

En effet, soit $x \in \xi$, arbitraire; supposons qu'il existe un premier nombre naturel $q(1<q<n)$ et $p<q$ avec

$$\alpha^p(x)=\alpha^q(x);$$

Distinguons deux cas: $p>0$, et $p=0$.

1. Si $p>0$ alors, d'une part $y=\alpha(\alpha^{p-1}(x))$, d'autre part de l'égalité ecrite plus haut $y=\alpha(\alpha^{q-1}(x))$ qui, avec l'inégalité $\alpha^{p-1}(x) \neq \alpha^{q-1}(x)$, contredit la biunivocité de l'application α sur l'ensemble ξ.

2. Si $p=0$, les éléments $x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{q-1}(x)$ sont tous distincts $1<q<n$ et $\alpha^q(x)=x$. Evidemment, dans ce cas si $s=mq+r$, $(0 \leqq r<q)$ on a toujours

$$\alpha^s(x) = \alpha^r(\alpha^{mq}(x)) = \alpha^r(x).$$

S'il existe cette fois $y \in \xi$ tel que $y \notin \{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{q-1}(x)\}$ alors $\alpha^m(y)$ aura la même propriété car, dans le cas contraire, en désignant par m le plus petit nombre naturel tel que $\alpha^m(y) \in \{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{p-1}(x)\}$ il est évident que $m \geqq 1$ et $\alpha^{m-1}(y) \notin \{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{q-1}(x)\}$. Soit p $(0 \leqq p \leqq q-1)$ un entier avec $\alpha^p(x)=\alpha^m(y)=z$; alors, d'une part,

(8) $$z=\alpha(u) \quad \text{où} \quad u=\alpha^{m-1}(y) \notin \{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{q-1}(x)\},$$

d'autre part

$$z = \begin{cases} \alpha(\alpha^{p-1}(x)) & \text{si} \quad p>0 \\ \alpha(\alpha^{q-1}(x)) & \text{si} \quad p=0; \end{cases}$$

c'est à dire, en tout cas

(9) $$z=z(v), \quad \text{où} \quad v \in \{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{q-1}(x)\}.$$

Les égalités (8) et (9) contredisent la biunivocité de l'application α sur ξ en tenant compte que $u \neq v$.

Nous avons ainsi établi l'inégalité

$$\alpha^m(y) \neq \alpha^s(x)$$

pour tous les entiers $m, s \geqq 0$, ce qui est incompatible avec l'équivalence yRx. Par conséquent si $y \in \xi$ alors $y \in \{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{q-1}(x)\}$ mais comme les éléments de ξ sont en nombre de n il en résulte $q=n$ ce qui démontre que ξ est un cycle de période n:

(10) $$\xi=\{x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{n-1}(x)\},$$

et si $m=pn+r$ $(0 \leqq r<n)$, alors $\alpha^m(x)=\alpha^r(x)$.

De cette démonstration on deduit encore le fait que dans (10) au lieu de x peut figurer n'importe quel élément $y \in \xi$.

Le type T_2. Nous dirons que la classe $\xi \in X/R$ appartient au type T_2 et écrirons cela $\xi \in T_2$ si α transforme biunivoquement la classe ξ, $\alpha(\xi)=\xi$ et ξ consiste d'une infinité d'éléments.

Par des raisonnements analogues aux précédents et en tenant comte de l'infinitude de la classe ξ on montre aisément que pour chaque $x \in \xi$ les éléments

$$\ldots, \alpha^{-n}(x), \ldots, \alpha^{-1}(x), x, \alpha(x), \ldots, \alpha^m(x), \ldots$$

sont tous distincts et

(11) $$\xi=\{\ldots, \alpha^{-n}(x), \ldots, \alpha^{-1}(x), x, \alpha(x), \ldots, \alpha^m(x), \ldots\}.$$

On voit aussi que dans cette égalité au lieu de x peut figurer n'importe quel $y \in \xi$ et évidemment pour chaque paire $x, y \in \xi$ il existe des entiers p, q $(p=-q)$ tels que $x=\alpha^q(y)$ et $y=\alpha^q(x)$.

Le type T_3. Nous dirons que la classe $\xi \in X/R$ appartient au type T_3 et écrirons cela $\xi \in T_3$ si α transforme biunivoquement la classe ξ, mais $\alpha(\xi) \subsetneqq \xi$ (ξ consiste d'une infinité d'éléments).

Autrement dit, dans ce cas on suppose qu'il existe au moins un élément $x_0 \in \xi$ qui n'est l'image par l'application α d'aucun élément $x \in \xi$.

Nous montrerons tout de suite que l'élément x_0 mentionné tout à l'heure est unique et

$$\xi = \{x_0, \alpha(x_0), \ldots, \alpha^n(x_0), \ldots\}, \tag{12}$$

les éléments situés entre les paranthéses étant tous distincts.

En effet, si $y_0 \in \xi (y_0 \neq x_0)$, était un autre élément jouissant de la propriété que pour chaque $x \in \xi$, $\alpha(x) \neq y_0$ alors pour toute paire d'entiers $m, n \geqq 0$ on aura $\alpha^m(x_0) \neq \alpha^n(y_0)$, car s'il existait une paire $m, n \geqq 0$ telle, que $\alpha^m(x_0) = \alpha^n(y_0)$ alors:

1. Si $m > n$ il résulte $\alpha^{m-n}(x_0) = y_0$ ce qui contredit la définition de y.
2. Si $m < n$ on obtient la contradiction par une voie analogue.
3. Si $m = n$, alors $x_0 = y_0$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse $x_0 \neq y_0$.

Donc l'unicité de x_0 est démontrée. On voit immédiatement que l'égalité (12) est aussi valable. L'élément x_0 est dit le premier élément de l'ensemble ξ. Si $y \in \xi$ est un élément quelconque de $\xi (y \neq x_0)$, il existe $n(y) = n$, unique tel que

$$\xi = \{\alpha^{-n}(y), \ldots, \alpha^{-1}(y), y, \alpha(y), \ldots\} \tag{13}$$

et évidemment $\alpha^{-n}(y) = x_0$.

Le type T_4. Nous dirons que la classe $\xi \in X/R$ appertient au type T_4 et écrirons cela $\xi \in T_4$ si α *ne* transforme pas *biunivoquement* la classe ξ et ξ contient un cycle $C_n(\xi)$ ayant la periode $n \geqq 1$.

Il est facile de voir dans ce cas que, pour chaque $x \in \xi$ il existe un entier $n = n(x) \geqq 0$, de sorte que $\alpha^n(x) \in C_n(\xi)$. La classe $\xi \in T_4$ peut être finie ou infinie mais le cycle $C_n(\xi)$ est unique d'après la remarque 2.

Le type T_5. Nous dirons que la classe $\xi \in X/R$ appartient au type T_5 et écrirons cela $\xi \in T_5$ si α *ne* transforme pas *biunivoquement* la classe ξ et ξ ne contient aucun cycle.

Dans ce cas pour tout $x \in \xi$ les éléments $x, \alpha(x), \ldots, \alpha^n(x), \ldots$ sont tous distincts car autrement la classe ξ contiendrait un cycle; il en résulte que la classe ξ est infinie. On peut résumer maintenant les résultats précédents par le suivant.

Theoreme 1 *(La classification des classes $\xi \in X/R$).*

Soit X un ensemble arbitraire. Toute application $\alpha: X \to X$ de l'ensemble X dans lui même induit dans X une relation binaire d'équivalence R (reflexive, simetrique et transitive) de la manière suivante: on dit que x est équivalent à y et on écrit xRy, s'il existent les entiers $m, n \geqq 0$ tels, que $\alpha^m(x) = \alpha^n(y)$.

Par la relation R l'ensemble X se décompose en classes disjointes d'éléments équivalents. L'ensemble X/R de ces classes ξ, appelé l'ensemble quotient de l'ensemble X par rapport à la relation R, est formé des éléments ξ, appartenant au plus à un des types exclusifs T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 définis plus haut.

Pour l'analyse plus approfondie des classes $\xi \in T_5$ considérons les éléments $x, y \in \xi \in T_5$ $(x \neq y)$. Il existe alors des entiers $m, n \geqq 0$ avec $m + n \geqq 1$ et $\alpha^m(x) = \alpha^n(y)$; le couple (m, n) n'est pas déterminé par les propriétés précédentes car pour tout $p \geqq 1$ on a aussi $\alpha^{m+p}(x) = \alpha^{n+p}(y)$. Considérons le couple minimal (m, n), correspondant au couple (x, y), pour lequel $s = m + n$ prend la valeur la plus petite possible. Cela signifie que $\alpha^m(x) = \alpha^n(y)$, mais pour tout autre couple (h, k), $h, k \geqq 0$ avec $h + k < m + n$ on a $\alpha^h(x) \neq \alpha^k(y)$.

Définition 4. *L'élément* $j(x, y)=\alpha^m(x)=\alpha^n(y)$, *où* (m, n) *est le couple minimal correspondant au couple* (x, y), $x, y\in\xi\in T_5$, *est dit la jonction des éléments* x, y.

On voit aisément que pour chaque paire $x, y\in\xi$ la jonction $j(x, y)$ est unique parce que dans le cas contraire ξ contiendrait un cycle; en effet s'il existait deux élèments $j_1\neq j_2$ avec la propriété $\alpha^m(x)=\alpha^n(y)=j_1$ et $\alpha^p(x)=\alpha^q(y)=j_2$ où $(m, n)\neq\neq(p, q)$ sont deux couples minimaux, alors on doit avoir $m+n=p+q$. Supposons, pour fixer les idées, que $m<p$ alors il en résulte que $n>q$, donc $n+p-m>q$; d'autre part $\alpha^{n+p-m}(y)=\alpha^{p-m}(\alpha^n(y))=\alpha^{p-m}(\alpha^m(x))=\alpha^p(x)=\alpha^q(y)$ d'où, en tenant compte de l'inegalité $n+p-m>q$, on déduit l'existence, dans ξ, d'un cycle.

Définition 5. *Le nombre* $s(x, y)=m+n$, *où* (m, n) *est le couple minimal correspondant au couple* (x, y), $x, y\in\xi$ *est dit la distance itérative des éléments* x, y.

De cette définition il s'en suit en particulier, que si $x, \alpha(x), \ldots, \alpha^m(x)=y$ sont tous distincts alors

$$j(x, y)=y \quad \text{et} \quad s(x, y)=m,$$

donc nous pouvons écrire

$$s(x, y)=m+n=s(x, j(x, y))+s(y, j(x, y)). \tag{14}$$

Proposition 2. *Soit* $j(x, y)$ *la jonction des éléments* $x, y\in\xi$, *alors*

$$j(x, y)=\alpha^n(x)=\alpha^m(y),\ n=\inf\{h\},\ m=\inf\{k\}, \tag{15}$$

h, k étant des entiers tels, que

$$\alpha^h(x)\in\{y, \alpha(y), \alpha^2(y), \ldots\},\quad a^k(y)\in\{x, \alpha(x), \alpha^2(x), \ldots\}.$$

Démonstration. Soit $n=\inf h$; en tenant compte de la définition 4, $j(x, y)==\alpha^p(x)=\alpha^q(y)$, où $s=p+q$ prend la valeur minimale; de la définition du nombre n (15) il résulte $p\geqq n$. Si $p>n$, on a $\alpha^n(x)=\alpha^{q_1}(y)$, où $q_1<q$. Donc, $n+q_1<p+q$ ce qui contredit la minimalité du couple (p, q). Il s'en suit que $p=n$. On montre d'une manière analogue $q=m$, et la proposition est démontrée.

Proposition 3. *Si* $x, y, z\in\xi$ *alors deux, au moins, des éléments* $j(x, y), j(x, z), j(y, z)$ *sont égaux.*

Démonstration. Soient les couples minimaux respectifs (m_1, n_1), (m_2, n_2) et (m_3, n_3).

1. $m_1=m_2=m$; alors on a $\alpha^m(x)=\alpha^{n_1}(y)=j(x, y)$, ainsi que $\alpha^m(x)=\alpha^{n_2}(z)==j(x, y)$, d'où découle $j(x,y)=j(x, z)$.
2. $m_1=m_3=m$; ce cas, en disposant de notations, se réduit au cas 1.
3. $m_1<m_2<m_3$; dans ce cas nous supposons, pour fixer les idées, que $m_2=m_1+p$, $m_3=m_2+q$ et on voit que si $\alpha^h(y)=\alpha^k(z)$, on a $h\geqq n_1+p$, d'autre part

$$\alpha^{n_1+p}(y) = \alpha^p(\alpha^{n_1}(y)) = \alpha^{p+m_1}(x) = \alpha^{n_2}(z) = j(x, z)$$

ce qui signifie que $n_1+p=\inf\{h\}$ pour les nombres h, jouissant de la propriété $\alpha^h(y)\in\{z, \alpha(z), \alpha^2(z), \ldots\}$; c'est à dire

$$\alpha^{n_1+p}(y)=j(y, z)$$

d'où $j(y, z)=j(x, z)$.

Le cas $m_2 = m_3 = m$ est analogue aux cas 1, 2. Ainsi la proposition 3 e complètement demontrée.

Mentionnons sans démonstration, comme un fait intéressant par soi-même, la

Proposition 4. *Si $\xi \in T_5$ alors $s(x, y)$ a les propriétés suivantes:*

1. $s(x, y) \geqq 0$ *pour chaque* $x, y \in \xi$ *et* $s(x, y) =$ *si et seulement si* $x = y$.
2. $s(x, y) = s(y, x), \quad x, y \in \xi$
3. $s(x, z) \leqq s(x, y) + s(y, z), \quad x, y\, z \in \xi.$

Cette proposition justifie le nom de distance itérative pour la fonction $s(x, y)$.

4. Le probleme de l'existence et de l'unicite des solutions pour l'equation (6).

Proposition 5. *Si les éléments ξ de l'ensemble X/R appartiennent exclusivement aux types T_2 et T_3, l'ensemble S des solutions de l'équation* (6) *est non-vide et*

$$\text{card}\,(S) = \text{card}\,(Y^{X/R}).$$

Démonstration. Soit $A: X/R \to Y$ une application arbitraire. Nous montrerons en utilisant cette application, qu'on peut construire une application $f: X \to Y$ telle que $f \in S$. Fixons, à cet effet, dans chaque classe $\xi \in X/R$ un représentant $u \in \xi$ et désignons $\xi = \xi_u$. Si $x \in \xi_u$ il découle des définitions des types T_2 et T_3 l'existence d'un entier p de sorte que $x = \alpha^p(u)$.

Considérons maintenant l'application $f: X \to Y$ définie dela manière suivante:

$$(16)\quad f(x) = \begin{cases} A(\xi_u), & \text{si}\quad x = u, \\ \varphi[\alpha^{p-1}(u), \varphi[\alpha^{p-2}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]]\ldots], & \text{si}\quad x = \alpha^p(u), \quad p > 0 \\ \psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{q-1}(x), A(\xi_u)]]\ldots], & \text{si}\quad x = \alpha^{-q}(u). \quad q > 0 \end{cases}$$

Cette application est une solution de (6); en effet pour tout $x \in X$, il existe un $\xi \in X/R$ unique de sorte que $x \in \xi_u$.

Les suivants cas sont possibles:

1. $x = u$
2. $x = \alpha^p(u), \quad p > 0$
3. $x = \alpha^{-q}(u), \quad q > 0.$

1. Lorsque $x = u$ nous avons par définition

$$f(\alpha(x)) = \varphi[x, A(\xi_u)]; \quad \text{mais} \quad f(x) = f(u) = A(\xi_u),$$

donc

$$f(\alpha(x)) = \varphi[x, f(x)].$$

2. Lorsque $x = \alpha^p(u)$ $(p > 0)$, alors $\alpha(x) = \alpha^{p+1}(u)$ et

$$f(\alpha(x)) = \varphi[\alpha^p(u), \varphi[\alpha^{p-1}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]]\ldots]$$

tandis que

$$f(x) = \varphi[\alpha^{p-1}(u), \varphi[\alpha^{p-2}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]]\ldots];$$

on a donc

$$\varphi[x, f(x)] = f(\alpha(x)).$$

3. Lorsque $x=\alpha^{-q}(u)$ $(q>0)$, nous avons deux cas. Premier cas: $q=1$ c'est à dire $\alpha(x)=u$ et $f(\alpha(x))=f(u)=A(\xi_u)$; d'autre part $f(x)=\psi[x, A(\xi_u)]$ ce qui, en tenant compte de (4), nous donne

$$\varphi[x, f(x)]=\varphi[x, \psi[x, A(\xi_u)]]=A(\xi_u)=f(\alpha(x)).$$

Second cas: $q>1$, $\alpha(x)=\alpha^{-(q-1)}(u)$; alors

$$f(\alpha(x))=\psi[\alpha(x), \psi[\alpha^2(x), \ldots, \psi[\alpha^{q-1}(x), A(\xi_u)]] \ldots]$$

et

$$f(x)=\psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{q-1}(x), A(\xi_u)]] \ldots],$$

donc, en tenant compte de (4), on a

$$\begin{aligned}\varphi[x, f(x)] &= \varphi[x, \psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{q-1}(x), A(\xi_u)]] \ldots]= \\ &=\psi[\alpha(x), \psi[\alpha^2(x), \ldots, \psi[\alpha^{q-1}(x), A(\xi_u)]] \ldots]=f(\alpha(x)),\end{aligned}$$

ce qui démontre que $f\in S$.

L'égalité des cardinaux de la proposition énoncée découle des remarques suivantes. A chaque application $A\in Y^{X/R}$ on peut faire correspondre d'une manière unique l'application $f\in S$ par la formule (17). Il est manifeste que si $A_1, A_2\in Y^{X/R}$, $A_1\neq A_2$, alors pour les applications correspondantes f_1 et f_2 on a aussi $f_1\neq f_2$; donc cette correspondance est biunivoque. On voit aussi immédiatement, que toute application $f\in S$ correspond de cette manière à une application $A\in Y^{X/R}$.

Proposition 6. *Si les éléments ξ de l'ensemble X/R appartiennent exclusivement au type T_5, l'ensemble S des solutions de l'équation* (6) *est non-vide et*

$$\text{card}\,(S)=\text{card}\,(Y^{X/R}).$$

Démonstration. Soit $A\colon X/R\to Y$ une application arbitraire. A l'aide de cette application, après avoir fixé dans chaque $\xi\in X/R$ un représentant $u\in\xi=\xi_u$, tout comme dans la précedente démonstration, nous définirons une nouvelle application $f\colon X\to Y$ par la formule suivante:

(17)

$$f(x)=\begin{cases} A(\xi_u), & \text{si } \quad x=u \\ \psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{n-1}(x), A(\xi_u)]]\ldots], & \text{si } \quad j(x,u)=u,\ s(x,u)=n>0 \\ \varphi[\alpha^{m-1}(u), \varphi[\alpha^{m-2}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]]\ldots], & \text{si } \quad j(x,u)=x,\ s(x,u)=m>0 \\ \psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{n-1}(x), \varphi[\alpha^{m-1}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]]\ldots], & \text{si } \quad s(x,j)=n>0,\ s(u,j)=m>0,\ (j=j(x,y)). \end{cases}$$

L'application qu'on vient de définir est une solution de l'équation (6); en effet, soit $x\in X$, il existe $\xi_u\in X/R$ avec $x\in\xi_u$. Vu que tous les cas se traitent de manière annalogue, considérons seulement le cas

$$s(x, j(x,u))=n>1, \quad s(u, j(x,u))=m>1$$

On a:

$$f(x)=\psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{n-1}(x), \varphi[\alpha^{m-1}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]] \ldots].$$

De même, en tenant compte que $s(\alpha(x), j(\alpha(x), u))=n-1>0$ nous pouvons ecrire

$$f(\alpha(x))=\psi[\alpha(x), \psi[\alpha^2(x), \ldots, \psi[\alpha^{n-1}(x), \varphi[\alpha^{m-1}(u), \ldots, \varphi[u, A(\xi_u)]] \ldots]$$

et par conséquent, en tenant compte de (4),

$$\varphi(x, f(x))=\varphi[x, \psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots]] \ldots]=\psi[\alpha(x), \psi[\alpha^2(x), \ldots]] \ldots]=f(\alpha(x)).$$

Afin d'achever la démonstration il reste encore à faire des remarques analogues à celles faites dans la démonstration de la proposition 6, concernant l'égalité des cardinaux.

Proposition 7. *Si les éléments ξ de l'ensemble X/R appartienent exclusivement aux types T_1 et T_4, cas dans lequel évidemment chaque classe ξ contient un cycle unique $C_n(\xi)$ (ayant la période $n \geqq 1$), la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (6) *admette au moins une solution est qu'il existe pour chaque $\xi \in X/R$, un $x \in C_n(\xi)$, de sorte que l'équation*

$$\varphi[\alpha^{n-1}(x), \varphi[\alpha^{n-2}(x), \ldots, \varphi(x, a)] \ldots]=a, \tag{18}$$

admette au moins une solution $a \in Y$. La condition (18) *qu'on vient de formuler s'appellera la condition de résolubilité. Si l'équation* (18) *admet un ensemble K_x de solutions pour un élément $x \in C_n(\xi)$, alors pour tout autre $y \in C_n(\xi)$ elle admet un ensemble K_y de solutions avec*

$$\operatorname{card}(K_x)=\operatorname{card}(K_y).$$

Si la condition de résubilité est satisfaite alors, en fixant pour tout $\xi \in X/R$ un $u_\xi \in C_n(\xi)$ et désignant par $A: X/R \to Y$ une application arbitraire, jouissant de la propriété que $A(\xi) \in K_{u_\xi}$, on obtient toutes les solutions de l'équation (6) *par la formule:*

(19)

$$f(x) = \begin{cases} A(\xi), & \text{si} \quad x=u_\xi \\ \varphi[\alpha^{m-1}(u_\xi), \varphi[\alpha^{m-2}(u_\xi), \ldots, \varphi[u_\xi, A(\xi)]] \ldots], & \text{si} \quad x=\alpha^m(u_\xi),\ m>0 \\ \psi[x, \psi[\alpha(x), \ldots, \psi[\alpha^{n-1}(x), A(\xi_u)]] \ldots], & \text{si} \quad \alpha^n(x)=u_\xi \quad n>0. \end{cases}$$

Donc, pour l'ensemble S des solutions de l'équation (6) *on a*

$$\operatorname{card}(S) = \operatorname{card}\Big(\prod_{\xi \in X/R} K_{u_\xi}\Big)$$

(où $\prod$ est le symbole du produit cartésien).

Démonstration. Le fait que (19) représente une solution de l'équation (6) se vérifie directement si l'on suppose que pour tout $\xi \in X/R$ la condition de résolubilité (18) est satisfaite et que par conséquent $A(\xi) \in K_{u_\xi}$.

Réciproquement, si S est non-vide, c'est à dire s'il existe au moins une application $f: X \to Y$ qui vérifie l'équation (6) alors, pour tout $u_\xi \in C_n(\xi)$ on a $\alpha^n(u_\xi)=u_\xi$ et

$$f(\alpha^n(u_\xi))=f(u_\xi)=A(\xi).$$

Mais, en tenant compte du fait évident, que toute solution de l'équation (6) vérifie l'égalité

$$f(\alpha^m(x)) = \varphi[\alpha^{m-1}(x), \varphi[\alpha^{m-2}(x), \ldots, \varphi[x, f(x)]] \ldots]$$

pour tout $x \in X$ et tout nombre naturel m, on obtient en particulier

$$A(\xi) = f(\alpha^n(u_\xi)) = \varphi[\alpha^{n-1}(u_\xi), \varphi[\alpha^{n-2}(u_\xi), \ldots, \varphi[u_\xi, f(u_\xi)]] \ldots] =$$
$$= \varphi[\alpha^{n-n}(u_\xi), \varphi[\alpha^{n-n}(u_\xi), \ldots, \varphi[u_\xi, A(\xi)]] \ldots]$$

ce qui signifie que la condition (18) est remplie.

Passons maintenant à la deuxieme partie de la démonstration.

Premièrement, on voit aisément que, sans l'hypothèse (18), pour $x, y \in C_n(\xi)$, l'ensemble K_x est non-vide et si seulement si l'ensemble K_y est non-vide.

Montrons maintenant que $\operatorname{card}(K_x) = \operatorname{card}(K_y)$ pour chaque paire $x, y \in C_n(\xi)$.

Fixons, à cette fin, un cycle $C_n(\xi)$. Pour chaque élément $A \in K_x$ définisons une application $\gamma_A \colon C_n(\xi) \to Y$ par la formule:

$$(20) \quad \gamma_A(y) = \begin{cases} A, & \text{si} \quad y = x \\ \varphi[\alpha^{m-1}(x), \varphi[\alpha^{m-2}(x), \ldots, \varphi[x, A]]\ldots], & \text{si} \quad y = \alpha^m(x) \quad (m \geqq 1). \end{cases}$$

La famille des applications $\{\gamma_A;\, A \in K_x\}$ a les propriétés suivantes:

1. $\gamma_A[\alpha^n(x)] = \gamma_A(x) = A$;
2. Si $A_1, A_2 \in K_x$, $A_1 \neq A_2$, alors $\gamma_{A_1}(y) \neq \gamma_{A_2}(y)$ pour tout $y \in C_n(\xi)$;
3. Si $A \in K_x$, alors $\gamma_A(y) \in K_y$ pour tout $y \in C_n(\xi)$;
4. Si $B \in K_y$, alors il existe $A \in K_x$ de sorte que $\gamma_A(y) = B$ ou, ce qui signifie la même chose, on a $\gamma_{\gamma_B(x)}(y) = B$.

En effet, la propriété 1 est évidente. Montrons la propriété 2.

S'il existe $y \in C_n(\xi)$ tel que $\gamma_{A_1}(y) = \gamma_{A_2}(y)$, alors, vu que $y = \alpha^m(x)$ $(0 < m < n)$, il en résulte $\gamma_{A_1}[\alpha(x^m)] = \gamma_{A_2}[\alpha^m(x)]$; mais (20) nous donne

$$\gamma_{A_1}[\alpha^m(x)] = \varphi[\alpha^{m-1}(x), \varphi[\alpha^{m-2}(x), \ldots, \varphi[x, A_1]]\ldots]$$

et

$$\gamma_{A_2}[\alpha^m(x)] = \varphi[\alpha^{m-1}(x), \varphi[\alpha^{m-2}(x), \ldots, \varphi[x, A_2]]\ldots]$$

par conséquent

$$\begin{aligned} A_1 &= \varphi[\alpha^{n-1}(x), \ldots, \varphi[\alpha^{m-1}(x), \ldots, \varphi[x, A_1]]\ldots] = \\ &= \varphi[\alpha^{n-1}(x), \ldots, \varphi[\alpha^m(x), \gamma_{A_1}[\alpha^m(x)]]\ldots] = \\ &= \varphi[\alpha^{n-1}(x), \ldots, \varphi[\alpha^m(x), \gamma_{A_2}[\alpha^m(x)]]\ldots] = \\ &= \varphi[\alpha^{n-1}(x), \ldots, \varphi[\alpha^m(x), \varphi[\alpha^{m-1}(x), \ldots, \varphi[x, A_2]]\ldots] = \\ &= \gamma_{A_2}(\alpha^n(x)] = A_2, \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Pour justifier la propriété 3, soient $A \in K_x$, $y \in C_n(\xi)$, $y = \alpha^m(x)$ $(0 < m < n)$ et montrons que $\gamma_A(y) \in K_y$; Soit $\gamma_A(y) = B$; alors, en tenant compte du fait que $y = \alpha^m(x)$, on a:

$$\begin{aligned}
\varphi[\alpha^{n-1}(y), \ldots, \varphi(y, B)]\ldots] &= \varphi[\alpha^{n-1}(y), \ldots\ \varphi[y, \gamma_A(y)]]\ldots] = \\
&= \varphi[\alpha^{n+m-1}(x), \ldots, \varphi[\alpha^m(x), \gamma_A[\alpha^m(x)]]\ldots] = \\
&= \varphi[\alpha^{n+m-1}(x), \ldots, \varphi[\alpha^m(x), \varphi[\alpha^{m-1}(x), \ldots, \varphi[x, A]]\ldots] = \\
&= \gamma_A[\alpha^{n+m}(x)] = \gamma_A[\alpha^n(y)] = B,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\gamma_A(y) = B$ appartient à l'ensemble K_y.

Démonstrons, enfin, la propriété 4. Soit $B \in K_y$ et $y = \alpha^m(x)$ $(0 < m < n)$; évidemment $x = \alpha^{n-m}(y)$ et

$$\begin{aligned}
\gamma_{\gamma_B(x)}(y) = \gamma_{\gamma_B(x)}[\alpha^m(x)] &= \varphi[\alpha^{m-1}(x), \ldots, \varphi[x, \gamma_B(x)]]\ldots] = \\
&= \varphi[\alpha^{m-1}(x), \ldots, \varphi[x, \gamma_B[\alpha^{n-m}(y)]]\ldots] = \\
&= \varphi[\alpha^{n-1}(y), \ldots, \varphi[\alpha^{n-m}(y), \gamma_B[\alpha^{n-m}(y)]]\ldots] = \\
&= \varphi[\alpha^{n-1}(y), \ldots, \varphi[y, B]]\ldots] = B,
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $B \in K_y$.

Ainsi la propriété 4 est aussi démontrée.

Des propriétés 1—4 il déeoule que l'application χ: $K_x \to K_y$, définie par

$$\chi(A) = \gamma_A(y),$$

transforme d'une manière biunivoque l'ensemble K_x dans l'ensemble K_y et $\chi(K_x) = K_y$ ce qui signifie que card $(K_x) =$ card (K_y). La proposition 7 est ainsi entièrement dèmontrée.

Afin de synthétiser les résultats précédents désignons par $(X/R)_1$ l'ensemble de toutes les classes $\xi \in X/R$ appartenant aux types T_2, T_3, T_5 et par $(X/R)_2$ l'ensemble des classes appartenant aux types T_1, T_4.

Evidemment $X/R = (X/R)_1 \cup (X/R)_2$ et $(X/R)_1 \cap (X/R)_2 = \emptyset$; nous choissons maintenant dans chaque classe $\xi \in X/R$ un représentant bien déterminé $u_\xi \in \xi$ de la manière suivante: si $\xi \in (X/R)_1$ alors on prend l'élément u_ξ arbitrairement dans ξ; si $\xi \in (X/R)_2$ alors on prend l'élément u_ξ arbitrairement dans le cycle $C_n(\xi)$ (qui évidement existe et se trouve uniquement déterminé dans ξ). Ce choix de u_ξ dans le second cas n'est pas tout à fait essentiel mais nous le faisons afin de simplifier les formules.

Maintenant, on peut résumer les résultats formulés dans les propositions 5, 6, 7 dans le suivant

Theoreme 2. *(L'existence des solutions).*

Si $(X/R)_2 = \emptyset$ *alors l'ensemble* S *de toutes les solutions de l'équation* (6) *est non-vide et*

$$\text{card}\,(S) = \text{card}\,(Y^{X/R}).$$

Si $(X/R)_2 \neq \emptyset$ *alors l'équation* (6) *n'admet pas en général des solutions definies sur l'ensemble* X *tout entier. Cependant, pour qu'il existe des solutions de l'équation*

(6) *définies partout dans X il est nécessaire et suffisant que la condition de résolubilité* (18) *soit satisfaite. En ce cas*

$$\operatorname{card}(S) = \operatorname{card}[Y^{(X/R)_1}] \cdot \operatorname{card}[\prod_{\xi \in (X/R)_2} K_{u_\xi}].$$

Toute solution est définie sur chaque classe indépendemment par l'une des formules (16), (17), (19).

Remarque 3. On peut construire d'une manière analogue des solutions de l'équation (6) sur toute partie $M \subset X$ saturée par rapport à la relation d'équivalence R [2] (c'est à dire, sur chaque ensemble M jouissant de la propriété: $x \in M \Rightarrow \xi_x \subset M$, ou bien $M = \bigcup_{x \in M} \xi_x$).

Remarque 4. On voit aisément que l'ensemble S des solutions ne dépend pas du choix particulier de la famille $\{u_\xi\}$ des représentants.

Passons maintenant au problème de l'unicité des solutions.

De l'analyse précédente il résulte que la seule manière naturelle de poser le problème de l'unicité découle du fait que deux solutions sont égales si elles coincident sur l'ensemble $\{u_\xi\}$ des représentants des classes ξ.

Afin de formuler le théorème d'unicité, supposons que la condition de résolubilité est remplie. Evidemment, la condition (18) concerne seulement les éléments $\xi \in (X/R)_2$ et il est possible qu'il existe dans $(X/R)_2$ des elements „singuliers" pour lesquels l'équation (18) admet *une seule* solution $A \in Y$, ou ce qui signifie la même chose qu'il existe des classes $\xi \in (X/R)_2$ jouissant de la propriété que pour tout $x \in C_n(\xi)$ l'ensemble K_x consiste d'un seul élément. Désignons par Γ l'ensemble de ces éléments „singuliers" et par

$$(X/R)_0 = (X/R) - \Gamma$$

(la différence au sens de la théorie des ensembles).

Theoreme 3. *(L'unicité des solutions).*

a) *Soient* $f_1, f_2 \in S$; *si* $f_1(u_\xi) = f_2(u_\xi)$ *pour tout* $\xi \in (X/R)_0$, *alors*

$$f_1(x) = f_2(x), \quad \textit{pour tout} \quad x \in X.$$

b) *Soient* $\xi^* \in (X/R)_0$ *et* $A, B \in K_{u_{\xi^*}}$, $A \neq B$, *il existe alors* $f_1, f_2 \in S$ *avec* $f_1(u_\xi) = f_2(u_\xi)$ *pour tout* $\xi \neq \xi^*$ *et* $f_1(u_{\xi^*}) = A$, $f_2(u_{\xi^*}) = B$.

Démonstration. La partie (a) résulte des propositions 5, 6, 7 si on désigne $f_1(u_\xi) = f_2(u_\xi) = A(\xi)$ et on déduit les valeurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$ des formules (16), (17), (19).

La partie (b) découle du fait que la construction de n'importe quelle solution sur chaque classe ξ est indépendente des valeurs qu'elle prend sur les classes $\eta \neq \xi$ et de l'hypothèse $A, B \in K_{u_{\xi^*}}$, $A \neq B$.

En conclusion, en faisant une analogie, assez forcée d'ailleurs, avec la situation qui se presente dans la théorie des équations différentielles on peut dire que le problème d'unicité dans un certain sens généralisé est un problème de Cauchy. En effet, sur chaque classe la solution est uniquement déterminée par la valeur qu'elle prend pour un élément fixé de la classe. Dans sa totalité la solution est uniquement déterminée par ses valeurs sur l'ensemble des représentants u_ξ des classes $\xi \in (X/R)_0$. On pourrait ajouter que la solution générale de l'équation (6) dépend d'une application arbitraire définie sur l'ensemble $(X/R)_0$ aux valeurs dans Y.

5. Remarque concernant l'equation iterative d'ordre n.

Définissons en premier lieu l'équation itérative d'ordre n.

Désignons par X, Y, Z trois ensembles arbitraires et soient $\alpha: X \to X$ une application de X dans lui même et

$$F: X \times Y^{n+1} \to Z$$

une application du produit cartésien $X \times Y^{n+1}$ dans Z.

Fixons maintenant un élément $\theta \in Z$ et supposons que l'équation

$$F(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) = \theta \tag{21}$$

admet, pour chaque système $(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in X \times Y^n$, respectivement pour chaque système $(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \in X \times Y^n$, au moins une solution

$$\begin{aligned} u_n &= \varphi[x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}], \\ u_0 &= \psi[x, u_1, u_2, \ldots, u_n]. \end{aligned} \tag{22}$$

Evidemment ces solutions ont la propriété

$$\begin{aligned} &u_n \equiv \varphi[x, \psi[x, u_1, \ldots, u_n], u_1, \ldots, u_{n-1}],\ (x, u_1, \ldots, u_n) \in X \times Y^n \\ &u_0 \equiv \psi[x, u_1, \ldots, u_{n-1}, \varphi[x, u_0, \ldots, u_{n-1}]],\ (x, u_0, \ldots, u_{n-1}) \in X \times Y^n; \end{aligned} \tag{23}$$

c'est avec ces deux formes explicitées (22) de l'équation (21) que nous aurons à faire dans ce qui suit.

Definition 6. *Nous appelons équation fonctionnelle itérative d'ordre n* à *une fonction inconnue, le problème de trouver toutes les applications $f: X \to Y$ qui satisfont identiquement la relation*

$$F[x, f(x), f(\alpha(x)), \ldots, f(\alpha^n(x))] \equiv \theta \tag{24}$$

pour tout $x \in X$.

Tout comme dans le § 2 nous poserons l'équation (24) sous la suivante forme équivalente:

$$\begin{cases} f[\alpha^n(x)] = \varphi[x, f(x), f[\alpha(x)], \ldots, f[\alpha^{n-1}(x)]] \\ f(x) = \psi[x, f[\alpha(x)], \ldots, f[\alpha^n(x)]]. \end{cases} \tag{25}$$

Les résultats obtenus dans les § § 2, 3, 4 sont valables presque sans différences dans ce cas. En effet, les solutions dans ce cas s'obtiennent aussi en les construisant sur chaque classe $\xi \in X/R$ indépendemment des valeurs qu'elles prennent sur les classes $\eta \neq \xi$. Ainsi nous sommes conduits vers des problèmes d'existence et d'unicité de la même nature. Les différences qui apparaissent dans ce cas découlent du fait que, cette fois, pour construire la solution sur une classe ξ on donne n valeurs arbitrairement choisies dans n points $x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{n-1}(x)$ de ξ, les autres valeurs s'obtenant succesivement. Si la classe $\xi \in X/R$ appertient aux types T_2, T_3, T_5 alors le procédé est applicable sans aucune restriction. Mais si la classe ξ appartient au type T_1, ou T_4 c'est a dire si ξ contient un cycle $C_m(\xi)$, alors interviennent les *conditions de résolubilité*, analogues à la condition (18).

Il est intéressant de mentionner que dans ce cas les conditions de résolubilité se présentent sous la forme d'un systeme de p équations ou $p = \min(n, m)$, n étant l'ordre de l'équation et m la période du cycle $C_m(\xi)$.

Par exemple si l'équation est du troisème ordre $n=3$, et la période du cycle $C_m(\xi)$ est $m=2$, alors les conditions de résolubilité sont:

$$A_1=\varphi(x, A_0, A_1, A_0)$$
$$A_0=\varphi(\alpha(x), A_1, A_0, A_1)$$

où A_0, $A_1 \in Y$ sont les inconnues cherchées pour $x \in C_m(\xi)$.

Bibliographie

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Berlin,* 1961.
[2] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Théorie des ensembles, Livre I, *Paris, 1951.*
[3] M. Ghermănescu, Ecuatii funcţionale, *Bucureşti,* 1960.
[4] J. Kordylewski, On the functional equation *Ann. Polon. Math.* **9** (1960/61), 285—293.
[5] M. Kuczma, On convex solutions of the functional equation $g(\alpha(x)) - g(x)=\varphi(x)$, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 40—47.
[6] M. Kuczma, On continuous solutions of a functional equation $\varphi(f(x))=G(x, \varphi(x))$, *Ann. Polon. Math.* **8** (1960), 209—214.
[7] C. Popovici, Les équations fonctionelles et paralélisme avec les équations différentielles, *Bull. Sci. Math.* **35** (1929), 213—224, 232—247.
[8] S. Presić, Sur l'équation fonctionelle $f(x)=f(g(x))$, *Publ. Elektrotehn. Fakult., serija: Mat. i Fiz.* no 61—64, (1961), *Beograd.*
[9] A. N. Sharkowski, O reshenii odnogo klassa funktionalnich uravnenij, *Ukrain. Mat. Z.* **13** (1961), 86—94.
[10] S. Presic, Sur l'équation foctionelle $f(x)=H(x, f(x), \dots, f(\Theta_n x))$, *Publ. Elektrotehn.* Fakult., *serija: Mat. i Fiz.* no. 115—121, (1963), *Beograd.*

(Reçu le 4. septembre 1964.)